9. Függvények

9.1. Ábrázolja a megadott függvényeket, és vizsgálja meg a függvények korlátosságát, monotonitását, konvexitását, paritását, előjelét, zérushelyeit, periodicitását és határozza meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyen értelmezhetők:

$x \to \sin x$	$x \to \cos x$	$x \to \mathrm{tg}\, x$	$x \to \mathrm{ctg}\, x$
$x \to \arcsin x$	$x \to \arccos x$	$x \to \mathrm{arctg}\, x$	$x \to \mathrm{arcctg}\, x$
$x \to \mathrm{sh}\, x$	$x \to \mathrm{ch}\, x$	$x \to \mathrm{th}\, x$	$x \to \mathrm{cth}\, x$
$x \to \mathrm{arsh}\, x$	$x \to \mathrm{arch}\, x$	$x \to \mathrm{arth}\, x$	$x \to \mathrm{arcth}\, x$
$x \to e^x$	$x \to 0{,}5^x$	$x \to x^3$	$x \to x^4$
$x \to \ln x$	$x \to \log_{0,5} x$	$x \to \sqrt{x}$	$x \to \sqrt[3]{x}$
$x \to 2^x$	$x \to e^{-x}$	$x \to \lvert x \rvert$	$x \to \lvert \sin x \rvert$
$x \to \log_2 x$	$x \to \sqrt{x^2}$	$x \to \frac{1}{x}$	$x \to \frac{1}{x^2}$

9.2. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

a, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{1+x}, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$

b, $f(x) = \begin{cases} \log_2 \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

c, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{1-x^2}, & \text{ha} \quad x \ge 2 \end{cases}$

d, $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

e, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$

f, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(2+x), & \text{ha} \quad -2 \le x < -1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{2}(1-x), & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

g, $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$

9.3. Ábrázolja síkbeli polár koordinátarendszerben a következő függvényeket:

a, $r(\varphi) = 5$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

b, $r(\varphi) = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

c, $r(\varphi) = 3(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

d, $r(\varphi) = \lvert \sin 4\varphi \rvert$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

e, $r(\varphi) = 2\cos 2\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

f, $r(\varphi) = \sin^3(\varphi/3)$, $\varphi \in [0, 3\pi]$

9.4. Ábrázolja a következő t→(x(t),y(t)) típusú vektorértékű függvényeket (síkgörbéket) a megadott halmazon :

a, $\begin{cases} x(t) = 3+\cos t \\ y(t) = 4+\sin t \end{cases}$ b, $\begin{cases} x(t) = -2+6t \\ y(t) = 1-5t \end{cases}$ c, $\begin{cases} x(t) = 2(t-\sin t) \\ y(t) = 2(1-\cos t) \end{cases}$

d, $\begin{cases} x(t) = t^2 - t + 1 \\ y(t) = t^2 + t + 1 \end{cases}$ e, $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{|t|} \end{cases}$ f, $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

9.5. Ábrázolja a következő t→(x(t),y(t),z(t)) típusú vektorértékű függvényeket (térgörbéket) a megadott halmazon :

a, $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t, \quad t\in[0,4\pi] \\ z(t) = 2t \end{cases}$ b, $\begin{cases} x(t) = 3t-2 \\ y(t) = t \\ z(t) = 2t+1 \end{cases}$ c, $\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = t^2 \end{cases}$

d, $\begin{cases} x(t) = 4 \\ y(t) = 3+3\cos t, \quad t\in[0,2\pi] \\ z(t) = 1+2\sin t \end{cases}$ e, $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos t}{t^2} \\ y(t) = \dfrac{\sin t}{t^2}, \quad t\in[0,4\pi] \\ z(t) = t \end{cases}$

9.6. Ábrázolja a következő (u,v)→(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) vektorértékű függvényeket (felületeket):

a, $\begin{cases} x(u,v) = 1+u+v \\ y(u,v) = 2u+v \\ z(u,v) = 3-u+2v \end{cases}$ b, $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u^2+v^2 \end{cases}$ c, $\begin{cases} x(u,v) = 1 \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \sin v \end{cases}$

9.7. Határozza meg a következő (u,v)→(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) vektorértékű függvények (felületeket) paramétervonalait:

a, $\begin{cases} x(u,v) = \cos u \cdot \cos v \\ y(u,v) = \cos u \cdot \sin v, \quad u\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right], v\in[0,2\pi] \\ z(u,v) = \sin u \end{cases}$ b, $\begin{cases} x(u,v) = \cos v \\ y(u,v) = \sin v \\ z(u,v) = u \end{cases}$

c, $\begin{cases} x(u,v) = (1+\cos u)\cdot\cos v \\ y(u,v) = (1+\cos u)\cdot\sin v, \quad u\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right], v\in[0,2\pi] \\ z(u,v) = \sin u \end{cases}$ d, $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = uv \end{cases}$

