10. Differenciálszámítás

10.1 Vázolja a következő függvények, és határozza meg az értelmezési tartomány azon pontjait, ahol nem differenciálhatóak:

a, $f(x) = 4|2x-3|$

b, $f(x)=|\sin x|$

c, $f(x) = \sin^2 x$

d, $f(x) = \sqrt{|x+1|}$

e, $f(x) = |4x^3|$

f, $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ ha } x < 0 \\ x^2, \text{ ha } x \geq 0 \end{cases}$

g, $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ ha } x < 1 \\ \sqrt{x}, \text{ ha } x \geq 1 \end{cases}$

h, $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } |x| \leq \pi \\ -1, & \text{ha } |x| > \pi \end{cases}$

i, $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha } \frac{-3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{egyebkent} \end{cases}$

j, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \leq -1 \\ x^2 - 1, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$

k, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

l, $f(x) = |x-3| + |x+5|$

m, $f(x) = |x^2+2x-8|$

n, $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ ha } x \leq 0 \\ \sqrt{x}+1, \text{ ha } 0 < x \leq 9 \\ 2x-14, \text{ ha } 9 < x \end{cases}$

10.2. A paraméterek mely értéke esetén differenciálhatóak az alábbi függvények a megadott pontokban:

a, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x-1), & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ \ln cx, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, $x_o=1$

b, $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ e^{x-1}, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$, $x_o=1$

10.3. Számítsa ki a differenciahányados-függvény határértékeként az alábbi függvények adott pontbeli differenciálhányadosát:

a, $f(x) = x^2+x$, $x_o=1$

b, $f(x) = \sqrt{x}+x$, $x_o=9$

c, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_o=3$

d, $f(x) = 8x^2+1$, $x_o=2$

10.4. Határozza meg a differenciahányados-függvény határértékeként az alábbi függvények derivált függvényét:

a, $f(x) = x^2$

b, $f(x) = x^3$

c, $f(x) = \frac{2}{x-3}$

d, $f(x) = \sqrt{x^5}$

10.5. Határozza meg a következő függvények első derivált függvényét és a differenciálhányados értékét a megadott pontokban:

a, $f(x) = 5 \cdot x^3 - \text{tg}\, x, \quad x_o=\pi$

b, $f(x) = 1 - e^x + \dfrac{6}{x^3}, \quad x_o=1$

c, $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}} + 4x, \quad x_o=1$

d, $f(x) = x \cdot e^{-x} \cdot \cos 2x$

e, $f(x) = \dfrac{3\ln x + \sin x}{\sqrt{x}}$

f, $f(x) = 5e^x \left(x - \dfrac{\text{ctg}x}{x^2} \right) + \dfrac{\sqrt{x} + x}{4}$

g, $f(x) = (x^4 - 6x + 1)^6 - (7x^3 - 3x + 2)^9,$
$x_o = -1$

h, $f(x) = \lg(\sin 4x), \quad x_o=\pi/8$

i, $f(x) = 5^{\sin x} - 2\sin^5(1 - x), \quad x_o=0$

j, $f(x) = \sqrt{\text{tg}\dfrac{x}{2}} \cdot \left(6 - \sqrt[3]{\sin\dfrac{x}{3}} \right)$

k, $f(x) = \text{tg}\dfrac{x+1}{x-1}$

l, $f(x) = \arccos\dfrac{x}{1-x} + \arcsin\sqrt{x^2 - 1}$

m, $f(x) = \left(1 + \ln\dfrac{1}{x} \right)^5, \quad x_o=1$

n, $f(x) = \ln\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 + 5x^3}}$

o, $f(x) = e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}$

p, $f(x) = \cos^2(\text{arctg} e^{x/2})$

q, $f(x) = \dfrac{-3 + x + x\,\text{arctg}x}{\sqrt{x^2 + x + 3}}$

r, $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}, \quad x_o=4$

s, $f(x) = 2^{\cos^2 x} + \text{tg}\dfrac{\pi}{4}$

10.6. Vázolja az alábbi függvényeket és a derivált függvényeiket:

a, $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ ha } x \\ -x^3, \text{ ha } - \end{cases}$

b, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, \text{ ha } x \le -1 \\ x^3, \text{ ha } -1 < x \end{cases}$

c, $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot 2^x, \text{ ha } x \le -1 \\ x^2, \text{ ha } -1 < x \le 1 \\ 2x - 1, \text{ ha } 1 < x \end{cases}$

