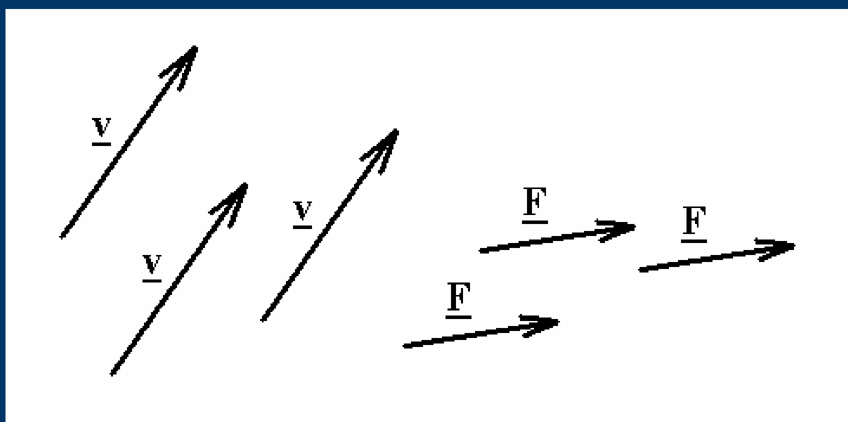
Vektoralgebra

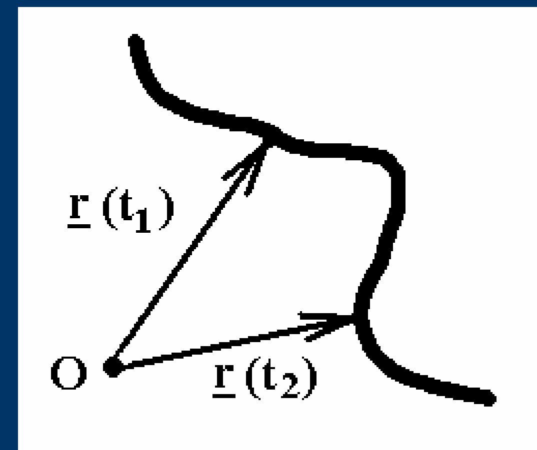
Ebben a részben a vektorokat aláhúzással jelöljük

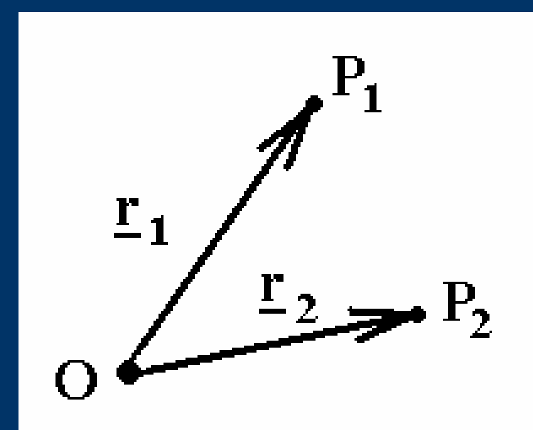
Szabadvektorok

Helyzetvektorok (kötött vektorok)

Az irányított szakaszok halmazán az eltolás, mint ekvivalencia reláció, által generált osztályok







helyzetvektorok ⟷ **pontok**

Vektor jellemzői

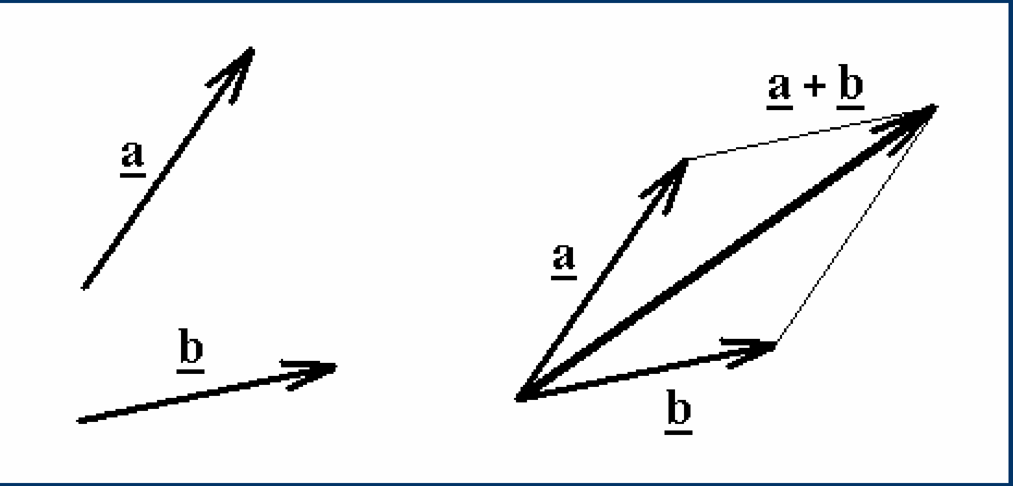
- **hossz (nagyság): $|\underline{a}|$**
- **irány**
- **helyzetvektor esetén: a vonatkoztatási pont helye**

