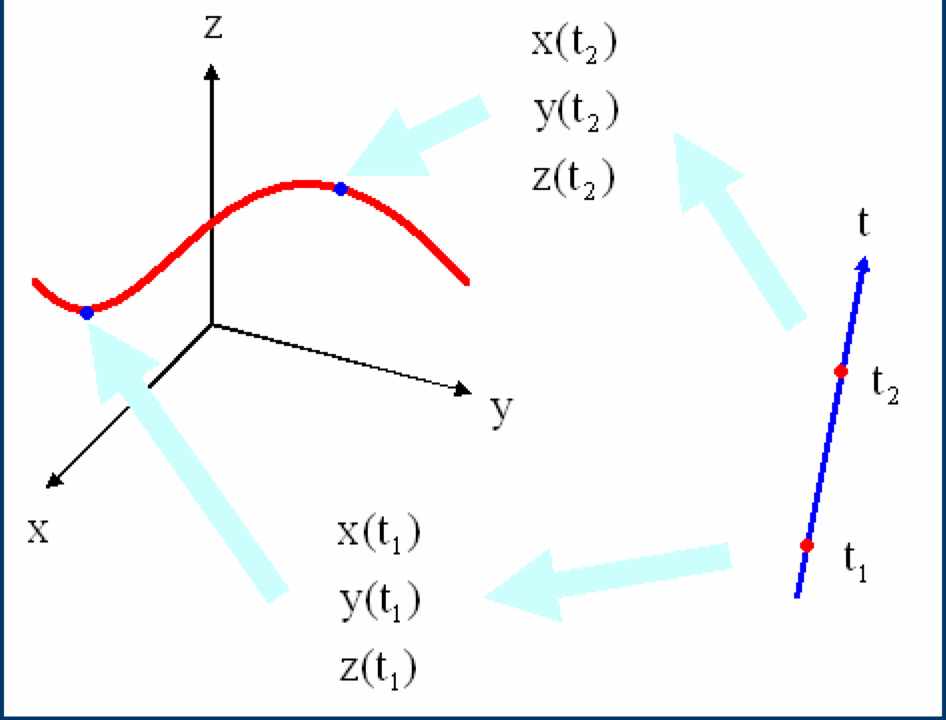
Térgörbék (R→R^3 függvények)

Síkgörbék (R→R^2 függvények)

Felületek (R^2→R^3 függvények)

$R \to R^3$ típusú függvények (térgörbék)



Definíció: koordinátafüggvények

Az $R \to R^3$ típusú

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

függvény (térgörbe) koordinátafüggvényei az

$$x,y,z : R \to R$$

egyváltozós, valós értékű függvények.

A koordinátafüggvények értékei adják a függvényértékek koordinátáit.

Definíció: koordinátafüggvények

Az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ típusú

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

függvény (síkgörbe) koordinátafüggvényei az

$$x, y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

egyváltozós, valós értékű függvények.

Példa

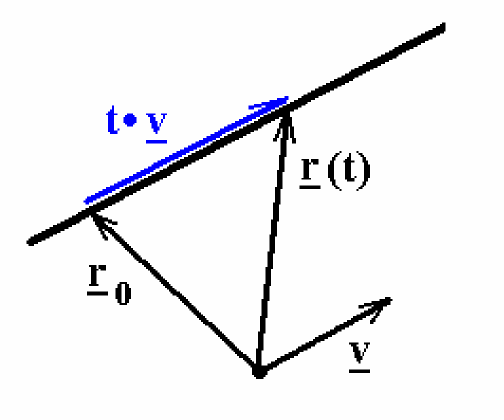
Térbeli egyenes előállítása $R \to R^3$ függvénnyel

Az $\underline{r}_0$ helyzetvektor által meghatározott ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenest állítja elő a következő függvény:

$$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v} \ , \quad t \in R}$$

Megjegyzés

A t paraméterértékek és az egyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést jelent a fenti függvénykapcsolat.



NEM NYOMTATÁSRA!

Az egyenes előállítása koordinátafüggvényekkel:

Legyen

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Ekkor a fenti vektorfüggvény koordinátafüggvényei:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t \cdot v_x \\ y(t) &= y_0 + t \cdot v_y , \quad t \in R \\ z(t) &= z_0 + t \cdot v_z \end{aligned}$$

$$t \to \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_x \\ y_0 + t \cdot v_y \\ z_0 + t \cdot v_z \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\underline{r}_0$ $\qquad$ $\uparrow$ $\underline{v}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\underline{r}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ekkor az egyenes:

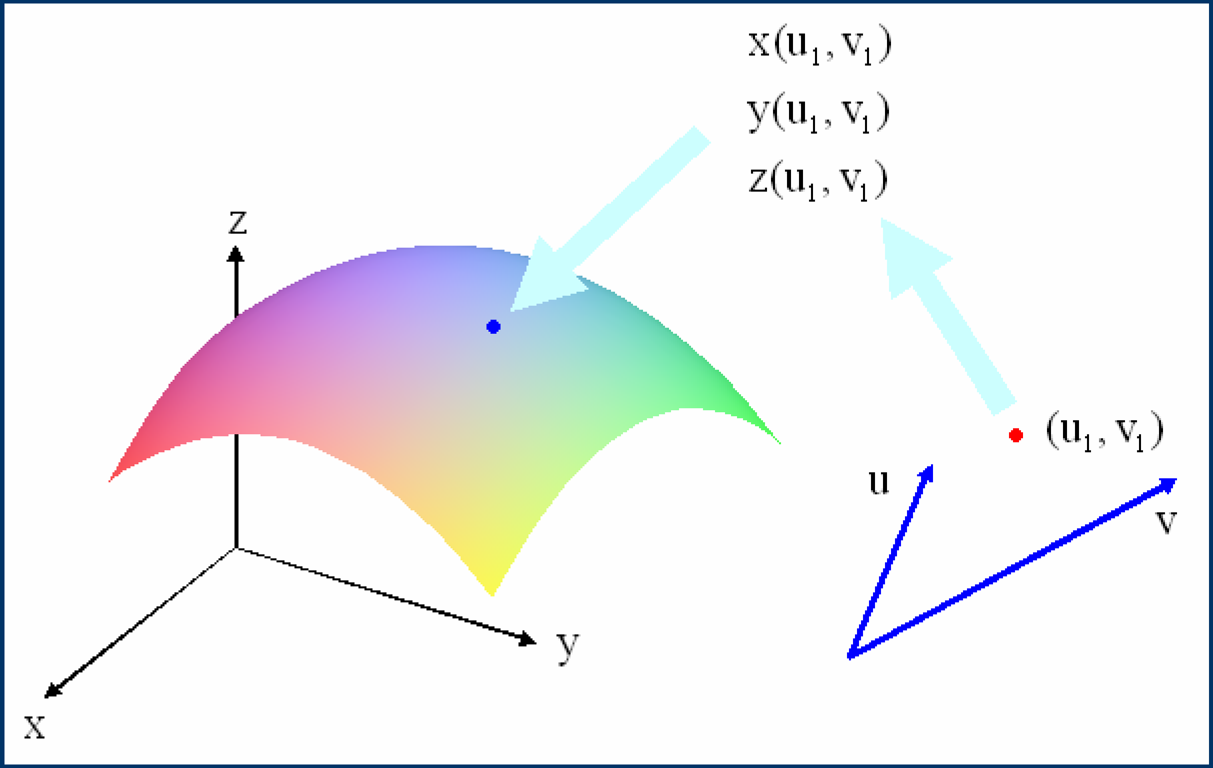
$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + 4 \cdot t \\ y(t) &= 5 - 3 \cdot t \quad , \quad t \in R \\ z(t) &= 3 + 1 \cdot t \end{aligned}$$

$$t \to \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 2+4t \\ 5-3t \\ 3+t \end{pmatrix}$$

Az egyenes néhány pontja:

$$0 \to \underline{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad 2 \to \underline{r}(2) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad -1 \to \underline{r}(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$R^2 \to R^3$ típusú függvények (felületek)



Definíció: koordinátafüggvények

Az $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ típusú

$$\underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

függvény (térgörbe) koordinátafüggvényei az

$$x, y, z : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

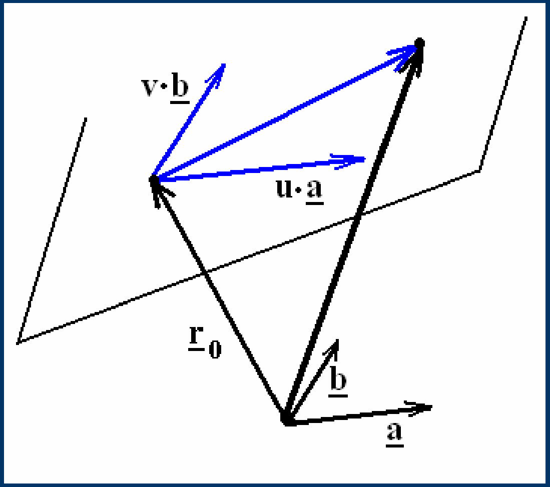
kétváltozós, valós értékű függvények.