10.7. Határozza meg a következő függvények második derivált függvényét és annak értékét a megadott pontokban:

a, $f(x) = 5x^3 - x + 3, \quad x_o=2$

b, $f(x) = 6x + 2, \quad x_o= -7$

c, $f(x) = \sqrt{x}\arcsin x, \quad x_o=0$

d, $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x_o=0$

e, $f(x) = 3\ln 2x - \text{tg}^2 x, \quad x_o=\pi$

f, $f(x) = x^2 \cdot \text{arctg}(x/5) + 3x, \quad x_o=1$

10.8. Határozza meg a következő függvények első derivált függvényét („logaritmikus” deriválás):

a, $f(x) = x^x$

b, $f(x) = (x \cdot \ln x)^{x-1}$

c, $f(x) = \sqrt[x]{x}$

d, $f(x) = x^2 \cdot (x^2 + 4)^{4x}$

e, $f(x) = \sin(x^x + x)$

f, $f(x) = \sqrt[\text{tg}x]{\arcsin x}$

g, $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2 + x^{2x}}}$

h, $f(x) = x^{\sqrt{2 - x^2}}$

10.9. Határozza meg a következő függvények megadott pontbeli érintési paramétereit, görbületét, továbbá írja fel az érintő egyenes, a normális egyenes és a simulókör egyenletét:

a, $f(x) = 3x - x^2$, $x_o=4$

b, $f(x) = \text{arctg } x$, $x_o=1$

c, $f(x) = e^{-x^2}$, $x_o=1$

d, $f(x) = \ln(\sin x)$, $x_o=\pi/2$

e, $f(x) = 5^{\sqrt[3]{x}}$, $x_o=1$

f, $f(x) = (4x^3-5x^2+6x+7)^3$, $x_o= -1$

g, $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $x_o= \pi/4$

h, $f(x) = \arcsin x$, $x_o= 1/2$

10.10. Határozza meg a következő kifejezések közelítő értékét a bennük szereplő függvényeket a függvény nevezetes helyén lineárisan közelítve:

a, $\sqrt[3]{1{,}02}$ b, $\cos 153^o$ c, $\sin^2 26^o$ d, $\text{tg}^4 0{,}07$

e, $\lg 11$ f, $\log_3 80$ g, $\sqrt[5]{34}$ h, $(10{,}02)^8$

10.11. Határozza meg a következő függvényhatárértékeket a L'Hospital-szabály alkalmazásával:

1. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x^3}{\ln(\sin x)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1)\text{ctg}x$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ch}x - \cos x}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)\text{ctg}(\pi x)$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}x - x}{x - \sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\text{tg}4x - 12\text{tg}x}{3\sin 4x - 12\sin x}$

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{\sin x}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{tg}3x}{\text{tg}x}$

13. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0+} (\text{tg}x)^{\text{tg}2x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \text{ctg}x - 1}{x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} 2x\cdot \text{ctg}3x$

17. $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\text{tg}x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh}2x + \sin x}{2x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x\text{sh}x} - \text{ch}3x}{\text{sh}2x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

22. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln\frac{1}{x}}{x}$

23. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} e^{-x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0+} (\text{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$

26. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

28. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

30. $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2}$

32. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$, (a>0)

10.12. Végezzen függvényvizsgálatot és ábrázolja következő függvényeket:

a, $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 20x$

b, $f(x) = e^{-2x}\cdot(3x+4)$

c, $f(x) = \frac{6x}{x^2-1}$

d, $f(x) = \frac{4x^3-1}{x^2}$

e, $f(x) = x^2e^{2x}$

f, $f(x) = x\cdot\ln^2 x$

g, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

h, $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

i, $f(x)= x^2\cdot e^{-x}$

j, $f(x) = e^{2x-x^2}$

k, $f(x) = e^{4x^2}$

l, $f(x) = \ln(x^2-1)$

m , $f(x) = x\cdot\ln\frac{1}{x}$

n, $f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$

o, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

p, $f(x) = \frac{1}{x}e^{-x}$

r, $f(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$

s, $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

t, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

u, $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

v, $f(x) = x + e^{-x}$

10.13. Vizsgálja az alábbi függvények monotonitását és keresse meg a helyi szélsőértékeket:

a, $f(x)= x(\sin x-\cos x)+\sin x+\cos x$, $x\in[-\pi,\pi]$

b, $f(x) = (\sin x+\cos x)^2$, $x\in[-\pi,\pi]$

c, $f(x)= \sin(x^2-1)$, $x\in[-3,3]$

d, $f(x) = \sin(e^x)$, $x\in[-2,5/2]$

e, $f(x)= e^{\sin x}$, $x\in[-5,6]$

f, $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$

g, $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$

h, $f(x) = \sqrt{x}\cdot\ln x$

i, $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$

j, $f(x) = \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

k, $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$

l, $f(x) = xe^{-x}$

m, $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

n, $f(x) = \frac{10}{1+\sin^2 x}$

10.14. Vizsgálja az alábbi függvények monotonitását, konvexitását, keresse meg a helyi szélsőérték-helyeket és az inflexiós pontokat! Periodikusak-e a megadott függvények? Ha igen, akkor adja meg a periódust is!