Speciális vektorok:

- **nullvektor: $\underline{0}$**
- **egységvektor: $|\underline{v}| = 1$**

A vektorműveletek geometriai értelmezése

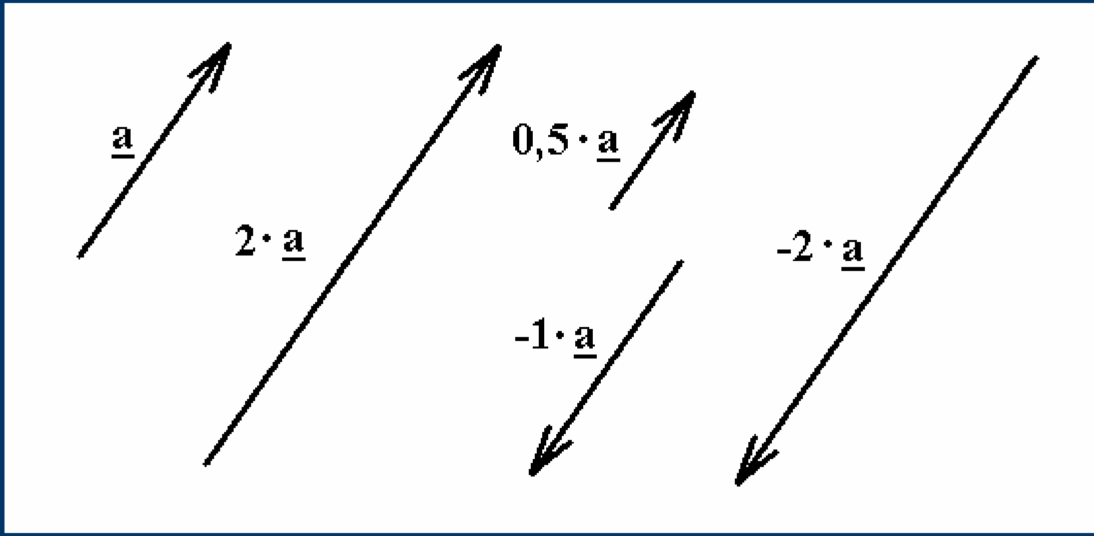
Definíció: összeadás



Az összeadás tulajdonságai:

- $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
- $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$
- $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$
- $\underline{a} + (- \underline{a}) = \underline{0}$

Definíció: szorzás számmal



A számmal való szorzás tulajdonságai:

- $t \cdot (s \cdot \underline{a}) = (t \cdot s) \cdot \underline{a}$
- $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$
- $(t + s) \cdot \underline{a} = t \cdot \underline{a} + s \cdot \underline{a}$
- $t \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = t \cdot \underline{a} + t \cdot \underline{b}$

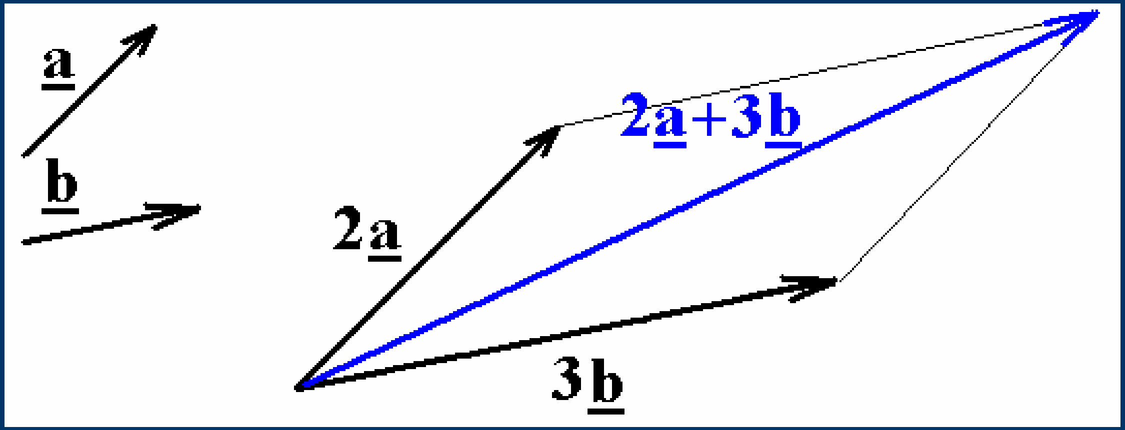
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: lineáris kombináció

