7. Valós számsorozatok

7.1. Vizsgálja meg az alábbi sorozatok korlátosságát, monotonitását. Adja meg a torlódási pontokat és a határértéket, ha van:

$a_n = \dfrac{100}{\sqrt{n}}$ $\quad b_n = \dfrac{1}{n}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$ $\quad c_n = \sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$

$d_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$ $\quad e_n = \dfrac{1}{0{,}1^n}$ $\quad f_n = \dfrac{10^n}{n!}$

$g_n = \dfrac{n}{n!}$ $\quad h_n = n^{(-1)^n}$ $\quad i_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

$j_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ $\quad k_n = \dfrac{n}{2^n}$ $\quad l_n = \dfrac{2n}{n+1}$

$m_n = 1 + 10^{-n}$ $\quad o_n = (-1)^n$ $\quad p_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$

$g_n = (-1)^{n-1}(2 + \dfrac{1}{n})$ $\quad r_n = \cos\dfrac{2\pi}{n}$ $\quad s_n = n\cdot(1+(-1)^n)$

$t_n = \sin\dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{1}{n}$ $\quad u_n = \begin{cases} n, \text{ ha } n \le 1000 \\ \dfrac{1}{n}, \text{ ha } n > 1000 \end{cases}$ $\quad v_n = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{n}, \text{ ha } n \text{ páros} \\ -1, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

$x_n = \dfrac{4n+3}{2n-1}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}$ $\quad y_n = (-1)^n\dfrac{n^2+2}{4n^2+n}$ $\quad w_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

$ü_n = \sin\dfrac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}$ $\quad z_n = 1 + 2\cdot(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ $\quad zs_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}\sin(n!)}{n+1}$

7.2. Bizonyítsa be a határérték definíciója alapján a következő állításokat:

a, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2} = 0$ $\quad$ b, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = 0$ $\quad$ c, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = \infty$

d, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{2\pi}{n} = 0$ $\quad$ e, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3} = 2$ $\quad$ f, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{3n^2+n} = \dfrac{2}{3}$

g, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{4n+2} = \infty$ $\quad$ h, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n 0{,}99^n = 0$ $\quad$ i, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2+1} + 3 = \infty$

j, $\lim\limits_{n\to\infty}(10^3 - 5^{n-3}) = -\infty$

7.3. Határozza meg az alábbi sorozatok legkisebb és legnagyobb elemét, amennyiben létezik:

$a_n = n^2 - 9n - 100$ $\quad b_n = n^2 - 7n - 8$ $\quad c_n = n + \dfrac{25}{n}$

$d_n = 3 + \sqrt{n} + \dfrac{3}{\sqrt{n}}$ $\quad e_n = \dfrac{7^n}{n!}$ $\quad f_n = 2 - \sqrt{n} - \dfrac{6}{\sqrt{n}}$

$g_n = 20+19n-n^2$ $\quad h_n = 2 - n - \dfrac{9}{n}$ $\quad i_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

$j_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100+\sqrt{n}}$ $\quad k_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ $\quad l_n = \dfrac{n}{1+n}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$

$p_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$ $\quad q_n = \sin^n\dfrac{n\pi}{6}$

7.4. Hányadik elemtől kezdve térnek el az $a_n = \dfrac{3n+5}{4n-3}$ sorozat elemei 10^{-3}-nál kevesebbel a sorozat határértékétől?

7.5. Hányadik elemtől kezdve térnek el az $a_n = \dfrac{10}{\sqrt[3]{n^2+30}}$ sorozat elemei $2\cdot10^{-2}$-nál kevesebbel a sorozat határértékétől?

7.6. Határozza meg azt a küszöbindexet, melytől kezdve az $a_n = n + \dfrac{20}{n}$ sorozat elemei nagyobbak 2500-nál !

7.7. A $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ határérték ismeretében számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

$a_n = \dfrac{3n^2-5n+10}{4n^3+10n-2}$ $\qquad b_n = \dfrac{-2n^3+n^2-n}{7n^3+15}$

$c_n = \dfrac{2-n^2}{n^3}$ $\qquad d_n = \dfrac{3n^2}{-n+2}$

$e_n = \dfrac{n^2-4n^3}{10n+n^2}$ $\qquad f_n = \dfrac{6n^4+10n^3-n^2+5}{n^3-3n^4+1}$

$g_n = \dfrac{n^3}{2n^2-1} - \dfrac{n^2}{2n+1}$ $\qquad h_n = \dfrac{n^2+6n-1}{10}$

