

3. Halmazok

3.1. Sorolja fel a következő halmazok elemeit:

- a, $A = \{ z \in \mathbb{Z} \mid 5 > |z^2 - 10| \}$
- b, $A = \{ z \in \mathbb{Z} \mid z^2 + 200 < 30z \}$
- c, $A = \{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n + 2m < 7, n + m < 5 \}$
- d, $A = \{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid 7 < n < 11, |n-m| < 3 \}$
- e, $A = \{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid (n-3)^2 + (m-1)^2 < 4 \}$
- f, $A = \{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid |n+m| + |n-m| < 6 \}$

3.2. Ábrázolja a számegeyenesen a következő halmazokat:

- a, $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| x + \frac{1}{x} \right| > 2 \right\}$
- b, $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 9x - 36}{(x^2 + 3x - 10)(x - 11)} \leq 0 \right\}$
- c, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \log_2 x - 3 \cdot \log_x 32 \leq 2 \}$
- d, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \lg(x-2) + \lg(27-x) > 2 \}$
- e, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x+3| - |5-2x| > 2 \}$
- f, $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}, -\pi \leq x \leq \pi \right\}$
- g, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{tg} x \leq 1, -\pi \leq x \leq \pi \}$
- h, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 5x^2 + 4 < 0 \}$
- i, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 - x^2 > 3 \}$
- j, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < |2x-3| \}$
- k, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| > |x-1| \}$
- l, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin x \leq \cos x, -\pi \leq x \leq \pi \}$

3.3. Ábrázolja a sík következő részhalmazait:

- a, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + (y+1)^2 \leq 4 \}$
- b, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < y < 3 \}$
- c, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1 \}$
- d, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 1 \}$
- e, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 \}$
- f, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \leq 2 \}$
- g, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y+4| < 2, |x-1| < 1 \}$
- e, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x+y \geq 0 \}$
- f, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9, (x-2)^2 + (y-4)^2 \leq 4 \}$
- g, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, |x-y| \leq 1/3 \}$
- h, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \}$
- i, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1/x \}$
- j, $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/4, \operatorname{tg} x \leq y \leq 1 \}$

3.4. Ábrázolja a tér következő részhalmazait:

- a, $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 4 \}$
- b, $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 9, \}$
- c, $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| \leq 2 \}$
- d, $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 5, |xy| \leq 1 \}$
- e, $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 5 \}$
- f, $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \}$

$$\begin{aligned}
\text{g, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=3, |z| \leq 10, |x| \leq 10 \} \\
\text{h, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, |z| \leq 8 \} \\
\text{i, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy, \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 9 \} \\
\text{j, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi \} \\
\text{k, } A &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 \right\}
\end{aligned}$$

3.5. Legyen $A = \{ z \in \mathbb{Z} \mid 3 < |z-5| < 10 \}$, $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10 \}$, $C = \{ -6, -1, 8, 9, 10, 15, 19 \}$,
 $D = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páratlan}, 5 < n \leq 15 \}$, $E = \emptyset$
Adja meg az alábbi halmazok elemeit:

a, $A \cap B$	g, $(A \times B) \cap (B \times A)$
b, $B \cap D$	h, $(C \setminus (D \cup A)) \times (D \setminus (A \cup B))$
c, $C \setminus (A \cap D)$	i, $(A \times (C \setminus D)) \cap (C \times B)$
d, $(B \cap E) \cup C$	j, $B \setminus E$
e, $B \cap (C \setminus D)$	k, $B \setminus C$
f, $D \cup C$	l, $D \setminus A$

3.6. Legyen $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3 \}$, $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3 \}$
 $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2 \}$, $E = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \}$, $F = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \}$
Ábrázolja a számegyenesen az alábbi halmazokat:

a, $A \cap B$	f, $(A \setminus B) \cup (F \setminus C)$
b, $A \cap C$	g, $(E \setminus F) \cap (C \setminus D)$
c, $C \setminus A$	h, $(D \setminus F) \cup (E \cap A)$
d, $A \setminus E$	j, $D \cap E \cap F$
e, $E \setminus A$	