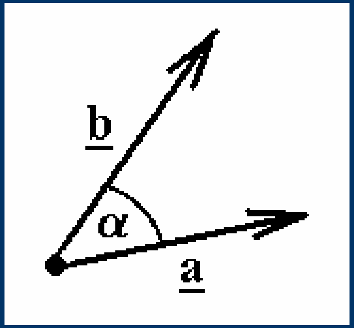
Az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, … , $\underline{a}_n$ vektoroknak a t_1, t_2, … , t_n számokkal képzett lineáris kombinációja a

$$t_1 \cdot \underline{a}_1 + t_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + t_n \cdot \underline{a}_n$$

vektor.

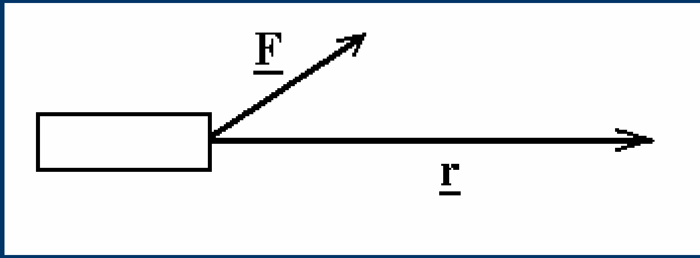


Definíció: skaláris szorzás



$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\,\underline{a}\,| \cdot |\,\underline{b}\,| \cdot \cos\alpha$$

Egy fizikai példa: $W = F \cdot r \cdot \cos\alpha = \underline{F} \cdot \underline{r}$

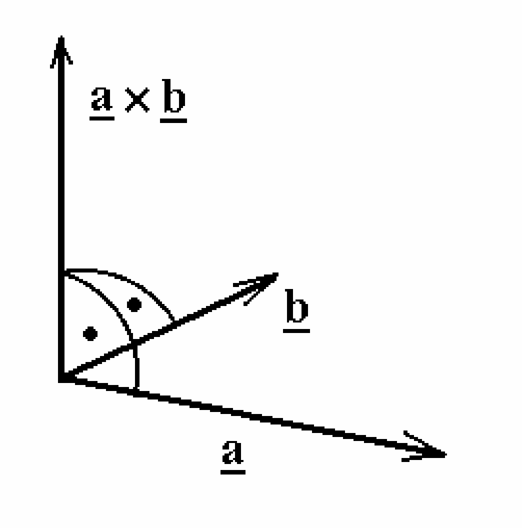


Megjegyzés

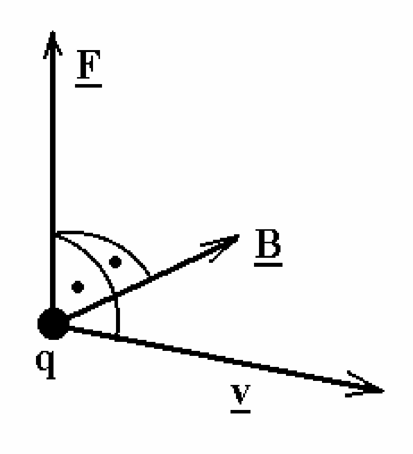
$\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontosan akkor merőlegesek, ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

Definíció: vektoriális szorzás

Az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt az $\underline{a}\times\underline{b}$-vel jelölt vektort értjük, melyre



- $|\,\underline{a}\times\underline{b}\,| = |\,\underline{a}\,|\cdot|\,\underline{b}\,|\cdot\sin\alpha$
- $\underline{a} \perp \underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{b}$
- $(\underline{a}\,,\,\underline{b}\,,\,\underline{a}\times\underline{b})$ **jobbsodrású rendszer**



