6. Komplex számok

6.1. Ábrázolja a komplex számsíkon a következő halmazokat. Mely halmazok zártak, melyek nyíltak?

a, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 2 \}$

b, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1 \}$

c, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z-1-3i| \leq 2 \}$

d, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}((1+i)z) < 1 \}$

e, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid 3/2 < |i-3z-1| \leq 4 \}$

f, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(5/4 - z) = |z - 3/4| \}$

g, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid -2 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1 \}$

h, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2 \}$

i, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z^2) \leq 2 \}$

j, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z-1| \leq |z+4| \}$

k, $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid 1/2 < \mathrm{Re}(1/z) \leq 1 \}$

6.2. Adja meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját:

a, $z = 1$
b, $z = -8$
c, $z = i$
d, $z = -2i$
e, $z = 1+i$
f, $z = -2+2i$
g, $z = -3-3i$
h, $z = \sqrt{3}-i$
i, $z = 2+i$
j, $z = -1-2i$
k, $z = 3+4i$
l, $z = -2+5i$
m, $z = \cos\varphi - i\sin\varphi$
n, $z = -\cos\varphi + i\sin\varphi$
o, $z = -\cos\varphi - i\sin\varphi$

6.3. Adja meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:

a, $z = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

b, $z = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{6}\right)$

c, $z = \cos 0 + i \cdot \sin 0$

d, $z = 10\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{3}\right)$

6.4 Adja meg az alábbi komplex számok exponenciális alakját:

a, $z = 4$
b, $z = -i$
c, $z = 2i$
d, $z = \sqrt{3}-i$
e, $z = -\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$

6.5. Adja meg a következő kifejezések értékét algebrai vagy trigonometrikus alakban:

a, i^{18}

b, i^{211}

c, $\dfrac{(2-i)^2(-1+2i)}{3-4i}$

d, $\left(\dfrac{1+2i}{3-i}\right)^4$

e, $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

f, $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}\,i-1}\right)^{12}$

g, $\sqrt[6]{\dfrac{3+i}{2-4i}}$

h, $\sqrt[5]{i\dfrac{2-i}{3+4i}}$

j, $\sqrt[5]{1+2i}$

k, $\sqrt[3]{(1+i)(-2+5i)}$

l, $\sqrt[8]{1}$

m, $\sqrt{-64}$

n, $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{(2+i)^3}}$

o, $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

6.6. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán és ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon:

a, $z^3 = 1$	j, $z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0$
b, $5z^3 + 5z^2 + z + 1 = 0$	k, $z^4 - z^2 + 1 = 0$
c, $(2 + i)^3 z^4 + 4 = 0$	l, $z^6 - z^3 + 1 = 0$
d, $z^2 - (3 + 2i)z + 1 + 3i = 0$	m, $z^5 + 1 + i = 0$
e, $z^3(z - 3) - 3 + z = 0$	n, $z^3 - i^2 + i - 1 = 0$
f, $z^4 + i^3 - i^2 + i = 0$	o, $z^3 - 8i = 0$
g, $(z^3 - \sqrt{3} - i)(z^2 + 16) = 0$	p, $z^2 + z + 1 = 0$
h, $\sqrt[3]{z - i + 1} + i = \frac{1}{2 + i}$	q, $\sqrt{\frac{1}{x}} = (1 + i)(2 - i)$

6.7. Bontsa fel elsőfokú tényezők szorzatára az alábbi komplex polinomokat:

$P(z) = z^3 + 2i^2 + 3$	$Q(z) = z^2 + i$	$R(z) = z^3 + 3i^3 - 5i$
$S(z) = z^3 + z^2 + z$	$T(z) = z^4 - 5z^3 + 12z^2$	$K(z) = z^4 + 1$
$L(z) = z^6 + 64$	$M(z) = z^4 + z^2 + 1$	

6.8. Bontsa szorzatra az alábbi valós polinomokat:

$P(x) = x^4 + 1$	$Q(x) = x^4 - 5x^3 + 12x^2$	$R(x) = x^6 + 64$
$S(x) = x^3 + x^2 + x$	$T(x) = x^4 + x^2 + 1$	

6.9. Adja meg az alábbi halmazok pontos alsó és pontos felső korlátját, amennyiben létezik:

a, $A = \{ |z| : |z-1-i| < 1 \}$ b, $A = \{ z \cdot \bar{z} : |Re(z)| \leq 2, |Im(z)| \leq 2 \}$

6.10. Korlátosak-e az alábbi halmazok:

a, $A = \{ z \in \mathbf{C} : z \cdot \bar{z} = 9 \}$
b, $A = \{ z \in \mathbf{C} : Re(z) = Im(z) \}$
c, $A = \{ z \in \mathbf{C} : z^2 = z \}$
d, $A = \{ z \in \mathbf{C} : |Re(z) - Im(z)| < 3 \}$
e, $A = \{ z \in \mathbf{C} : Re(z) = z \}$
f, $A = \{ z \in \mathbf{C} : |Re(z)| + |Im(z)| = 2 \}$

6.11. Határozza meg az alábbi halmazok számosságát:

a, $A = \{ z \in \mathbf{C} : z^5 = 1 \}$
b, $A = \{ z \in \mathbf{C} : Re(z) = 3, |Im(z)| = 4 \}$
c, $A = \{ z \in \mathbf{C} : Re(z) = 3, |Im(z)| < 4 \}$
d, $A = \{ z \in \mathbf{C} : 0 \leq Re(z) \leq 2, Im(z) \in \{1,2,3\} \}$
e, $A = \{ z \in \mathbf{C} : Re(z) \in \mathbf{N}, Imz \in \mathbf{N} \}$
f, $A = \mathbf{C} \cap \mathbf{R} \cap \{ xi : x \in \mathbf{R} \}$
g, $A = \{ z \in \mathbf{C} : Re(z) \in \{2,4,6\}, Im(z) \in \{1,2,3\} \}$