$i_n = \dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{n}{n^2-2n+3}$ $\qquad j_n = \dfrac{-4n^3}{3+6n^3}\cdot\dfrac{n}{2n+5}$

$k_n = \dfrac{3n^2+\sqrt{n^4+n^2}+n}{-2n^2+4n-3}$ $\qquad l_n = \dfrac{1-n}{2+\sqrt[3]{8n^5+1}}$

$m_n = \dfrac{-4n^2+\sqrt[3]{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{(n-1)^2+8n^6}+2n^2}$ $\qquad o_n = \sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[5]{n^4+6n+2}$

$ö_n = \sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}$ $\qquad p_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

$q_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$ $\qquad r_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$

$s_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n} - \dfrac{n}{2}$ $\qquad t_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

$u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n}}$ $\qquad ü_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^3+6}}{\sqrt[3]{n^2+3n-2}}$

$v_n = \sqrt[3]{\dfrac{5n-8n^4}{(n^2+2)(3n^2-5)}}$ $\qquad w_n = \dfrac{(2n+3)^5(18n+17)^{15}}{(6n+5)^{20}}$

$x_n = \dfrac{4}{n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n^4-4}-n^2)}$ $\qquad y_n = \sqrt{9n^2+2n-1} - 3n$

$z_n = \dfrac{\binom{n}{3}-\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}-\binom{n}{4}}$ $\qquad zs_n = \left(\dfrac{27n^4+18n^3-23n^2+72n+6}{-8n^4+n^3+81n^2+123}\right)^{\frac{2}{3}}$

7.8. A $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ha} |q| < 1 \\ 1, \text{ha}\, q = 1 \\ +\infty, \text{ha}\, q > 1 \end{cases}$ határérték ismeretében számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben létezik:

a, $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}}$

b, $a_n = \dfrac{3^{2n+5} - 4\cdot 5^{n+1}}{(-2)^{1+3n} + 9^{n+2}}$

c, $a_n = \dfrac{2^{n+3} + (-6)^{n+2}}{6^{n+1} + 5^{n-2}}$

d, $a_n = \dfrac{5^{2n-3} - 4\cdot 6^{n+10}}{2^{1+4n} + 7^{n+1}}$

e, $a_n = \dfrac{6\cdot 7^n + 7^{-n}}{9\cdot 7^n - 7^{-n}}$

7.9. A $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ határérték ismeretében számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

a, $a_n = \sqrt[n+3]{n+1}$

b, $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

c, $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{10^n}{4n+1}}$

7.10. A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ $(k\in R)$ határérték ismeretében számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

a, $a_n = \left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n$

b, $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n+5}\right)^{6n+7}$

c, $a_n = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3+7}$

d, $a_n = \left(\dfrac{1-n^2}{1+n^2}\right)^n$

e, $a_n = \left(1-\dfrac{k}{n}\right)^n$

f, $a_n = \left(\dfrac{2n+4}{3n-5}\right)^{n+2}$

g, $a_n = \left(\dfrac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1}$

h, $a_n = \left(\dfrac{n+1}{\sqrt{n}+1}\right)^{\sqrt{n}}$

i, $a_n = \left(\dfrac{2n-3}{2n+7}\right)^{\frac{n}{2}+5}$

j, $a_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5}$

k, $a_n = \left(\dfrac{6n}{6n+1}\right)^{\frac{-2n+2}{4n}}$

l, $a_n = \left(\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+2}{\sqrt{n^3}}\right)^n$

7.11. A $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad a > 1 \\ +\infty, & \text{ha} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$ (0<k∈**R**, 0<a∈**R**) határérték ismeretében számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

a, $a_n = \dfrac{n\cdot 3^{2n} - n^3}{6n(9^n - 5^n)}$

b, $a_n = \dfrac{10^n + (10n)^2}{5^n + 2^n + (10n)^5}$

7.12. A rendőr tétel alkalmazásával határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

a, $a_n = \dfrac{2n + \sin(2n)}{3n + \cos(3n)}$

b, $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

c, $a_n = \dfrac{3\sin n + 7\cos\frac{n}{2} + 6n^2}{1-2n^2}$

d, $a_n = \dfrac{4^n + 8\cdot(-1)^n}{5\cdot 2^n + 4^{n-2}}$

e, $a_n = \dfrac{-2\sin(n^2+n) + 3n^2}{5n^2+3}$

f, $a_n = \dfrac{(-1)^n\cos(6n) - 5n}{3n-2}$