Egy fizikai példa:

$$\underline{F} = q\cdot(\underline{v}\times\underline{B})$$

A vektoriális szorzás tulajdonságai

- $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$
- $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$
- $(t \cdot \underline{a}) \times \underline{b} = t \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$

Tétel

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontosan akkor párhuzamos, ha $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

Definíció: vegyes szorzás

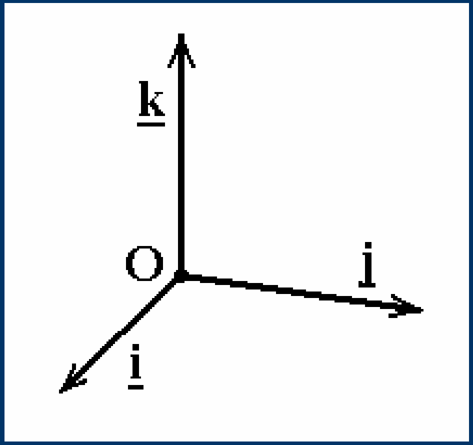
$$\underline{abc} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$$

Definíció: derékszögű koordinátarendszer

Ha az i , j , k egységvektorok

- **páronként merőlegesek**
- **ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak**
- **O a tér egy rögzített pontja**

akkor az (O, i , j , k) négyest derékszögű koordinátarend-szernek nevezzük.



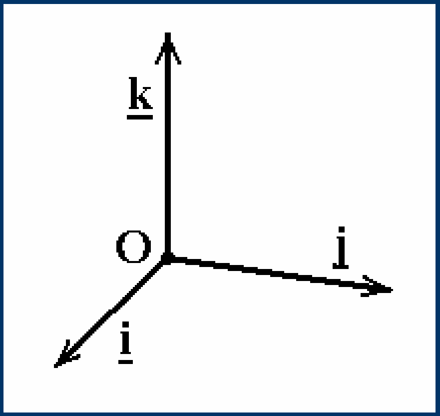
NEM NYOMTATÁSRA!

Elnevezések

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$: bázisvektorok

{ $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ } : bázis (ortonormált vektorrendszer)

O : a koordinátarendszer kezdőpontja



Megjegyzések

A skaláris és a vektoriális szorzás definíciója, illetve tulajdonságai alapján:

$$\underline{i}\cdot\underline{i} = 1,\ \underline{j}\cdot\underline{j} = 1,\ \underline{k}\cdot\underline{k} = 1,\ \underline{i}\cdot\underline{j} = 0,\ \underline{i}\cdot\underline{k} = 0,\ \underline{j}\cdot\underline{k} = 0$$

továbbá

$$\underline{i}\times\underline{i} = \underline{0},\ \underline{j}\times\underline{j} = \underline{0},\ \underline{k}\times\underline{k} = \underline{0},\ \underline{i}\times\underline{j} = \underline{k},\ \underline{j}\times\underline{k} = \underline{i},\ \underline{k}\times\underline{i} = \underline{j}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

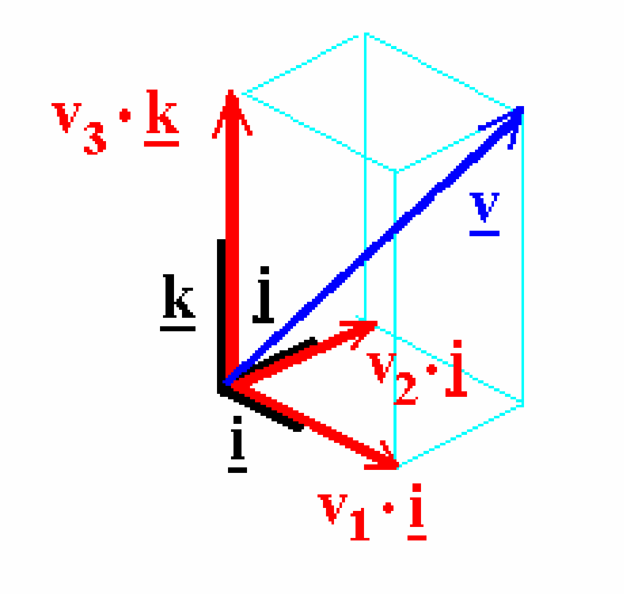
Tétel

Minden $\underline{v}$ vektor egyértelműen előállítható az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$$

Definíció: koordináták

A v_1, v_2, v_3 számokat a $\underline{v}$ vektor koordinátáinak nevezzük.