A koordinátafüggvények értékei adják a függvényértékek koordinátáit.

Példa

Sík előállítása $R^2 \to R^3$ függvénnyel

Adott $\underline{r}_0$ helyzetvektor által meghatározott ponton átmenő, adott $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorokkal párhuzamos síkot állítja elő a következő függvény ($\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem lehet párhuzamos):



$$\boxed{\underline{r}(u,v) = \underline{r}_0 + u \cdot \underline{a} + v \cdot \underline{b}\,, \quad (u,v) \in R^2}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A sík előállítása koordinátafüggvényekkel: legyen

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Ekkor a fenti vektorfüggvény koordinátafüggvényei:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_0 + a_x \cdot u + b_x \cdot v \\ y(u,v) &= y_0 + a_y \cdot u + b_y \cdot v\,, \quad (u,v)\in \mathbf{R}^2 \\ z(u,v) &= z_0 + a_z \cdot u + b_z \cdot v \end{aligned}$$

$\underline{\mathbf{r}}_0$ $\underline{\mathbf{u}}$ $\underline{\mathbf{v}}$

$$(u,v) \to \underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x_0 + a_x \cdot u + b_x \cdot v \\ y_0 + a_y \cdot u + b_y \cdot v \\ z_0 + a_z \cdot u + b_z \cdot v \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Legyen

$$\underline{r}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ekkor a síkot előállító függvény:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2 + 4\cdot u + v \\ y(u,v) &= 5 - 3\cdot u + 2\cdot v\,, \qquad (u,v)\in \mathbf{R}^2 \\ z(u,v) &= 3 + u + 7\cdot v \end{aligned}$$

$$\underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2 + 4\cdot u + v \\ 5 - 3\cdot u + 2\cdot v \\ 3 + u + 7\cdot v \end{pmatrix}$$

A sík néhány pontja:

$$\underline{r}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{r}(1,2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \underline{r}(-1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

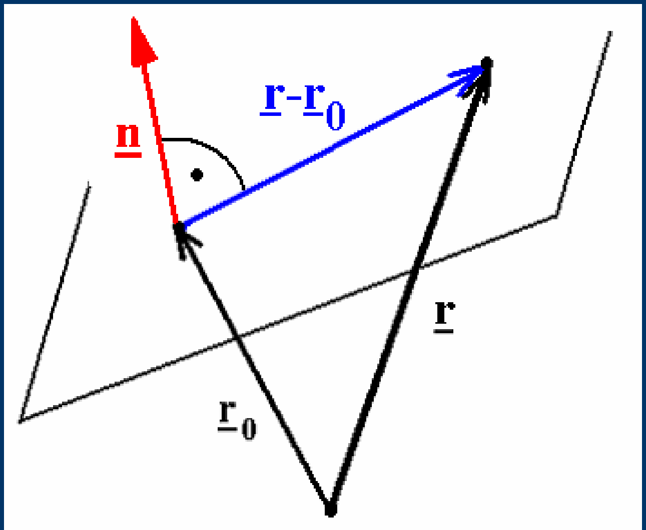
Megjegyzés

Sík normálvektoros előállítása

Adott $\underline{r}_0$ helyzetvektor által meghatározott ponton átmenő, adott $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$\boxed{(\underline{r} - \underline{r}_0) \bullet \underline{n} = 0}$$

(A • jel a skaláris szorzást jelöli.)



Legyen $\underline{r} = (x,y,z)$, $\underline{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, $\underline{n} = (A,B,C)$

Ekkor a fenti egyenlet:

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \bullet \underline{n} = 0$$

$$((x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)) \bullet (A,B,C) = 0$$

$$(x-x_0 , y-y_0, z-z_0) \bullet (A,B,C) \rangle = 0$$

$$A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) + C\cdot(z-z_0) = 0$$

$$A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + (-A\cdot x_0 - B\cdot y_0 - C\cdot z_0) = 0$$

$$A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) + C\cdot(z-z_0) = 0$$

formula a sík általános egyenlete. A változók együtthatói a sík egy normálvektorának koordinátái.

Az általános egyenletet elosztva a n=(A,B,C) normálvektor hosszával a sík normál egyenletét kapjuk:

$$a\cdot(x-x_0) + b\cdot(y-y_0) + c\cdot(z-z_0) = 0$$

ahol

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad d = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A normál egyenlet egy tulajdonsága: a

$$P = (p_1, p_2, p_3)$$

pont távolsága az

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

normál egyenletű S síktól:

$$d(P,S) = | a \cdot (p_1 - x_0) + b \cdot (p_2 - y_0) + c \cdot (p_3 - z_0) |$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

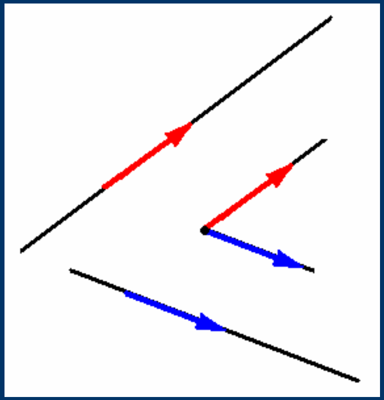
Kapcsolat egy sík állását meghatározó adatai (és így közvetve a kétféle egyenlete) között:

Ha <u>a</u> és <u>b</u> egy síkkal párhuzamos vektorok (de egymással nem párhuzamosak), akkor <u>a</u>×<u>b</u> a sík normálvektora.

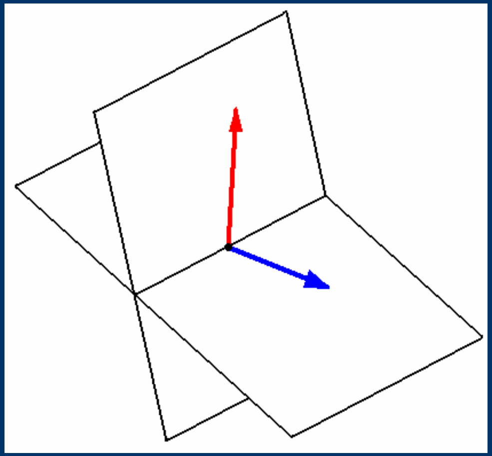
Példa

Szögfeladatok

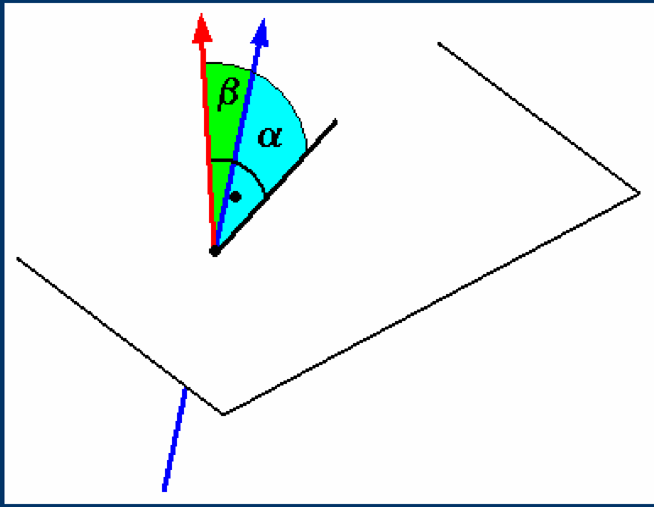
Egyenesek szöge egyenlő az irányvektoraik szögével.

