14. Lineáris algebra

14.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. $A^3 = ?$

14.2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. $A^3 = ?$

14.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Határozza meg a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek!

a) $A \cdot B + C^T$ b) $B^T \cdot A + C$ c) $B^T \cdot A + C^T$

d) $A^T \cdot B + C$ e) $A^T \cdot B + C^T$

14.4. Határozza meg a következő mátrixok determinánsát!

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ 14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 15) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 17) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 18) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 20) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 21) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 23) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

14.5. Határozza meg az A mátrix determinánsát háromszög mátrixra alakítással!

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14.6. Határozza meg az alábbi mátrixok inverzét, ha létezik!

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 7 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$ h) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ i) $A=\begin{pmatrix}6 & -9 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

14.7. Határozza meg a következő mátrixok inverzét, sajátértékeit és sajátvektorait!

a) $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

14.8. Határozza meg az A mátrixú lineáris transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait!

a) $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 8 & 7\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ h) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

14.9. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\det\begin{pmatrix}2x & 2 & 2\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=0$ b) $\det\begin{pmatrix}2x & 2 & -2\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=0$

14.10. A t paraméter mely értéke esetén igaz, hogy

a) $\det\begin{pmatrix}-3t & 1 & 1\\ 2 & 0 & -t\\ t & -4 & 1\end{pmatrix}=34$? b) $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & -3t\\ 0 & -t & 2\\ -4 & 1 & t\end{pmatrix}=89$?

14.11. A sík milyen transzformációját adja meg az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix? Vannak-e sajátvektorok, és ha igen, akkor mely sajátértékhez tartoznak?

14.12. A sík milyen transzformációját adja meg az $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix? Vannak-e sajátvektorok, és ha igen, akkor mely sajátértékhez tartoznak?

14.13. Adja meg a sík origó körüli 150°-os forgatásának mátrixát!

14.14. Adja meg a sík origó körüli 120°-os forgatásának mátrixát!

14.15. Határozza meg a sík azon lineáris transzformációjának sajátértékeit és sajátvektorait, mely a sík minden pontjához az y = x egyenesre vonatkozó tükörképét rendeli!

14.16. Független-e a $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ vektorrendszer?

14.17. Független-e az $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ vektorrendszer? Állítsa elő a $\underline{b}$ vektort az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként (ha lehet)!

a) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 29 \\ -4 \\ 32 \end{pmatrix}$.

d) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -53 \\ -13 \\ 20 \end{pmatrix}$.

14.18. Határozza meg az $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ vektorrendszer rangját és oldja meg az $\mathbf{x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 = \underline{b}}$ egyenletrendszert!

a, $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b, $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c, $\underline{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

d, $\underline{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

e, $\underline{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\9\\6\end{pmatrix}$.

14.19. Határozza meg az A mátrix inverzét, és oldja meg az $\mathbf{A\underline{x}} = \mathbf{\underline{b}}$ egyenletrendszert inverzmátrix-módszerrel!

a, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}5\\13\end{pmatrix}$.

b, $A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$, $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}5\\13\end{pmatrix}$.

c, $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$, $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}$.

d, $A=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$, $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}$.

e, $A=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$, $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}10\\26\end{pmatrix}$.

14.20. Legyen $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$. Határozza meg az $A^{-1}b$ mátrixot és oldja meg az $\mathbf{A\underline{x}} = \mathbf{\underline{b}}$ egyenletrendszert a Cramer-szabály felhasználásával! Mennyi az A mátrix rangja?

14.21. Adja meg az alábbi egyenletrendszer általános megoldását, továbbá egy olyan megoldását, melyben $x_1 = -2$!

I. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15$
II. $3x_1 - x_2 + x_4 = 17$
III. $4x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 32$
IV. $-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2$
V. $-3x_1 + x_2 - x_4 = -17$

14.22. A megadott lineáris egyenletrendszerek közül oldja meg Cramer-szabállyal azt, amelyiket lehet, és Gauss-eliminációval a másikat!

I. $x + 4y - 3z = 10$	I. $x + 4y - 3z = 10$
II. $2x + y - z = 2$	II. $2x + y - z = 2$
III. $-x - 2z = -4$	III. $-x - 2z = -4$

14.23. A megadott lineáris egyenletrendszerek közül oldja meg Cramer-szabállyal azt, amelyiket lehet, és Gauss-eliminációval a másikat!

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x - 3y + 4z = 10 \\ \text{II.} & 2x - y + z = 2 \\ \text{III.} & -x - 2y = -4 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I.} & x - 3y + 4z = 10 \\ \text{II.} & 2x - y + z = 2 \\ \text{III.} & -x - 2y = -4 \end{array}$$

14.24.Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszereket!

a) $$\begin{aligned} x + y + z + 2v &= 5 \\ x + y + 2z + v &= 5 \\ x + 2y + z + v &= 5 \\ 2x + y + z + v &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - y + 2z &= -1 \\ 2x + y - z &= 9 \\ -x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x - y + 2z &= -1 \\ 2x + y - z &= 9 \\ 3x + z &= 8 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} -2x - y + z &= -9 \\ x - 2y - z &= 0 \\ -x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} -2x - y + z &= -9 \\ x - 2y - z &= 0 \\ -x - 3y &= -9 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} y + 3z &= -1 \\ x + 3y &= 9 \\ x - y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} y + 3z &= -1 \\ x + 3y &= 9 \\ x + 4y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 4x + 2y + 2z &= 6 \\ 7x + 4y + 4z &= 10 \\ -4x - 2y - z &= -8 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} -4x - 2y - z &= -8 \\ 4x + 2y + 2z &= 6 \\ 7x - 4y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} x - 2y + 8z - 7v &= -7 \\ y - 3z + 4v &= 6 \\ 2x + 3y - 5z + 14v &= 28 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} x + 3y - 4z + 2v &= 8 \\ 2x + 5y + 5z - 6v &= 2 \\ x + y + 22z - 18v &= -20 \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ -3y + 3z &= 15 \\ 2x - y + z &= -3 \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x + y + z &= 8 \\ 2x - 2y - 4z &= 20 \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + z &= 7 \\ 2x + 5y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

o) $$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + z &= 4 \\ 3x - y - z &= 6 \end{aligned}$$