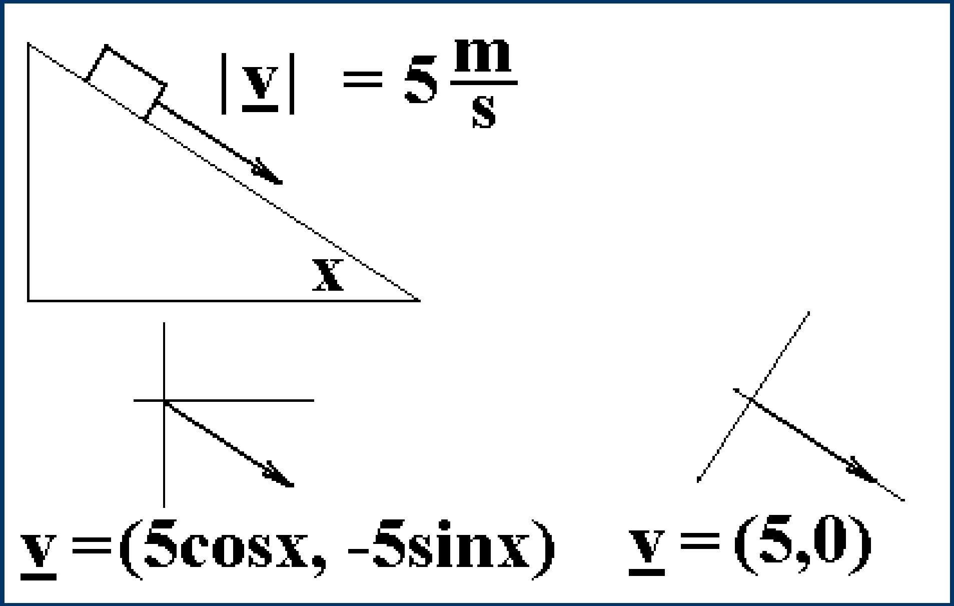


NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Egy vektor koordinátái különböző koordináta-rendszerekben különbözőek !

A koordinátarend-szer megválasztása befolyásolhatja a számítások bonyolultságát:

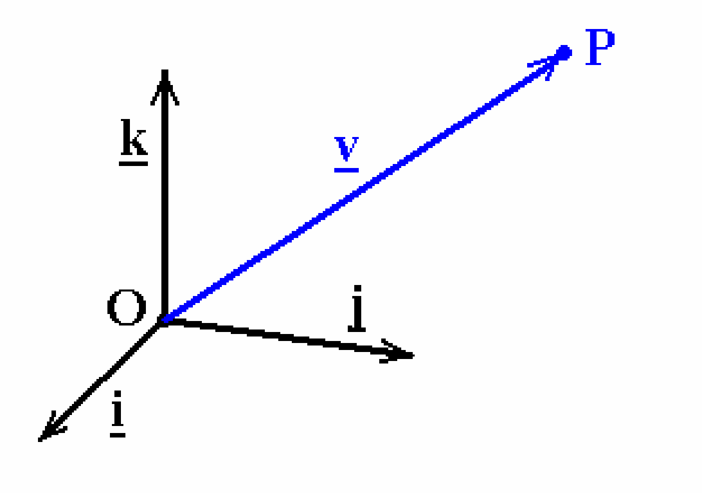


NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: pont koordinátái

Egy pont koordinátáinak a pontba mutató helyzetvektor koordinátáit nevezzük.

$$P = (v_1, v_2, v_3)$$



Ha adott egy koordinátarendszer, akkor R^3 és a geometriai tér pontjai (vektorai) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ennek alapján a geometriai problémák R^3–beli számításokkal megoldhatók („a vektorok koordinátáival kell számolni”).

Számolás a koordinátákkal

Összeadás

Ha $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ és $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$, akkor

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1+b_1 , a_2+b_2 , a_3+b_3)$$

Szorzás számmal

Ha $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ és $t \in \mathbf{R}$, akkor

$$t \cdot \underline{a} = (t \cdot a_1 , t \cdot a_2 , t \cdot a_3)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ vektor hossza (normája):

$$|\,\underline{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Az $\underline{a} \neq \underline{0}$ vektorral egyirányú egységvektor:

$$\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}$$

Példa

Az $\underline{a}$ = (2,1,2) vektorral egyirányú egységvektor :

$$|\,\underline{a}\,| = \sqrt{9} = 3$$

$$\underline{a}^0 = \frac{1}{3} \cdot \underline{a} = \frac{1}{3} \cdot (2,1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Az $\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ és a $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vektorok $\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$ formulával értelmezett skaláris szorzata:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Ez megegyezik az R^3-beli skaláris szorzással.