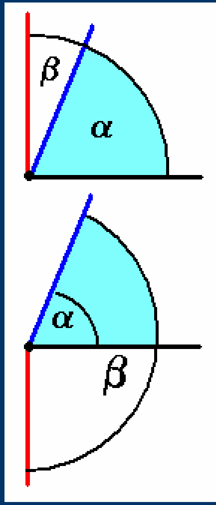


Síkok szöge egyenlő a normálvektoraik szögével.



Egyenes és sík szöge az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának szögéből számítható.

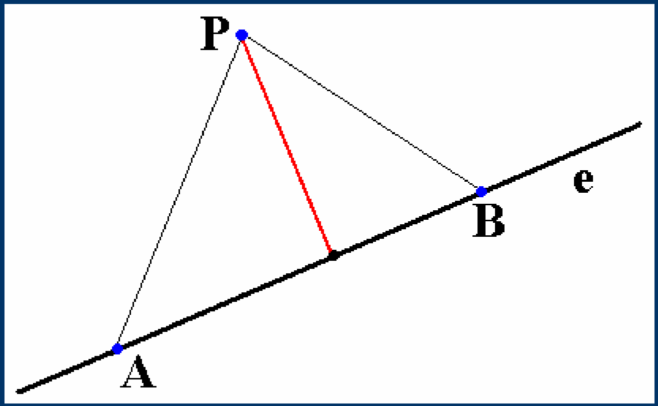




Példa

Távolságfeladatok

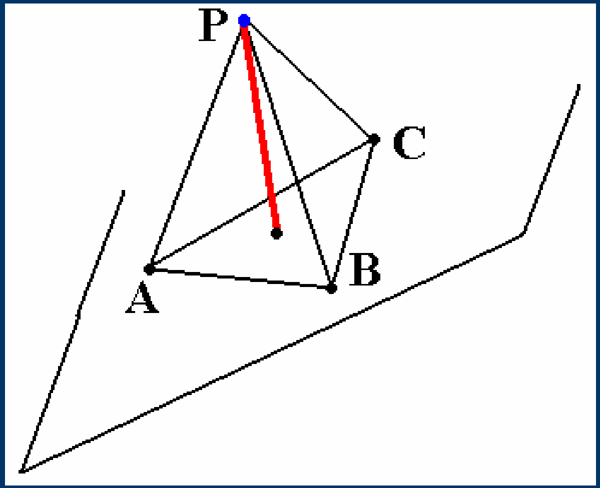
A d(P,e) távolság kiszámítása:



$$T_{ABP} = \frac{d(A,B) \cdot d(P,e)}{2}$$

$$d(P,e) = \frac{2 \cdot T_{ABP}}{d(A,B)}$$

A d(P,S) távolság kiszámítása:



$$V_{ABCP} = \frac{T_{ABC} \cdot d(P,S)}{3}$$

$$d(P,S) = \frac{3 \cdot V_{ABCP}}{T_{ABC}}$$

Az R→R^3 típusú függvények differenciálása

Definíció: differenciálhányados

Az

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

függvény differenciálható a $t_0 \in [a,b]$ helyen, ha a koordináta-függvényei differenciálhatók a t_0 helyen.

Ha az $\underline{r}:[a,b] \to R^3$ differenciálható a t_0 helyen, akkor a differenciál-hányadosa:

$$\underline{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az R→R² típusú függvények differenciálása

Definíció: differenciálhányados

Az

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

függvény differenciálható a $t_0 \in [a,b]$ helyen, ha a koordináta-függvényei differenciálhatók a t_0 helyen.

Ha az $\underline{r}:[a,b] \to R^3$ differenciálható a t_0 helyen, akkor a differenciál-hányadosa:

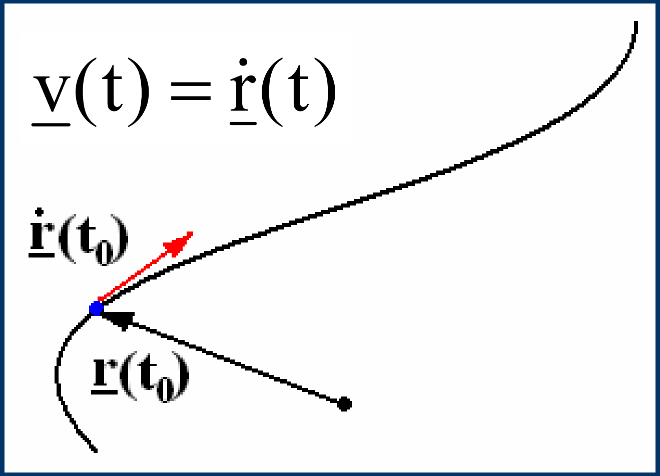
$$\underline{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

A t paraméter (fizikában az idő) szerinti deriváltakat vessző helyett általában ponttal jelöljük:

$$\underline{r}'(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

A differenciálhányados geometriai és fizikai jelentése



Egy R → R³ típusú függvény differenciálhányadosának geometriai jelentése: érintő vektor.

Ha a t→$\underline{r}$(t) függvény egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor a differenciálhányados vektor adott időpontban érvényes pillanatnyi sebesség.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot t^4 \\ 5 \cdot t^2 - 7t \\ 6t - t^3 \end{pmatrix}$$

$$t_0 = 2$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} 12t^3 \\ 10t - 7 \\ 6 - 3t^2 \end{pmatrix}$$

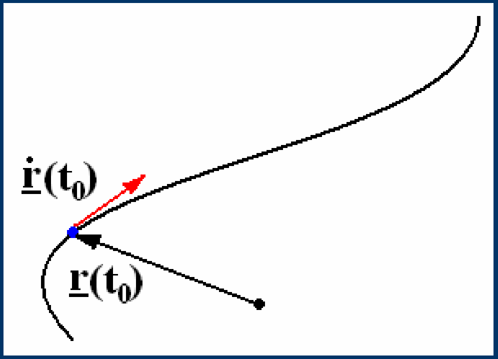
$$\dot{\underline{r}}(t_0) = \dot{\underline{r}}(2) = \begin{pmatrix} 96 \\ 13 \\ -6 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: érintő egyenes

Differenciálható térgörbe érintő egyenese:

$$\underline{r}(t) \approx \underline{e}(t) = \underline{r}(t_0) + \dot{\underline{r}}(t_0)(t - t_0)$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\underline{r}(t)=\begin{pmatrix}3t^4\\5t^2-7t\\6t-t^3\end{pmatrix}$$

$$t_0=2$$

Határozzuk meg az érintő egyenest a t_0=2 helyen, és ennek felhasználásával adjunk becslést az $\underline{r}$(1,93) függvényértékre!

$$\underline{r}(2)=\begin{pmatrix}48\\6\\4\end{pmatrix}\quad \dot{\underline{r}}(2)=\begin{pmatrix}96\\14\\-6\end{pmatrix}\quad \Rightarrow\quad \underline{e}(t)=\begin{pmatrix}48\\6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}96\\14\\-6\end{pmatrix}(t-2)=\begin{pmatrix}-144+96t\\-22+14t\\16-6t\end{pmatrix}$$

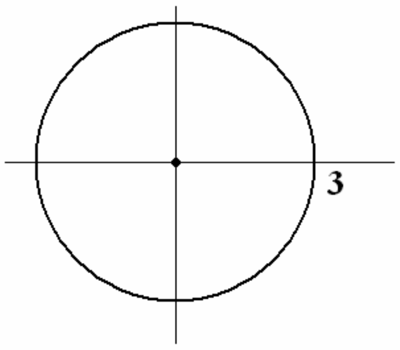
$$\underline{e}(1{,}93)=\begin{pmatrix}48\\6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}96\\14\\-6\end{pmatrix}(-0{,}07)=\begin{pmatrix}48\\6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6{,}72\\-0{,}98\\0{,}42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41{,}28\\5{,}02\\4{,}42\end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Tekintsünk azt a síkbeli mozgást, melynek hely-idő függvénye:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 5t \\ 3 \cdot \sin 5t \end{pmatrix}$$



Megjegyzés

$$\left|\underline{r}(t)\right| = \sqrt{9 \cdot \cos^2 5t + 9 \cdot \sin^2 5t} = 3$$

A mozgás pályája az origó középpontú, 3 egység sugarú kör.