9.8. Határozza meg a következő kétváltozós függvények szintvonalait és a paramétervonalait:

a, $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ b, $f(x,y) = 4-x^2-y^2$ c, $f(x,y) = 3$

d, $f(x,y) = 2x-5y-1$ e, $f(x,y) = xy$ f, $f(x,y) = y$

g, $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$ h, $f(x,y) = \sin y$ i, $f(x,y) = |x+y|$

9.9. Határozza meg a következő háromváltozós függvények szintfelületeit:

a, $f(x,y,z) = x^2+y^2$

b, $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

c, $f(x,y,z) = x+2y+3z$

d, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

e, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

f, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2$

9.10. Határozza meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi függvények értemezhetők:

a, $x \to \dfrac{1}{x \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$

b, $x \to \dfrac{1-\lg x}{\lg(\sqrt{x}-2)}$

c, $x \to \lg(\cos x)$

d, $x \to \sqrt{\lg x}$

e, $x \to \ln(x^2-16)$

f, $x \to \sqrt{12x-12-3x^2}$

g, $x \to \arcsin\dfrac{3-x^2}{x^2+5x+6}$

h, $x \to \lg\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-10x+16}$

i, $x \to \lg(x^2-5x+4)$

j, $x \to \mathrm{arcth}\,(x^2-3)$

k, $x \to \lg\left(\ln\dfrac{2x-10}{3x+27}\right)$

l, $x \to \arcsin\dfrac{3-2x}{5+x}$

m, $x \to \lg(\sin^2 x)$

n, $x \to \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

o, $x \to \mathrm{arth}\dfrac{x+2}{x+3}$

p, $x \to \mathrm{arth}\sqrt{\dfrac{2^x}{1-2^x}}$

q, $x \to \mathrm{arcth}\,(\log_3 x)$

r, $x \to \arcsin\sqrt{x^2+3x-4}$

9.11. Határozza meg az $\mathbf{R}^2$ halmaz azon legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvények értelmezhetők:

a, $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

b, $f(x,y) = \ln(x+y+1)$

c, $f(x,y) = \arcsin(x-y) \cdot \arccos(x+y)$

9.12. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét a trigonometrikus és a hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságok felhasználásával:

a, sh (arsh2 - arch3)

b, sin (2arctg5)

c, cos (arctg0,5 - arcsin0,7)

d, sin (arch1)

e, ch (ln2)

f, th (arsh0,6 + arch1,2)

g, cos (arcsin (-1/2))

h, $\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mathrm{arch}5}{2}\right)$

i, $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\mathrm{arch}2{,}3}{2}\right)$

j, tg (arctg1+arctg2)

k, arcsin x + arccos x

9.13. Az azonosságok felhasználásával hozza olyan alakra az alábbi kifejezéseket, amelyben nem szerepelnek trigonometrikus ill. hiperbolikus függvények,:

a, $\operatorname{sh}(\ln x^2)$ b, $\cos(2\arcsin x)$ c, $\operatorname{th}(2\operatorname{arch} x)$

d, $\sin(\operatorname{arctg} x - \arcsin x)$ e, $\operatorname{sh}(\operatorname{arth} x)$ f, $e^{\operatorname{arth} x}$

g, $e^{\operatorname{arch} x}$

9.14. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a, $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$ b, $-\sin x = -\frac{1}{2}$ c, $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

d, $\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ f, $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g, $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ h, $\operatorname{ctg}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ i, $\sin 2x = \cos x$

j, $\sin x = \cos x$

9.15. Határozza meg a következő függvények inverzét a megadott intervallumon:

a, $f(x) = 1 + \log_3(x + 2)$, $x \in]-2,\infty[$

b, $f(x) = \log_2\frac{6}{2x+1}$, $x \in [-1/2,\infty[$

c, $f(x) = \sqrt[3]{x^2+3}$, $x \in]0,\infty[$

d, $f(x) = \operatorname{arch}\sqrt[3]{3x-2}$, $x \in [1,\infty[$

e, $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$, $x \in [2,\infty[$

f, $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x^2\right)$, $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right[$