Indoklás

Az

$$\underline{i}\cdot\underline{i} = 1,\ \underline{j}\cdot\underline{j} = 1,\ \underline{k}\cdot\underline{k} = 1,\ \underline{i}\cdot\underline{j} = 0,\ \underline{i}\cdot\underline{k} = 0,\ \underline{j}\cdot\underline{k} = 0$$

egyenlőségeket felhasználva:

$$(a_1\cdot\underline{i} + a_2\cdot\underline{j} + a_3\cdot\underline{k}) \cdot (b_1\cdot\underline{i} + b_2\cdot\underline{j} + b_3\cdot\underline{k}) =$$

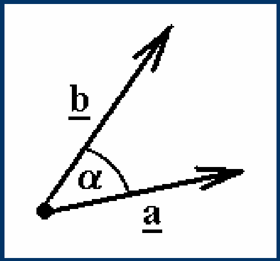
$$= a_1\cdot\underline{i}\cdot b_1\cdot\underline{i} + a_2\cdot\underline{j}\cdot b_2\cdot\underline{j} + a_3\cdot\underline{k}\cdot b_3\cdot\underline{k} + a_1\cdot\underline{i}\cdot b_2\cdot\underline{j} + a_1\cdot\underline{i}\cdot b_3\cdot\underline{k} +$$

$$+ a_2\cdot\underline{j}\cdot b_1\cdot\underline{i} + a_2\cdot\underline{j}\cdot b_3\cdot\underline{k} + a_3\cdot\underline{k}\cdot b_1\cdot\underline{i} + a_3\cdot\underline{k}\cdot b_2\cdot\underline{j} =$$

$$= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Vektorok szögének kiszámítása



$$\cos\alpha = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\,\underline{a}\,|\cdot|\,\underline{b}\,|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Példa

Az $\underline{a}$ = (2,-4,5) és a $\underline{b}$ = (3,1,2) vektorok szöge:

$$\cos\alpha = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\,\underline{a}\,|\cdot|\,\underline{b}\,|} = \frac{2\cdot 3 + (-4)\cdot 1 + 5\cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2}\cdot\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{14}} = 0.48$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 68°$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A koordinátatengelyekre eső merőleges vetületek

Vetületek hossza (= *koordináták*):

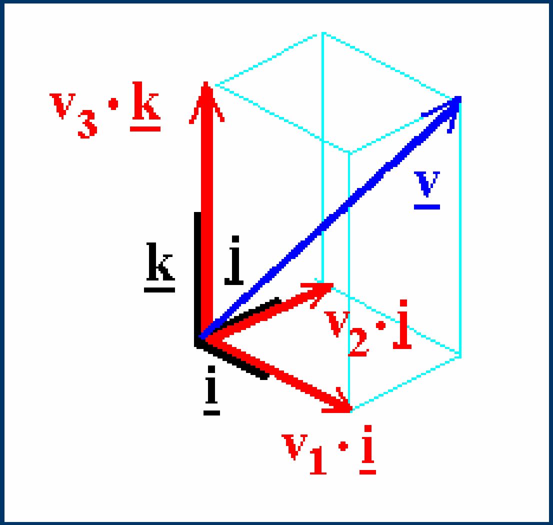
$$v_1 = \underline{v} \cdot \underline{i}\ ,\ v_2 = \underline{v} \cdot \underline{j}\ ,\ v_3 = \underline{v} \cdot \underline{k}$$

Vetületvektorok:

$$\underline{v}_1 = v_1 \cdot \underline{i} = (\underline{v} \cdot \underline{i}) \cdot \underline{i}$$

$$\underline{v}_2 = v_2 \cdot \underline{j} = (\underline{v} \cdot \underline{j}) \cdot \underline{j}$$

$$\underline{v}_3 = v_3 \cdot \underline{k} = (\underline{v} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{k}$$



$$\underline{v} = (\underline{v} \cdot \underline{i}) \cdot \underline{i} + (\underline{v} \cdot \underline{j}) \cdot \underline{j} + (\underline{v} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{k}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