NEM NYOMTATÁSRA!

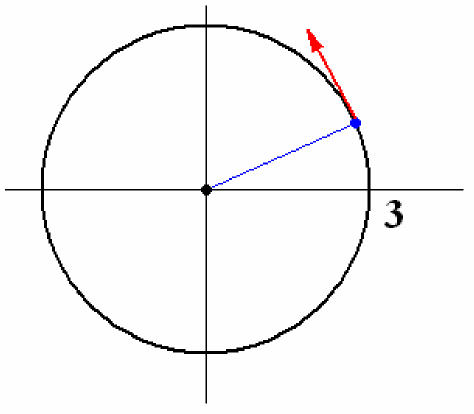
$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 5t \\ 3 \cdot \sin 5t \end{pmatrix}$$

A sebesség-idő függvény:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t) = \begin{pmatrix} -15 \cdot \sin 5t \\ 15 \cdot \cos 5t \end{pmatrix}$$

A pillanatnyi sebesség a $t = \pi/30 \approx 0{,}1$ időpontban:

$$\underline{v}\left(\frac{\pi}{30}\right) = \begin{pmatrix} -15 \cdot \sin 5 \cdot \frac{\pi}{30} \\ 15 \cdot \cos 5 \cdot \frac{\pi}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ \frac{15\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \approx \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ 13 \end{pmatrix}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

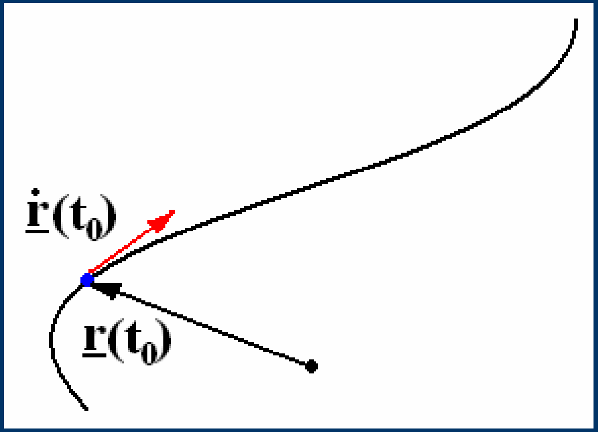
$$|\underline{v}| = \sqrt{225 \cdot \sin^2 5t + 225 \cdot \cos^2 5t} = 15$$

A sebesség nagysága állandó tehát itt egy egyenletes körmozgásról van szó, 15 egység nagyságú sebességgel.

Differenciálható térgörbék néhány pontbeli jellemzője

Definíció: érintő egységvektor

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}(t)}{\left|\dot{\underline{r}}(t)\right|}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés: térgörbe ívhossz-paraméteres előállítása

Adott térgörbének tetszőleges számú előállítása létezik $R \to R^3$ típusú függvény segítségével.

A különböző előállításokban általában különbözik egy adott görbeponthoz tartozó érintővektor hossza. ***Ez egy mozgó pont hely-idő függvénye esetén ugyanazon pálya különböző sebességgel való befutásának felel meg a fizikában.***

Differenciálható térgörbe esetén azt az előállítást, melynél az érintővektor hossza bármely pontban egységnyi, ívhossz-paraméteres előállításnak nevezzük. ***Ez a pálya egységnyi nagyságú sebességgel való befutásának felel meg a fizikában.***

Az ívhossz-paraméteres előállítás elnevezés onnan ered, hogy ekkor

Ebben az előállításban a paramétert t helyett s-sel szokás jelölni.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: binormális egységvektor

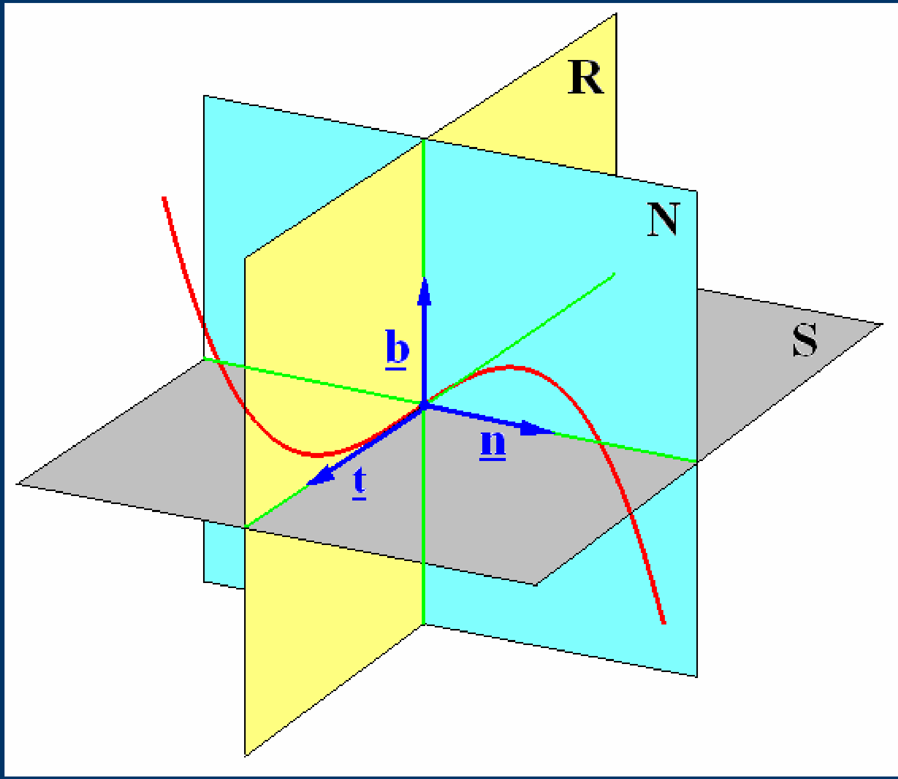
$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)}{\left|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)\right|}$$

