

12. Határozott integrál

12.1. Számítsa ki a következő határozott integrálokat!

$$1. \int_0^3 \frac{1}{9+x^2} dx$$

$$4. \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$7. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$$

$$10. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$13. \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{x}{3} dx$$

$$16. \int_0^{\pi} \cos^3 \frac{x}{3} dx$$

$$19. \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{x+1}} dx$$

$$22. \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{x+1}} dx$$

$$25. \int_0^{\pi} \cos^3 \frac{x}{2} dx$$

$$28. \int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$31. \int_1^2 \frac{1}{x^2 - x} dx$$

$$34. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$37. \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

$$40. \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$$

$$43. \int_1^2 \frac{1}{x+x^3} dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx$$

$$5. \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

$$11. \int_{-1}^1 \ln(x^2) dx$$

$$14. \int_{-1}^1 \operatorname{arctg} x dx$$

$$17. \int_{-1}^0 x \cdot e^{-x} dx$$

$$20. \int_0^3 \sqrt{\frac{4}{x+1}} dx$$

$$23. \int_0^1 \frac{x-4}{2x+1} dx$$

$$26. \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$$

$$29. \int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{5}} dx$$

$$32. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+\cos x} dx$$

$$35. \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$38. \int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx$$

$$41. \int_1^2 \ln^2 x dx$$

$$44. \int_1^e x^3 \cdot \ln x dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

$$6. \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx$$

$$9. \int_0^{\pi} \sin^3 x dx$$

$$12. \int_1^e \ln(x^2) dx$$

$$15. \int_1^e \ln \sqrt{x} dx$$

$$18. \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$$

$$21. \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x+1}} dx$$

$$24. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \frac{x}{2} dx$$

$$27. \int_3^{20} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$$

$$30. \int_1^2 \frac{1}{x^2+x} dx$$

$$33. \int_0^{\pi} \frac{2}{1+\cos x} dx$$

$$36. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

$$39. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$$

$$42. \int_0^1 \sqrt{x^2+2x} dx$$

$$45. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$46. \int_0^1 (e^x - 1)^4 \cdot e^x dx$$

$$47. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) dx$$

12.2. Határozza meg a következő improprius integrálokat!

$$1. \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$2. \int_0^{\infty} 4xe^{-x^2} dx$$

$$3. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

$$5. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$6. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$7. \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

$$8. \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

$$9. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx$$

$$10. \int_6^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx$$

$$11. \int_0^{\infty} e^{-4x} dx$$

$$12. \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$$

$$13. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$14. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx$$

$$15. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 - 5x - 6} dx$$

$$16. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$$

$$17. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$$

$$18. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$$19. \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$20. \int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x-4}} dx$$

$$21. \int_5^6 \frac{1}{\sqrt{x-5}} dx$$

$$22. \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$$

12.3. Mely x_0 érték mellett lesz az f függvény alatti terület az I intervallumon T ?

$$a, f(x) = \frac{5}{x^2}$$

$$I = [x_0, 2x_0]$$

$$T = 10$$

$$b, f(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$I = \left[\frac{x_0}{2}, x_0\right]$$

$$T = 10$$

$$c, f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$I = \left[\frac{x_0}{2}, x_0\right]$$

$$T = 20$$

$$d, f(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$I = \left[\frac{x_0}{2}, x_0\right]$$

$$T = 8$$

$$e, f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$I = \left[\frac{x_0}{2}, x_0\right]$$

$$T = 12$$

12.4. Számítsa ki a megadott függvények görbéi által közrefogott síkrész területét! (Amennyiben több közrefogott rész van, akkor ezek közül egynek a területét.)

$$a, f(x) = -2x^2 + 6x$$

$$g(x) = 3x^2 - 9x$$

$$b, f(x) = 4x^2 + 12x$$

$$g(x) = -x^2 - 3x$$

$$c, f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos x$$

d, $f(x) = \sin x$	$g(x) = \frac{1}{2}$.
e, origó középpontú, 2 egység sugarú kör	$g(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$
f, origó középpontú, 3 egység sugarú kör	$g(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 3$
g, $f(x) = 2x$	$g(x) = x^3$
h, $f(x) = 4x$	$g(x) = x^3$
i, $f(x) = x^4$	$g(x) = 2x^2 - 1$
j, $f(x) = 1 - x^2$	$g(x) = 1 - x^3$
k, $f(x) = -2x^2 + 6x$	$g(x) = 2x^2 - 6x$
l, $f(x) = 4x^2 + 12x$	$g(x) = -4x^2 - 12x$