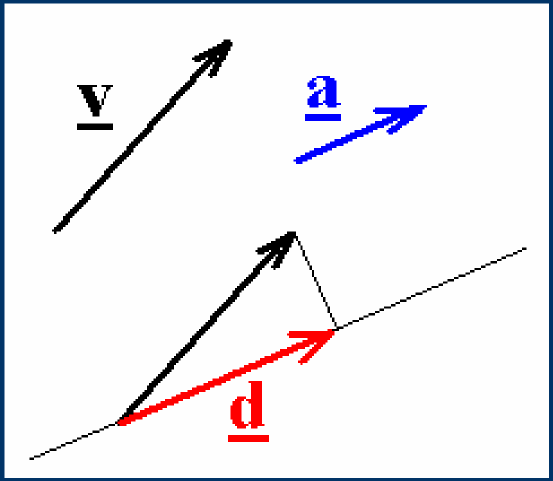
Vektor merőleges vetülete adott irányra

A v vetületének hossza az a irányban:

$$|\underline{\mathbf{d}}| = |\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{a}}^0|$$

Vetületvektor:

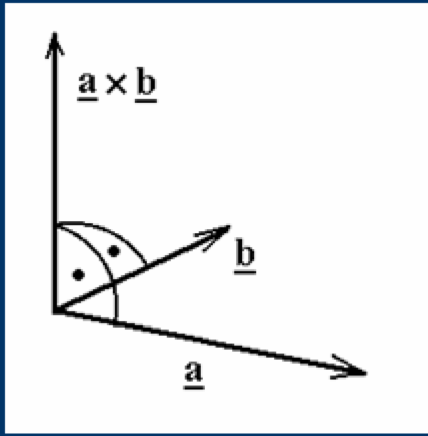
$$\underline{\mathbf{d}} = (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{a}}^0) \cdot \underline{\mathbf{a}}^0$$



A vektoriális szorzat kiszámítása a koordinátákkal

Ha $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$, akkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 , -a_1 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_1 , a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$$



Emlékeztető

- $| \underline{a} \times \underline{b} | = | \underline{a} | \cdot | \underline{b} | \cdot \sin\alpha$
- $\underline{a} \perp \underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{b}$
- ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a}\times\underline{b}$) jobbsodrású rendszer

Indoklás

Az

$$\underline{i}\times\underline{i} = 1,\ \underline{j}\times\underline{j} = 1,\ \underline{k}\times\underline{k} = 1,\ \underline{i}\times\underline{j} = 0,\ \underline{i}\times\underline{k} = 0,\ \underline{j}\times\underline{k} = 0$$

egyenlőségeket felhasználva:

$$(a_1\cdot\underline{i} + a_2\cdot\underline{j} + a_3\cdot\underline{k}) \times (b_1\cdot\underline{i} + b_2\cdot\underline{j} + b_3\cdot\underline{k}) =$$

$$= a_1\cdot b_1\cdot\underline{i}\times\underline{i} + a_2\cdot b_2\cdot\underline{j}\times \underline{j} + a_3\cdot b_3\cdot\underline{k}\times\underline{k} +$$

$$+ a_1\cdot b_2\cdot\underline{i}\times\underline{j} + a_1\cdot b_3\cdot\underline{i}\times\underline{k} + a_2\cdot b_1\cdot\underline{j}\times\underline{i} +$$

$$+ a_2\cdot b_3\cdot\underline{j}\times \underline{k} + a_3\cdot b_1\cdot \underline{k}\times\underline{i} + a_3\cdot b_2\cdot\underline{k}\times\underline{j} =$$

$$= (a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2)\cdot\underline{i} + (-a_1\cdot b_3+a_3\cdot b_1)\cdot\underline{j} + (a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)\cdot\underline{k}$$

A számolás könnyebben megjegyezhető ebben a formában:

$$\underline{a}\times\underline{b}=\det\begin{pmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$$

Ez az írásmód azt jelképezi, hogy a vektori szorzat úgy számolandó, mintha formálisan egy harmadrendű mátrix determinánsát számítanánk ki.