feltéve, hogy

$$\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t) \neq 0$$

Definíció: főnormális egységvektor

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: kísérő triéder

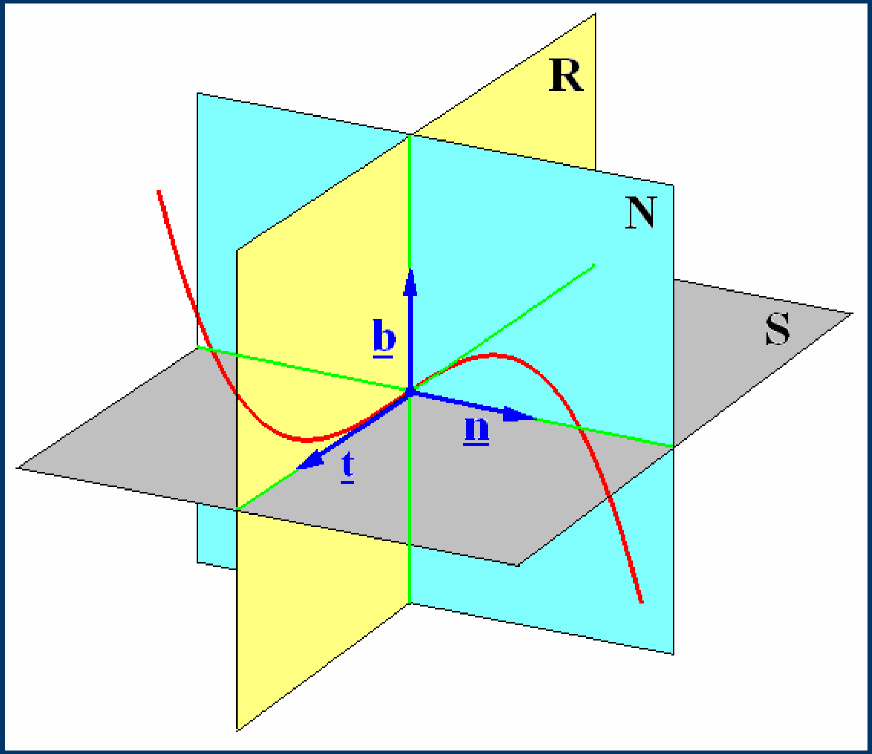
Az érintő, a főnormális és a binormális egységvektorok a görbe bármely pontjában (ahol nem tűnnek el) ortonormált vektorrendszert alkotnak. Az (e,n,b) hármast a görbe kísérő triéderének nevezzük.

A görbék vizsgálatában a kísérő triéder által meghatározott koordinátarendszer alapvető fontosságú.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: simulósík

Az t és n vektorok által kifeszített sík a görbe simulósíkja.



Definíció: normális sík

Az n és b vektorok által kifeszített sík a görbe normális síkja.

Definíció: rektifikáló sík

A t és b vektorok által kifeszített sík a görbe rektifikáló síkja.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: görbület

Azt, hogy egy görbe egy adott helyen mennyire „tér el” az egyenestől a görbülettel mérjük. A görbület az érintő vektor irányának megváltozásával függ össze.

Ha a görbe kétszer differenciálható és az első deriváltja nem tűnik el, akkor a görbület:

$$\kappa(t) = \frac{\left|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)\right|}{\left|\dot{\underline{r}}(t)\right|^3}$$

Megjegyzések

Egyenes görbülete nulla.

Kör görbületének nagysága a sugár reciproka.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: torzió

Azt, hogy egy görbe mennyire csavarodik a torzióval mérjük. A torzió a binormális vektor irányának változásával függ össze: a görbe mennyire „tér el” a simulósíkjától.

Ha a görbe háromszor differenciálható és a első és a második deriváltak vektori szorzata nem tűnik el, akkor a torzió:

$$\tau(t) = \frac{\underline{\dot{r}}(t)\underline{\ddot{r}}(t)\underline{\dddot{r}}(t)}{\left|\underline{\dot{r}}(t)\times\underline{\ddot{r}}(t)\right|^2}$$

Megjegyzés

Síkgörbe a saját simulósíkjában van, így a torziója nulla.

Az állítás megfordítása is igaz, így a torzió eltűnése a síkgörbék jellemzője:

Egy háromszor differenciálható görbe pontosan akkor síkgörbe, ha a torziója nulla.

NEM NYOMTATÁSRA!

Térgörbe ívhossza

Egy differenciálható $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ görbe $[t_1, t_2]$ paraméter szakaszához tartozó darabjának ívhossza:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|\dot{\underline{r}}|}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt$$

Vegyük észre az analógiát azzal, ahogyan a sebesség nagyságából számítjuk a megtett utat: ha a $t \rightarrow v(t)$ függvény adja a mozgó pont sebességének nagyságát, akkor a $[t_1, t_2]$ időtartam alatt megtett út

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt$$

Példa

$$\underline{r}(t)=\begin{pmatrix}3t\\ t^2-2\\ -t\end{pmatrix}$$

$$0\le t\le 1$$

$$\dot{\underline{r}}(t)=\begin{pmatrix}3\\ 2t\\ -1\end{pmatrix}$$

$$s=\int_0^1\sqrt{9+4t^2+1}\,dt=\int_0^1\sqrt{4t^2+10}\,dt=\sqrt{10}\cdot\int_0^1\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)^2+1}\,dt$$

$$\int\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)^2+1}\,dt=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\int\sqrt{sh^2u+1}\cdot chu\,du=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\int ch^2u\,du=$$

$$\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t=shu$$

$$t=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot shu$$

$$\frac{dt}{du}=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot chu$$

$$u=arsh\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\int_0^1 \mathrm{ch}^2 u\,du=\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\int_0^1(\mathrm{ch}2u+1)\,du=\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\left[\frac{\mathrm{sh}2u}{2}+u\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{8}\cdot\mathrm{sh}\left(2\cdot\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)\right)+\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{8}\cdot 2\cdot\mathrm{sh}\left(\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)\right)\cdot\mathrm{ch}\left(\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)\right)+\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\cdot\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)}+\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\sqrt{1+\frac{4}{10}\cdot t^2}+\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\mathrm{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot t\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\int \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{10}} \cdot t\right)^2 + 1}\, dt = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{10} \cdot t^2} + \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \operatorname{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}} \cdot t\right)$$

$$s = \sqrt{10} \cdot \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{10}} \cdot t\right)^2 + 1}\, dt = \sqrt{10} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{10} \cdot t^2} + \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \operatorname{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}} \cdot t\right)\right]_{t=0}^{1} =$$

$$= \sqrt{10} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{10}} + \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \operatorname{arsh}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)\right) =$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Síkgörbék differenciálásával kapcsolatos megjegyzések

Egy $t \to (x(t),y(t))$ síkgörbe vizsgálatakor szükség lehet az x és az y kapcsolatát leíró jellemzőkre:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

mivel a síkgörbék jellemzőit megadó számos formula (pl. érintő egyenlete, érintési paraméterek, simulókör, görbület) ezeket az értékeket tartartalmazza.

Ezek a differenciálhányadosok kiszámíthatók a $t \to x(t)$ és a $t \to y(t)$ függvények deriváltjaival a következők szerint:

NEM NYOMTATÁSRA!

Ha t→x(t) deriváltja nem tűnik el egy adott helyen, akkor ott

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\left(\dot{x}(t)\right)^3}$$

$$\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}$$

$$\dot{y}(t)=\frac{dy}{dt}$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\ddot{y}(t)=\frac{d^2y}{dt^2}$$

Vektormezők ($R^3 \rightarrow R^3$ függvények)

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: koordinátafüggvények

Az R^3→R^3 típusú

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(\underline{r}) \\ v_y(\underline{r}) \\ v_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

függvény (vektormező) koordinátafüggvényei a

$v_x, v_y, v_z : R^3 \to R$

háromváltozós, valós értékű függvények.

Definíció: $R^3 \to R^3$ típusú lineáris függvények

Az

$$f(x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

alakú függvényeket, ahol A egy (3×3) típusú mátrix, $R^3 \to R^3$ típusú lineáris függvényeknek nevezzük.