3.7. Ábrázolja a sík következő részhalmazait:

$$\begin{aligned}
\text{a, } A &= \{1,2\} \times \{1,3\} \\
\text{b, } A &= \{1,2\} \times [1,3] \\
\text{c, } A &= [1,2] \times \{1,3\} \\
\text{d, } A &= [1,2] \times [1,3] \\
\text{e, } A &= ([-2,-1] \cup [1,2]) \times ([-2,1] \cap [-1,2]) \\
\text{f, } A &= ([0,4] \times \{2,4\}) \cap ([3,5] \times \mathbb{R}) \\
\text{g, } A &= ([1,4] \times [1,4]) \setminus ([3,7] \times [3,7]) \\
\text{h, } A &= ([-1,1] \times \mathbb{R}) \setminus \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x \} \\
\text{i, } A &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\} \setminus \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \} \\
\text{j, } A &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)(x-1) \leq y \} \cap \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)(x+1) \geq y \}
\end{aligned}$$

3.8. Ábrázolja a tér következő részhalmazait:

$$\begin{aligned}
\text{a, } A &= \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \\
\text{b, } A &= \{0,1\} \times \{0,1\} \times [0,1] \\
\text{c, } A &= \{0,1\} \times [0,1] \times [0,1] \\
\text{d, } A &= [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \\
\text{e, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \} \cap \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq x \} \\
\text{f, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2 - 1 \} \cap \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq x^2 + y^2 + 1 \} \\
\text{g, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 3 \} \cup \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, |y| \leq 3 \} \\
\text{h, } A &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 3 \} \setminus \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, |z| \leq 1 \}
\end{aligned}$$

3.9. Legyen $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \}$, $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = cx + d \}$, ahol a,b,c,d valós paraméterek. A paraméterek mely értékei esetén teljesülnek a következő állítások:

$$a, A \setminus B = A \quad b, A \setminus B = \emptyset \quad c, A \cap B = \{(0,0)\} \quad d, \{(1,0), (0,1)\} \subseteq A \cap B$$

3.10. Legyen $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r \}$, $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 \leq 9 \}$, r,a valós paraméterek, $r > 0$. A paraméterek mely értékei esetén teljesülnek a következő állítások:

$$a, B \setminus A = \emptyset \quad b, A \cap B \neq \emptyset \quad c, \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \} \subseteq A \setminus B \\ d, (0,0) \in A \cap B \quad e, (0,3) \in B \setminus A \quad f, A \cup B \subseteq [2,8] \times [-4,4]$$

3.11. Legyen $A = [0,a] \times [0,b]$, $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq c \}$, a,b,c pozitív valós paraméterek. A paraméterek mely értékei esetén teljesülnek a következő állítások:

$$a, A \cap B = A \quad b, A \setminus B = \emptyset \quad c, \{(a/2,0), (0,b/2)\} \subseteq A \setminus B \quad d, [1,2] \times [1,3] \subseteq A \cap B$$

3.12. Ha az A,B,C páronként diszjunkt halmazok, akkor mivel egyenlő az $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$ halmaz?

3.13. Ha $A \subseteq B \subseteq C$, akkor mivel egyenlő az $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$ halmaz?

3.14. Adottak egy $H \neq \emptyset$ halmaz A,B részhalmazai. Adjon meg olyan X halmazt, mellyel teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$a, A \cap X = X \quad d, A \setminus X = B \quad g, \overline{A} \cap X = B \setminus A \\ b, A \cup X = X \quad e, A \setminus X = B \setminus X \quad h, (\overline{B} \setminus A) \cup X = \overline{B} \\ c, X \setminus A = X \quad f, X \setminus A = X \setminus B \quad i, ((H \setminus A) \times H) \cup (H \times (H \setminus B)) = H^2 \setminus X$$

3.15. Egy $H \neq \emptyset$ halmaz milyen tulajdonságú A,B,C és D részhalmazai esetén teljesülnek az alábbi állítások:

$$a, A \setminus B = B \setminus A \quad b, (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \\ c, (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = H \quad d, (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset \\ e, A \cup B = A \cap B \quad f, A \setminus B = A \\ g, A \subseteq A \cap B \quad h, (A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \\ i, A \cup (B \cap \overline{A}) = B \quad j, B \cup C = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ k, (A \cup B) \cap C = A \quad l, (A \cup B) \cap C = C \\ m, A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \quad n, (A \setminus B) \cup C = A \cap B \cap C \\ o, (A \setminus B) \times (B \setminus C) = \emptyset \quad p, (A \cap B) \times C = \emptyset \\ q, (A \cup B) \times (C \cup D) = A \times D \quad r, \overline{A} \times B = A \times C \\ s, (A \times \overline{B}) \cap (A \times C) = \emptyset \quad t, A \times B \subseteq B \times A \\ u, A \times B = B \times C \quad v, (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \\ w, A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$