g, $f(x) = \operatorname{th}\frac{3x-4}{5} + 3$, $x \in \mathbf{R}$

h, $f(x) = \ln\frac{3+x}{3-x}$, $x \in]-3,3[$

i, $f(x) = 3 - 10^x$, $x \in \mathbf{R}$

j, $f(x) = 2 \cdot \log_{0,5}(4x+6) - 8$, $x \in]-3/2,\infty[$

k, $f(x) = 6e^{\frac{2}{3x+5}} + 4$, $x \in]5,\infty[$

l, $f(x) = \operatorname{arch}\sqrt{x-1}$, $x \in [2,\infty[$

m, $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(x^2+4)$, $x \in [0,\infty[$

n, $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$, $x \in [-1/4,\infty[$

o, $f(x)=\arccos(0,5-2x)+1$, $x \in \left[\frac{1}{4} - \frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\right]$

p, $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{3}{2x-1} + 5$, $x \in [2,\infty[$

q, $f(x) = 3e^{3x+1}$, $x \in \mathbf{R}$

9.16. Határozza meg a következő polinomok zérushelyeit, előjelét és a határértékét a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben, továbbá a kapott eredmények felhasználásával vázolja a függvényeket ! (Egyes polinomoknál néhány gyök meg van adva, ezek a számolásban felhasználhatók):

polinom	ismert gyök(ök)
a, $P(x) = -3x^2 + 6x + 105$	
b, $P(x) = 4x^2 + 12x + 9$	
c, $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$	
d, $P(x) = -6x^5 + 36x^4 + 240x^3$	
e, $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$	
f, $P(x) = x^6 - 19x^3 - 216$	
g, $P(x) = -x^5 + 11x^4 + 22x^3 - 128x^2 + 96x$	$x_1 = 1,\ x_2 = 2$
h, $P(x) = x^4 + x^3 - 65x^2 - 9x + 504$	$x_1 = 3,\ x_2 = -3$
i, $P(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 16x + 5$	$x_1 = -5$
j, $P(x) = 3x^4 - 30x^3 - 32x^2 - 10x - 11$	
k, $P(x) = 2x^5 + 2x^4 - 75x^3 + 69x^2 + 37x - 35$	

9.17. Határozza meg a következő racionális törtfüggvények zéróhelyeit, szakadási helyeit és a határétéket a $(+\infty)$-ben, a $(-\infty)$-ben és a szakadási helyek jobb és bal oldalán, továbbá a kapott eredmények felhasználásával vázolja a függvényeket !

a, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 3}$

b, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$

c, $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$

d, $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 - x^4}$

e, $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^3 + 8x^2}{x^2 - 2x}$

f, $f(x) = x \cdot \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1}$

g, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$

h, $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 8x^2}$

i, $f(x) = \dfrac{3x - 6}{x^2 - 6x + 9}$

j, $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{1 - x}$

k, $f(x) = \dfrac{4x^3 - 2x^2 - 30x}{x^3 - 9x}$

9.18. A paraméterek mely értéke esetén folytonosak az alábbi függvények:

a,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1+x^3} - \dfrac{1}{1+x}, & \text{ha} \quad x < -1 \\ p, & \text{ha} \quad x = -1 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1}, & \text{ha} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

b,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & \text{ha} \quad x < 0 \\ cx + d, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x + 8}, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

c,

g,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7x + 2} - \sqrt{6x + 4}}{x - 2}, & \text{ha} \quad x \ge \dfrac{2}{7}, x \ne 2 \\ p, & \text{ha} \quad x = 2 \end{cases}$$

h,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha} \quad x < 0 \\ p + x, & \text{ha} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

i,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}, & \text{ha} \quad x\ge -1, x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

d,

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{ha} \quad x>-1, x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

e,

$$f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

f,

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\ln x, & \text{ha} \quad x>0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{tg2x}{x}, & \text{ha} \quad x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

j,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x^2}}, & \text{ha} \quad x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

k,

$$f(x)=\begin{cases}x^x, & \text{ha} \quad x>0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

9.19. Létezik-e az alábbi függvényeknek a megadott pontokban határértéke, bal oldali határértéke ill. jobb oldali határértéke? Ha létezik, adja is meg ezeket az értékeket! Folytonosak-e a függvények a megadott pontokban?