Az A mátrix az f függvény mátrixa.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: differenciálhányados

Az $\underline{v}$:D($\subseteq$R^3)$\to$R^3 függvény differenciálható a D értelmezési tartomány egy $\underline{r}_0$ belső pontjában, ha van olyan K$\in$R^3, melyre

$$\underline{v}(\underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}_0) = K \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) + \underline{h}(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

ahol

$$\lim_{\underline{r} \to \underline{r}_0} \frac{\left|\underline{h}(\underline{r} - \underline{r}_0)\right|}{\left|\underline{r} - \underline{r}_0\right|} = 0$$

Ekkor az A függvényt az f függvény P_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük. Jelölése:

$$K = v'(\underline{r}_0)$$

A $\Delta\underline{r} = \underline{r} - \underline{r}_0$ $\Delta\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}_0)$

jelölésekkel a differenciálhányadost definiáló összefüggés:

$$\Delta\underline{v} = \mathrm{K} \cdot \Delta\underline{r} + \underline{h}(\Delta\underline{r})$$

ahol

$$\lim_{\Delta\underline{r} \to \underline{0}} \frac{|\underline{h}(\Delta\underline{r})|}{|\Delta\underline{r}|} = 0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

A differenciálhányados mátrixa a koordináta-függvények parciális deriváltjaiból áll:

$$\underline{v}'(\underline{r}_0) = \begin{pmatrix} \partial_x v_x(\underline{r}_0) & \partial_y v_x(\underline{r}_0) & \partial_z v_x(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_y(\underline{r}_0) & \partial_y v_y(\underline{r}_0) & \partial_z v_y(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_z(\underline{r}_0) & \partial_y v_z(\underline{r}_0) & \partial_z v_z(\underline{r}_0) \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: differenciál

Ha a $\underline{v}:D(\subseteq R^3)\to R^3$ függvény differenciálható az $\underline{r}_0$ pontban, akkor a $\underline{v}$ függvény $\underline{r}_0$ pontbeli, $\underline{x}$-hez tartozó differenciálja:

$$\underline{\underline{v}}'(\underline{r}_0)\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)=\underline{\underline{v}}'(\underline{r}_0)\cdot\Delta\underline{r}$$

Definíció: lineáris közelítés

Ha a $\underline{v}:D(\subseteq R^3)\to R^3$ függvény differenciálható az $\underline{r}_0$ pontban, akkor a $\underline{v}$ függvény $\underline{r}_0$ pontbeli lineáris közelítése:

$$\underline{v}(\underline{r})-\underline{v}(\underline{r}_0)\approx\underline{\underline{v}}'(\underline{r}_0)\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)$$

$$\Delta\underline{v}\approx\underline{\underline{v}}'(\underline{r}_0)\cdot\Delta\underline{r}$$

avagy:

$$\underline{v}(\underline{r})\approx\underline{v}(\underline{r}_0)+\underline{\underline{v}}'(\underline{r}_0)\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)$$

Példa

$$\underline{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix} x\cdot z^4+y\cdot z \\ x^3-z^2 \\ 6\cdot y \end{pmatrix}$$

- **határozzuk meg az függvény differenciálhányadosát;**
- **írjuk fel a lineárist közelítést az** $\underline{r}_0=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **helyen;**
- **számoljuk ki az f függvény közelítő értékét az** $\underline{r}_1=\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 3{,}8 \\ 1{,}3 \end{pmatrix}$ **helyen!**

$$\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cdot z^4 + y\cdot z \\ x^3 - z^2 \\ 6\cdot y \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'(\underline{r}_0) = \begin{pmatrix} \partial_x v_x(\underline{r}_0) & \partial_y v_x(\underline{r}_0) & \partial_z v_x(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_y(\underline{r}_0) & \partial_y v_y(\underline{r}_0) & \partial_z v_y(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_z(\underline{r}_0) & \partial_y v_z(\underline{r}_0) & \partial_z v_z(\underline{r}_0) \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^4 & z & 4xz^3 + y \\ 3x^2 & 0 & -2z \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'(\underline{r}_0) = \underline{v}'\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

A lineáris közelítés formulája: $\underline{v}(\underline{r}) \approx \underline{v}(\underline{r}_0) + \underline{v}\,'(\underline{r}_0)\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)$

$$\underline{v}(\underline{r}_0) = \underline{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 3{,}8 \\ 1{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}(\underline{r}_1) = \underline{v}\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 3{,}8 \\ 1{,}3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.1-2 \\ 3.8-4 \\ 1.3-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.6 \\ -1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 6.6 \\ 22.8 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Adott vektormező (pl. sebességtér az áramló folyadékban, térerősség az elektromos erőtérben) esetén a differenciálhányados mátrixának elemei függenek a koordinátarendszer megválasztásától.

Az alábbiakban két olyan jellemzőt adunk meg, melyek a differenciálhányados mátrix elemeiből számíthatók, de invariánsak a koordinátarendszer megváltoztatásával szemben, és közvetlen fizikai tartalommal bírnak.

Definíció: vektormező divergenciája

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}_0) = \partial_x v_x(\underline{r}_0) + \partial_y v_y(\underline{r}_0) + \partial_z v_z(\underline{r}_0)$$

$$\underline{v}'(\underline{r}_0) = \begin{pmatrix} \partial_x v_x(\underline{r}_0) & \partial_y v_x(\underline{r}_0) & \partial_z v_x(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_y(\underline{r}_0) & \partial_y v_y(\underline{r}_0) & \partial_z v_y(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_z(\underline{r}_0) & \partial_y v_z(\underline{r}_0) & \partial_z v_z(\underline{r}_0) \end{pmatrix}$$

Megjegyzések

1. **A divergencia egyenlő a differenciálhányados mátrix főátlójában lévő elemek összegével.**
2. **A divergencia a forrásossággával függ össze: egy vektormező forrásmentes, ha a divergenciája 0.**

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \cdot z^4 + 2y \\ x^3 - 5y^2 \\ 6yz \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_0 = (-1,2,1)$$

$$\underline{v}'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz^4 & 2 & 4x^2z^3 \\ 3x^2 & -10y & 0 \\ 0 & 6z & 6y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot x \cdot z^4 - 10y + 6y$$

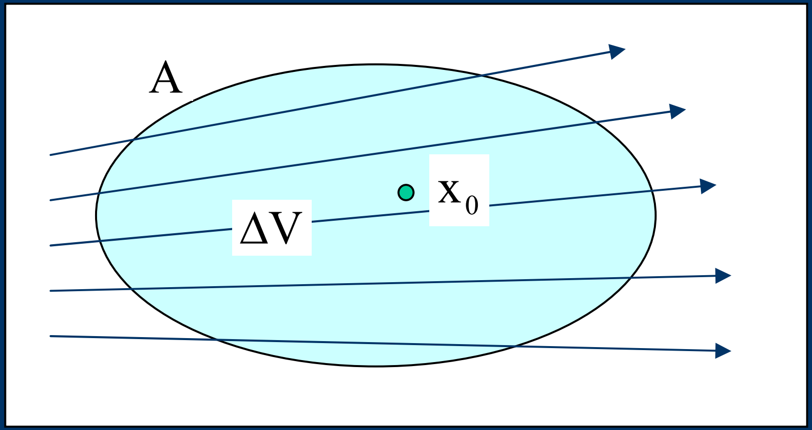
$$\underline{v}'\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & -20 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\underline{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 - 20 + 12 = -10$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}_0) = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ V \to \underline{r}_0}} \frac{\displaystyle\oint\!\!\!\oint_A \underline{v}\, d\underline{F}}{\Delta V}$$



ahol A az $\underline{r}_0$ pontot tartalmazó tartományt határoló felület, ΔV. a tartomány térfogata.

$$\oint\!\!\!\oint_A \underline{f}\, d\underline{F}$$

Az A zárt felületre vonatkozó áramsűrűség. Ennek értéke akkor különbözik 0-tól, ha a tartomány belsejében forrás vagy nyelő van: a beáramlás és a kiáramlás mértéke különbözik.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A divergencia jelentése (légüres) elektrosztatikus térben:

$$\varepsilon_0 \cdot \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}_0\right) = \rho\left(\vec{r}_0\right)$$

ahol ρ a (térfogati) töltéssűrűség, ε_0 az elektromos permitivitás.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: vektormező rotációja

$$\underline{v}'(\underline{r}_0) = \begin{pmatrix} \partial_x v_x(\underline{r}_0) & \partial_y v_x(\underline{r}_0) & \partial_z v_x(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_y(\underline{r}_0) & \partial_y v_y(\underline{r}_0) & \partial_z v_y(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_z(\underline{r}_0) & \partial_y v_z(\underline{r}_0) & \partial_z v_z(\underline{r}_0) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r}_0) = \begin{pmatrix} \partial_y v_z(\underline{r}_0) - \partial_z v_y(\underline{r}_0) \\ -\partial_x v_z(\underline{r}_0) + \partial_z v_x(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_y(\underline{r}_0) - \partial_y v_x(\underline{r}_0) \end{pmatrix}$$

Könnyebben megjegyezhető forma:

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

A determináns formális kifejtésével a rotáció fenti képletét kapjuk.