a, $f(x)=\sin\frac{2x+5}{3}$

b, $f(x) = \sin^3 x$

c, $f(x)=(7+2\cos x)\sin x$

d, $f(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$

e, $f(x)= \sin^2 x$

f, $f(x)=\sin x+\cos^2 x$

g, $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$

h, $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

10.15. Határozza meg az alábbi függvények legkisebb és legnagyobb értékeit a megadott zárt intervallumban!

a, $f(x)=x^2-4x+6$, $x\in[-3;8]$

b, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in[0.2;3]$

c, $f(x)=|x^2-3x+2|$, $x\in[0.5;1.8]$

d, $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $x\in[-1;1]$

10.16 Hol maximális az alábbi függvények görbületének nagysága, és mennyi ez az érték:

a, $f(x) = \mathrm{sh}\, x$ b, $f(x) = x^2$ c, $f(x) = \ln x$ d, $f(x) = 1/x$

10.17. **GEOMETRIAI PROBLÉMÁK**

a. Írja fel az $f(x)=x-\frac{1}{x}$, függvény görbéjének az x tengellyel alkotott metszéspontjaiba húzot érintőinek egyenleteit.

b. Legyen $f(x)=x^3-x+1$. Határozza meg a függvény azon pontjainak koordinátáit, ahová húzott érintők párhuzamosak az $y = 2x -1$ egyenletű egyenessel.

c. Határozza meg az $f(x)=x^3-6x^2+1$, függvény azon érintőjének az egyenletét, amely merőleges a $12y = x + 12$ egyenletű egyenesre.

d. Mekkora területű háromszöget alkot a koordinátatengelyekkel az $xy(x)=c$ egyenletű hiperbola $x = a$ abszcisszájú pontjához húzott érintője?

e. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$ függvény azon pontjait köti össze, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az x tengellyel.

10.18. **SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK**

a. 200 m kerítés anyaggal egy téglalap alakú folyóparti területet akarunk bekeríteni úgy, hogy a folyó felőli oldalra nem teszünk kerítést. Mekkora a legnagyobb lekeríthető terület?

b. A 10 cm-es alkotójú kúpok közül melyiknek legnagyobb a térfogata?

c. Határozza meg az R sugarú gömbbe írható legnagyobb térfogatú hengert!

d. Az $x^2+3y^2=28$ egyenletű ellipszisnek adott két pontja: A=(5,1), B=(-4,2). Határozza meg az ellipszis azon C pontját, melyre az ABC háromszög területe maximális!

e. Egy háromszög egyik oldala 15 cm, a hozzá tartozó magasság 10 cm. Mekkorára kell megválasztani a másik két oldalt, hogy a háromszög kerülete minimális legyen?

f. Egy 5 cm sugarú félkörbe téglalapot írunk úgy, hogy a télalap egyik oldala illeszkedik a kör átmérőjére, két csúcsa pedig a körre. Határozza meg a legnagyobb területű beírható téglalapot!

g. Egy 6 cm sugarú, 15 cm magas egyenes körkúpból legfeljebb mekkora térfogatú (a kúppal közös szimmetriatengelyű) hengert lehet kifaragni?

h. Egy 10 cm sugarú félkörlemezből legfeljebb mekkora területű szimmetrikus trapéz alakú lemez vágható ki?

i. Egy R sugarú gömbből legfeljebb mekkora térfogatú kúp faragható ki?

j. Az $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ egyenletű ellipszisbe téglalapot írunk úgy, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak az ellipszis tengelyeivel. Határozza meg a legnagyobb területű beírható téglalapot!

k. Az 5 m^3 térfogatú, szabályos háromszög alapú egyenes hasábok közül melyiknek legkisebb a felszíne?

l. Határozza meg az $f(x)=\frac{1}{8}x^2$ parabola azon pontját, mely a (0,6) ponthoz a legközelebb van !

m. Egy háromszög kerülete 40 cm, az egyik oldala 15 cm. Mekkora legyen a másik két oldal, hogy a háromszög területe maximális legyen?

n. Egy 100 m^3-es víztároló medencét akarunk építeni. Milyenre kell választani a méreteit, hogy a megépítéséhez a legkevesebb anyagot kelljen felhasználni

o. Adott kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

p. Melyik a legnagyobb területű azon derékszögű háromszögek közül, amelynél az átfogó és az egyik befogó összege adott állandó érték?