a,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{ha} \quad x<0\\ 0, & \text{ha} \quad x=0\\ 1, & \text{ha} \quad x>0\end{cases} \qquad \begin{matrix}x_1=-1\\ x_2=0\\ x_3=1\end{matrix}$$

b,

$$f(x)=x^{|\mathrm{sgn} x|} \qquad \begin{matrix}x_1=-1\\ x_2=0\\ x_3=1\end{matrix}$$

c,

$$f(x)=\frac{1}{0{,}5+\mathrm{sgn}(x+3)} \qquad \begin{matrix}x_1=-3\\ x_2=0\\ x_3=3\end{matrix}$$

g,

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x<-1\\ 1, & \text{ha} \quad x=-1\\ -2x, & \text{ha} \quad -1<x\le 0\\ \sqrt{x}, & \text{ha} \quad 0<x<1\\ \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\ge 1\end{cases} \qquad \begin{matrix}x_1=-2\\ x_2=-1\\ x_3=0\\ x_4=1\\ x_5=2\end{matrix}$$

h,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & \text{ha} \quad x\ne 1\\ 3, & \text{ha} \quad x=1\end{cases} \qquad \begin{matrix}x_1=-2\\ x_2=1\end{matrix}$$

i,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+1)tgx}{x^3+x}-\dfrac{x^2-x}{x^2+x}, & \text{ha} \quad x\ne 0\\ 2, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

$x_1=0$

d,

$$f(x)=x^{\mathrm{sgn} x}, \qquad \begin{matrix}x_1=-1\\ x_2=0\\ x_3=1\end{matrix}$$

e,

$$f(x)=[x] \qquad \begin{matrix}x_1=1\\ x_2=1{,}5\end{matrix}$$

f,

$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x+2)}{(x+1)(x+2)^2} \qquad \begin{matrix}x_1=-2\\ x_2=-1\\ x_3=0\end{matrix}$$

m,

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{ha} \quad x<0\\ 1, & \text{ha} \quad x=1\\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha} \quad x>0\end{cases} \qquad \begin{matrix}x_1=-\pi\\ x_2=0\\ x_3=\pi\end{matrix}$$

n,

$$f(x)=\begin{cases}\log_{1/2} x, & \text{ha} \quad 0<x<1\\ \log_2 x, & \text{ha} \quad 1\le x\end{cases} \qquad \begin{matrix}x_1=0\\ x_2=1\\ x_3=2\end{matrix}$$

o,

$$f(x)=\begin{cases}7x-2, & \text{ha} \quad x\ge 2\\ 3x+5, & \text{ha} \quad x<2\end{cases} \qquad x_1=2$$

j,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{ha} \quad x\neq 0\\ 1, & \text{ha} \quad x=0\end{cases} \qquad x_1=0$$

p,

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{ha} \quad x\geq 2\\ 2x-1, & \text{ha} \quad 1<x<2\\ x-1, & \text{ha} \quad x\leq 1\end{cases} \qquad \begin{matrix}x_1=1\\ x_2=2\end{matrix}$$

k,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2+x^2\mathrm{tg}x-x\mathrm{tg}x}{(x-1)\mathrm{tg}x}, & \text{ha} \quad x\neq 1\\ 6, & \text{ha} \quad x=1\end{cases} \qquad x_1=1$$

l, $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-15+x^2\sin 3x-3x\sin 3x}{(x-3)\sin 3x}, & \text{ha} \quad x\neq 3\\ 6, & \text{ha} \quad x=3\end{cases}, \qquad x_1=3$$

9.20. Definiálja az alábbi függvényeket a megadott szakadási helyeken úgy, hogy ezeken a helyeken folytonossá váljanak, amennyiben ez lehetséges:

a, $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$, x=0

b, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$, x=0

c, $f(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}x, & \text{ha} \quad 0<x<\pi/2\\ \mathrm{ctg}x, & \text{ha} \quad \pi/2<x<\pi\end{cases}$, x=$\dfrac{\pi}{2}$

d, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}$, x=0

e, $f(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}x, & \text{ha} \quad 0<x<\pi/4\\ \mathrm{ctg}x, & \text{ha} \quad \pi/4<x<\pi/2\end{cases}$, x=$\dfrac{\pi}{4}$