Megjegyzés

A rotáció az örvényességgel függ össze: egy vektormező örvénymentes, ha a rotációja $\underline{0}$.

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \partial_y v_z(\underline{r}) - \partial_z v_y(\underline{r}) \\ -\partial_x v_z(\underline{r}) + \partial_z v_x(\underline{r}) \\ \partial_x v_y(\underline{r}) - \partial_y v_x(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

Példa

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \cdot z^4 + 2y \\ x^3 - 5y^2 \\ 6yz \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz^4 & 2 & 4x^2z^3 \\ 3x^2 & -10y & 0 \\ 0 & 6z & 6y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z \\ 4x^2z^3 \\ 3x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r}_0) = \begin{pmatrix} \partial_y v_z(\underline{r}_0) - \partial_z v_y(\underline{r}_0) \\ -\partial_x v_z(\underline{r}_0) + \partial_z v_x(\underline{r}_0) \\ \partial_x v_y(\underline{r}_0) - \partial_y v_x(\underline{r}_0) \end{pmatrix}$$

Példa

$$\underline{r}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \cdot z^4 + 2y \\ x^3 - 5y^2 \\ 6yz \end{pmatrix}$$

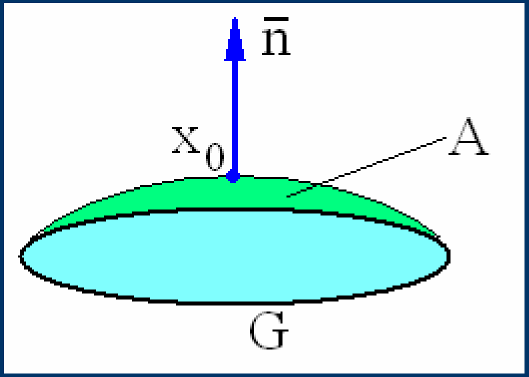
$$\underline{v}'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz^4 & 2 & 4x^2z^3 \\ 3x^2 & -10y & 0 \\ 0 & 6z & 6y \end{pmatrix} \qquad \underline{v}'\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & -20 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z \\ 4x^2z^3 \\ 3x^2 - 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rot}\,\underline{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ -0+4 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

$$\underline{n}\cdot \operatorname{rot}\underline{f}(\underline{r}_0)=\lim_{\substack{\Delta A\to 0\\ G\to \underline{r}_0}}\frac{\oint_G \underline{f}d\underline{r}}{\Delta A}$$



ahol ΔA az x_0 pontot tartalmazó felületdarab felszíne, G a felületdarabot határoló zárt görbe.

$$\oint_G \underline{f}d\underline{r}$$

Cirkuláció a G zárt görbe mentén.

(Konzervatív erőtér esetén bármely zárt görbére 0.)

Jelölés: nabla operátor

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

A nabla operátor segítségével röviden felírhatók a differenciál operátorok:

$$\text{div}\,\underline{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = \nabla \cdot \underline{v}$$

$$\text{rot}\,\underline{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y, -\partial_x v_z + \partial_z v_x, \partial_x v_y - \partial_y v_x) = \nabla \times \underline{v}$$

$$\text{rot}\,\underline{v} = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

Megjegyzések

A divergencia és a rotáció megjelenik az elektromágneses tér jellemzői közti összefüggéseket megadó Maxwell egyenletek differenciális alakjában:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

E: elektromos térerősség vektor

D: dielektromos eltolódás vektor

H: mágneses térerősség vektor

B: mágnese indukció vektor

J: áramsűrűség vektor

ρ: elektromos töltéssűrűség

NEM NYOMTATÁSRA!

Vektormező görbementi integrálja

Folytonos $\underline{r} \rightarrow \underline{v}(\underline{r})$ vektormező görbementi integrálja a differenciálható G: $t \rightarrow \underline{r}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ görbeíven:

$$\int_G \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\, dt$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z^4 \\ x \cdot z + y^2 \\ 5 - y \cdot z \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 - t \\ 6t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$0 \le t \le 1$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 12t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_G \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(4 - t - 6t^2 + t^4, (4 - t) \cdot t + 36t^4, 5 - 6t^3\right) \cdot \left(-1, 12t, 1\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(-4 + t + 6t^2 - t^4 + 48t^2 - 12t^3 + 432t^5 + 5 - 6t^3\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(432t^5 - t^4 - 18t^3 + 54t^2 + t + 1\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(432t^5 - t^4 - 18t^3 + 54t^2 + t + 1\right) dt =$$

$$= \left[432 \cdot \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} - 18 \cdot \frac{t^4}{4} + 54 \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_{t=0}^{1} =$$

$$= \frac{432}{6} - \frac{1}{5} - \frac{18}{4} + \frac{54}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 86{,}8$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2z \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_G \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t - \sin t, 2t, \sin t\right) \cdot \left(\text{-}\sin t, \cos t, 1\right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{-}\sin t \cdot \cos t + \sin^2 t + 2t \cdot \cos t + \sin t\right) dt =$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Vektormező felületmenti integrálja

Folytonos $\underline{r} \to \underline{v}(\underline{r})$ vektormező görbementi integrálja a differenciálható F: $(u,v) \to \underline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ felületdarabon

$$\iint_D \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \iint_D \underline{v}(\underline{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} \right) du dv$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x-3z \\ 6y \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2-3v \\ uv \\ 5+v \end{pmatrix}$$

$$0 \le u \le 1,\ 1 \le v \le 2$$

$$\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} = \begin{pmatrix} 2u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} -3 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2u & v & 0 \\ -3 & u & 1 \end{pmatrix} = (v, -2u, 2u^2+3v)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x-3z \\ 6y \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2-3v \\ uv \\ 5+v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} = (v, -2u, 2u^2+3v)$$

$$\iint_D \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \iint_D \underline{v}(\underline{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v} \right) dudv =$$

$$= \int_{u=0}^{1} \int_{v=1}^{2} \left(uv+5+v, u^2-3v-15-3v, 6uv\right) \cdot \left(v, -2u, 2u^2+3v\right) dudv =$$

$$= \int_{u=0}^{1} \int_{v=1}^{2} \left(uv^2+5v+v^2-2u^3+6uv+30u+6uv+12u^3v+18uv^2\right) dudv =$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$= \int_{u=0}^{1} \int_{v=1}^{2} \left(uv^2 + 5v + v^2 - 2u^3 + 6uv + 30u + 6uv + 12u^3 v + 18uv^2 \right) du dv =$$

$$= \int_{u=0}^{1} \left(\int_{v=1}^{2} \left(-2u^3 + 30u + (19u+1) \cdot v^2 + (12u + 12u^3 + 5) \cdot v \right) dv \right) du =$$

$$= \int_{u=0}^{1} \left[\left((-2u^3 + 30u) \cdot v + (19u+1) \cdot \frac{v^3}{3} + (12u + 12u^3 + 5) \cdot \frac{v^2}{2} \right) \right]_{v=1}^{2} du =$$

$$= \int_{u=0}^{1} \left(-2u^3 + 30u + (19u+1) \cdot \frac{7}{3} + (12u + 12u^3 + 5) \cdot \frac{3}{2} \right) du =$$