12.5. Határozza meg az f függvény adott intervallum feletti ívének ívhosszát!

a, $f(x) = \frac{\operatorname{ch} 2x}{2}$	$x \in [0, \ln\sqrt{2}]$.
b, $f(x) = \frac{\operatorname{ch} 3x}{2}$	$x \in [0, \ln\sqrt{3}]$.
c, $f(x) = 3^x$	$x \in [0, 2]$.
d, $f(x) = 4^x$	$x \in [1, 3]$.
e, $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(x-5)$	$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
f, $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}(x-3)$	$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
g, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}(x-5)$	$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
h, $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}(x-3)$	$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
i, $f(x) = \operatorname{ch} x$	$x \in [0, 1]$.
j, $f(x) = \sqrt{x^3}$	$x \in [0, 1]$
k, $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$	$x \in [0, 4]$.

12.6. Határozza meg az f függvény adott intervallum feletti ívének az x -tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

a, $f(x) = x\sqrt{\sin x}$	$x \in [0, \pi]$
b, $f(x) = xe^{-3x}$	$x \in [0, \ln 2]$

$$c, f(x) = 1 + \cos \frac{x}{2} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$d, f(x) = \lg x \quad x \in [1, 10]$$

$$e, f(x) = \frac{1}{2} \ln 2x \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right]$$

$$f, f(x) = \sqrt{-4x^2 - 16x + 20}$$

$$g, f(x) = \sqrt{-2x^2 - 8x + 10}$$

$$h, f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$$

$$i, f(x) = \sqrt{-3x^2 - 12x + 15}$$

$$j, f(x) = \sqrt{\sin x} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$k, f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^3 + 8}} \quad x \in [0, 2]$$

$$l, f(x) = e^{-x} \quad x \in [0, \ln 2]$$

$$m, f(x) = e^{-x} \quad x \in [0, \ln 3]$$

$$n, f(x) = 1 + \sin \frac{x}{2} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

12.8. Határozza meg az A, B, C háromszögnek az x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogatát!

$$a, A = (5, 1), B = (7, 7), C = (3, 7)$$

$$b, A = (6, 2), B = (8, 8), C = (4, 8)$$

12.9. Határozza meg az adott görbeívnek az x tengely körüli megforgatásával nyert felület felszínét!

$$a, f(x) = \sqrt{1-x}, \quad x \in [0, 1]$$

$$b, f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, 4]$$

12.10. Határozza meg a következő függvények és az x-tengely által közrefogott síklemez súlypontját!

$$a, f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$b, f(x) = -x^2 + 8x - 12$$

12.11. Határozza meg az $y = 0$, $x = 4$, $x = 10$ és az $y = 2x$ egyenletű egyenesek által közrefogott síkrész súlypontjának koordinátáit!

12.12. Határozza meg az f függvény adott intervallum feletti íve és az x-tengely közti síklap súlypontját!

$$\text{a, } f(x) = \cos(\pi \cdot x) \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{b, } f(x) = 1 - \sqrt{x} \quad x \in [1, 4]$$

$$\text{c, } f(x) = 1 + \sqrt{x} \quad x \in [1, 4]$$

$$\text{d, } f(x) = 5 \operatorname{ch} \frac{x}{5} \quad x \in [0, 5]$$

$$\text{e, } f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{f, } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad x \in [-2, -1]$$

$$\text{g, } f(x) = \cos \frac{\pi x}{2} \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{h, } f(x) = \cos 2x \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{i, } f(x) = \ln x \quad x \in [1, e]$$

$$\text{j, } f(x) = \sin x \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

12.13. Határozza meg az f függvény adott intervallum feletti ívének az x -tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest súlypontjának koordinátáit!

$$\text{a, } f(x) = (x+1)(1-x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{b, } f(x) = (x+2)(2-x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{c, } f(x) = 2^x + 3 \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{d, } f(x) = \cos x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{e, } f(x) = \sin x \quad x \in [0, \pi]$$

$$\text{f, } f(x) = \sqrt{x} \quad x \in [0, 4]$$