9.21. A $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+10}{4x^3+10x-2}$

b, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^3+x^2-x}{7x^3+15}$

c, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^2}{x^3}$

d, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{-x+2}$

e, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x^3}{10x+x^2}$

f, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+10x^3-x^2+5}{x^3-3x^4+1}$

g, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

h, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-1}{10}$

i, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{x}{x^2-2x+3}\right)$

j, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-4x^3}{3+6x^3}\cdot\dfrac{x}{2x+5}\right)$

k, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{x^4+x^2}+x}{-2x^2+4x-3}$

l, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{2+\sqrt[3]{8x^5+1}}$

m, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2+x^6+2x^2}}$

n, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[5]{x^4+6x+2}\right)$

o, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$

p, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

q, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

r, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

s, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x\right)$ t, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

u, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{2x}}$ ü, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^3+6}}{\sqrt[3]{x^2+3x-2}}$

v, $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{5x-8x^4}{(x^2+2)(3x^2-5)}}$ w, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^5(18x+17)^{15}}{(6x+5)^{20}}$

x, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^4-4}-x^2)}$

9.22. A $\lim\limits_{x\to\infty}q^x=0$ (0<q<1) határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x+1}}{3^x+4^{x-1}}$ b, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10^x+10^2}{5^x+2^x+10^5}$

c, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{2x+5}-4\cdot5^{x+1}}{2^{1+3x}+9^{x+2}}$ d, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6\cdot7^x+7^{-x}}{9\cdot7^x-7^{-x}}$

9.23. A $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$ és a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$ ($k\in\mathbf{R}$) határértékek ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$ b, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3-x}$

c, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+5}\right)^{6x+7}$ d, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+7}\right)^{\frac{x}{2}+5}$

e, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{3x-6}\right)^{x+2}$ f, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+3}\right)^{x^2+5}$

g, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^3+7}$ h, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2-x+1}\right)^{3x+1}$

i, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x}{6x+1}\right)^{\frac{-2x+2}{4x}}$ j, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+x^2}{1+x^2}\right)^x$

k, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}+1}\right)^{\sqrt{x}}$ l, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+2}{\sqrt{x^3}}\right)^x$

9.24. Számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-5x^2+7x+1}{2x^2-9x-5}$ b, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

c, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$ d, $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

e, $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^4-10}$ f, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$

g, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+10x-5}$

h, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$

i, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4-2x^2-3}$

j, $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{-x^2+2x+15}$

k, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x}}$

l, $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

m, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^3}-1}{7x^3}$

n, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}$

o, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6}$

p, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

q, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

r, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+4x+8}}$

s, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

t, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x^2}}{7x}$

9.25. A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 4x}{x^2}$

b, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}7x}{\mathrm{tg}9x}$

c, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 3x}{x}$

d, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\mathrm{tg}x-3\sin x}{5x^3}$

e, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

f, $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$

g, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

h, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin^2 x}{\cos 2x\cdot\sin^2 2x}$

i, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+2\sin x}{3x\cos x}$

j, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{3x}$

k, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x+\sin x}}$

l, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}{\sin x}$

m, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{\pi}{x}\right)^2}$

n, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

o, $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$

p, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\mathrm{tg}2x}{x^2}$

q, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{1}{x}$

9.26. A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

b, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{x}{3}}-1}{4x}$

c, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{5^x-1}$

d, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{3x}-1}{3^{4x}-1}$ e, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x}-5^{x}}{2^{x}-4^{x}}$ f, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^{x}}{4^{x}-3^{x}}$

g, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}+3x}{6^{5x}-1}$ h, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{2x-2}-4}{4x^{2}-8x}$

9.27. Számítsa ki a következő határértékeket:

1, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

2, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+5x)$

3, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}\sin\dfrac{1}{x}$

4, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^{2}x-3\sin x+1}{4\sin^{2}x+4\sin x-3}$

5, $\lim\limits_{x\to 0}(2+\mathrm{tg}^{2}x)^{3\mathrm{ctg}^{2}x}$

6, $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}\,x}$

7, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\mathrm{ctg}^{3}x}{2-\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}^{3}x}$

8, $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$

9, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}a}{x-a}$

10, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

11, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^{2}x}$

12, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^{2}}}{1-\cos x}$

13, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}$

14, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}$

15, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

16, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

17, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{x^{3}-x}-\dfrac{e^{2x}-1}{2x^{2}+2x}$

18, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^{2}}$

19, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^{2}-x+1}{2x^{2}+x+1}\right)^{\frac{x^{2}}{1-x}}$

20, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2\pi x}{3x+1}\right)$

21, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\mathrm{tg}2x}$

22, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

23, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-2}\right)^{x^{4}}$

24, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+2x-1}{2x^{2}-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$

25, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

26, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

27, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^{2}\right)^{\mathrm{ctg}^{2}x}$

28, $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\mathrm{ctg}\pi x}$

29, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

30, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^{3}x}}$

31, $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

32, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$

33, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{tg}x\right)^{\mathrm{tg}2x}$

34, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$

35, $\lim_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln x]$

36, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

37, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

38, $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$

39, $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$

40, $\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$