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$	$f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$	$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$	$f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$
koordinátafüggvények			
$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$	$f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$	$f=(f_1, f_2, f_3),\ f_1,f_2,f_3:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$	$f=(f_1, f_2, f_3),\ f_1,f_2,f_3:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$
lineáris függvények			
$x\to c\cdot x,\ c\in\mathbf{R}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=$ $=c_1\cdot x_1+c_2\cdot x_2+c_3\cdot x_3,\ (c_1,c_2,c_3)\in\mathbf{R}^3$	$x\to\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}c_1\cdot x\\c_2\cdot x\\c_3\cdot x\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}_{3\times3}$
differenciálhatóság (lineáris közelíthetőség)			
$\exists\ c\in\mathbf{R}$ és $\exists\ \varepsilon:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$: $\Delta f=c\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$ ahol $\lim\limits_{\Delta x\to0}\varepsilon(\Delta x)=0$	$\exists\ \underline{c}=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbf{R}^3$ és $\exists\ \varepsilon:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$: $\Delta f=\underline{c}\cdot\Delta\underline{x}+\varepsilon(\Delta\underline{x})\cdot\Delta\underline{x}$ ahol $\lim\limits_{\Delta\underline{x}\to\underline{0}}\varepsilon(\Delta\underline{x})=0$	$\exists\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$ és $\exists\ \varepsilon:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$: $\Delta\underline{f}=c\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$ ahol $\lim\limits_{\Delta x\to0}\varepsilon(\Delta x)=\underline{0}$	$\exists\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}_{3\times3}$ és $\exists\ \varepsilon:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$: $\Delta\underline{f}=\underline{c}\cdot\Delta\underline{x}+\varepsilon(\Delta\underline{x})\cdot\Delta\underline{x}$ ahol $\lim\limits_{\Delta\underline{x}\to\underline{0}}\varepsilon(\Delta\underline{x})=\underline{0}$
differenciálhányados			
$f'(x_0)\in\mathbf{R}$	$f'(\underline{x}_0)=\operatorname{grad}f(\underline{x}_0)=$ $=\begin{pmatrix}\partial_1f(\underline{x}_0) & \partial_2f(\underline{x}_0) & \partial_3f(\underline{x}_0)\end{pmatrix}$	$\underline{f}'(x_0)=\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)\end{pmatrix}$	$\underline{f}'(\underline{x}_0)=\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)&\partial_2f_1(x_0)&\partial_3f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)&\partial_2f_2(x_0)&\partial_3f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)&\partial_1f_3(x_0)&\partial_3f_3(x_0)\end{pmatrix}$
differenciál			
$f'(x_0)\cdot\Delta x$	$f'(\underline{x}_0)\cdot\Delta\underline{x}=$ $=\begin{pmatrix}\partial_1f(\underline{x}_0) & \partial_2f(\underline{x}_0) & \partial_3f(\underline{x}_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{pmatrix}=$ $=\partial_1f(\underline{x}_0)\cdot\Delta x_1+\partial_2f(\underline{x}_0)\cdot\Delta x_2+\partial_3f(\underline{x}_0)\cdot\Delta x_3$	$\underline{f}'(x_0)\cdot\Delta x=$ $=\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)\end{pmatrix}\cdot\Delta x=\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)\cdot\Delta x\\\partial_1f_2(x_0)\cdot\Delta x\\\partial_1f_3(x_0)\cdot\Delta x\end{pmatrix}$	$\underline{f}'(\underline{x}_0)\cdot\Delta\underline{x}=$ $=\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)&\partial_2f_1(x_0)&\partial_3f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)&\partial_2f_2(x_0)&\partial_3f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)&\partial_1f_3(x_0)&\partial_3f_3(x_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{pmatrix}$
lineáris közelítés			
$\Delta f\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$	$\Delta f\approx\begin{pmatrix}\partial_1f(\underline{x}_0) & \partial_2f(\underline{x}_0) & \partial_3f(\underline{x}_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{pmatrix}$	$\Delta\underline{f}\approx\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)\end{pmatrix}\cdot\Delta x$	$\Delta\underline{f}\approx\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)&\partial_2f_1(x_0)&\partial_3f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)&\partial_2f_2(x_0)&\partial_3f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)&\partial_1f_3(x_0)&\partial_3f_3(x_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{pmatrix}$
$f(x)\approx$ $f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$	$f(\underline{x})\approx f(\underline{x}_0)+\begin{pmatrix}\partial_1f(\underline{x}_0) & \partial_2f(\underline{x}_0) & \partial_3f(\underline{x}_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{pmatrix}$	$\underline{f}(x)\approx\underline{f}(x_0)+\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)\end{pmatrix}\cdot\Delta x$	$\underline{f}(\underline{x})\approx\underline{f}(\underline{x}_0)+\begin{pmatrix}\partial_1f_1(x_0)&\partial_2f_1(x_0)&\partial_3f_1(x_0)\\\partial_1f_2(x_0)&\partial_2f_2(x_0)&\partial_3f_2(x_0)\\\partial_1f_3(x_0)&\partial_1f_3(x_0)&\partial_3f_3(x_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{pmatrix}$

Az $R^n \to R^m$ típusú függvények differenciálása

Definíció: koordinátafüggvények

Az $R^n \to R^m$ típusú

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvény koordinátafüggvényei az

$$f_1, f_2, \ldots, f_m : R^n \to R$$

n változós, valós értékű függvények.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: $R^n \to R^m$ típusú lineáris függvények

Az

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

alakú függvényeket, ahol A egy (m×n) típusú mátrix, $R^n \to R^m$ típusú lineáris függvényeknek nevezzük.

Az A mátrix az f függvény mátrixa.

Definíció: differenciálhányados

Az $f:D(\subseteq R^n) \rightarrow R^m$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány $\underline{x}_0$ belső pontjában, ha van olyan $A:R^n \rightarrow R^m$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - A(\underline{x} - \underline{x}_0)}{\left\| \underline{x} - \underline{x}_0 \right\|} = \underline{0}$$

Ekkor az A függvényt az f függvény P_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

A differenciálhányados mátrixa a koordinátafüggvények parciális deriváltjaiból áll:

$$\underline{f}'(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{x}_0) & \dots & \partial_n f_1(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(\underline{x}_0) & \dots & \partial_n f_m(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

A differenciálhányados mátrixnak annyi sora van, ahány dimenziós az értékkészlet, és annyi oszlopa van, ahány változós a függvény (=ahány dimanziós az értelmezési tartomány).

NEM NYOMTATÁSRA!

A differenciálhányados mátrixa speciális esetekben:

$R^3 \to R^3$ típusú függvények (vektormezők)

$$\underline{f}'(\underline{r}_0)=\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{r}_0) & \partial_2 f_1(\underline{r}_0) & \partial_3 f_1(\underline{r}_0) \\ \partial_1 f_2(\underline{r}_0) & \partial_2 f_2(\underline{r}_0) & \partial_3 f_2(\underline{r}_0) \\ \partial_1 f_3(\underline{r}_0) & \partial_2 f_3(\underline{r}_0) & \partial_3 f_3(\underline{r}_0) \end{pmatrix}$$

$R^3 \to R$ típusú függvények (három változós függvények = skalármezők)

$$f'(\underline{r}_0)=\operatorname{grad} f(\underline{r}_0)=\left(\partial_1 f(\underline{r}_0), \partial_2 f(\underline{r}_0), \partial_3 f(\underline{r}_0)\right)$$

$R \to R^3$ típusú függvények (térgörbék)

$$\underline{f}'(t_0)=\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(t_0) \\ \partial_1 f_2(t_0) \\ \partial_1 f_3(t_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ f_2'(t_0) \\ f_3'(t_0) \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: differenciál

Ha az $\underline{f}$:D($\subseteq$R^n)$\rightarrow$R^m függvény differenciálható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor az $\underline{f}$ függvény $\underline{x}_0$ pontbeli, $\underline{x}$–hez tartozó differenciálja:

$$f\,'(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0) = f\,'(\underline{x}_0)\cdot\Delta\underline{x}\ .$$

Definíció: lineáris közelítés

Ha az f:D($\subseteq$R^n) $\rightarrow$ R^m függvény differenciálható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor az $\underline{f}$ függvény $\underline{x}_0$ pontbeli lineáris közelítése:

$$\underline{f}(\underline{x}) \approx \underline{f}(\underline{x}_0) + \underline{f}\,'(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0) = \underline{f}(\underline{x}_0) + \underline{f}\,'(\underline{x}_0)\cdot\Delta\underline{x},$$

avagy: $\Delta\underline{f} = \underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0) \approx \underline{f}\,'(\underline{x}_0)\cdot\Delta\underline{x}.$