Példa

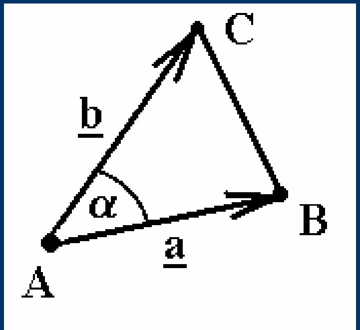
$\underline{a}$ = (4,5,-1), $\underline{b}$ = (2,3,6)

$$\underline{a}\times\underline{b}=\det\begin{pmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 4 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 6\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 6\end{pmatrix}\cdot\underline{i}-\det\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\underline{j}+$$

$$+\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\underline{k}=33\cdot\underline{i}-26\cdot\underline{j}+2\cdot\underline{k}=(33,-26,2)$$

Csúcspontjaival adott háromszög területének kiszámítása

$$T = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{2}$$



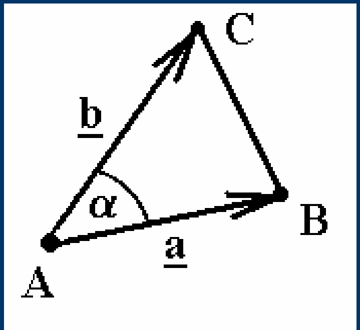
Megjegyzés

Az fenti képlet összefügg a háromszög területét megadó, jól ismert formulával: ha a és b a háromszög két oldala, α a két oldal által bezárt szög, akkor

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa



A = (1,3,0), B = (5,8,-1), C = (3,6,6)

$\underline{a}$ = (4,5,-1), $\underline{b}$ = (2,3,6)

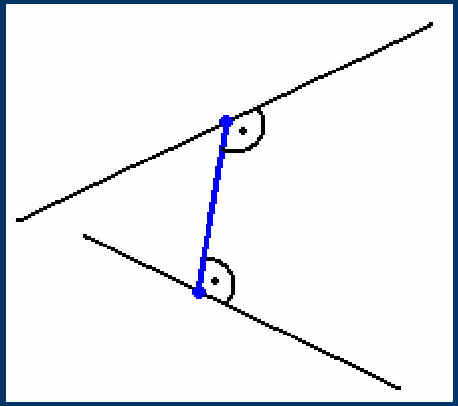
$$\underline{a} \times \underline{b} = (33, -26, 2)$$

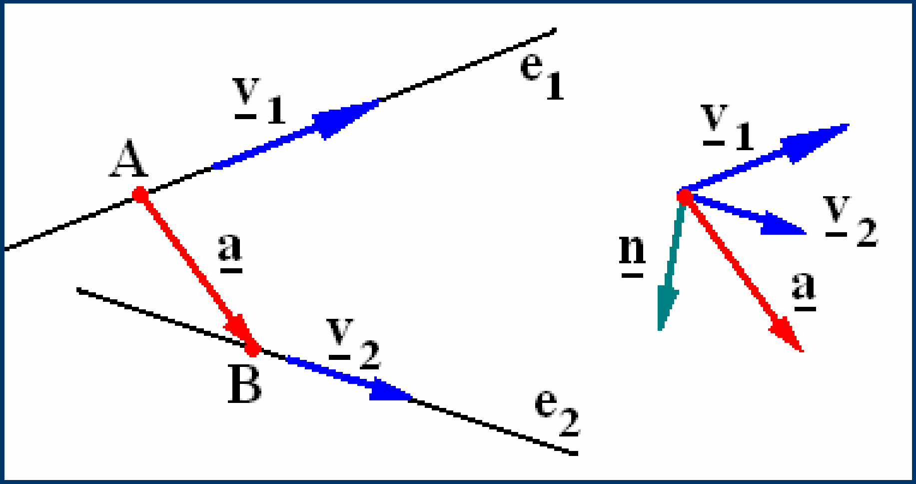
$$|\,\underline{a} \times \underline{b}\,| = \sqrt{33^2 + (-26)^2 + 2^2} = \sqrt{1769} = 42{,}1$$

$$T = \frac{|\,\underline{a} \times \underline{b}\,|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{33^2 + (-26)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1769} = 21$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Kitérő egyenesek távolsága





Ha a kitérő egyenesek irányvektorai $\underline{v}_1$ ill. $\underline{v}_2$, akkor az $\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektor párhuzamos az egyenesek normál transzverzálisával.

Ha A az e_1 egyenes, B az e_2 egyenes egy pontja, akkor az egyenesek távolsága megegyezik az a vektornak az $\underline{n}$ irányra eső merőleges vetületének hosszával.

NEM NYOMTATÁSRA!

A vegyes szorzat kiszámítása koordinátákkal

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$, akkor

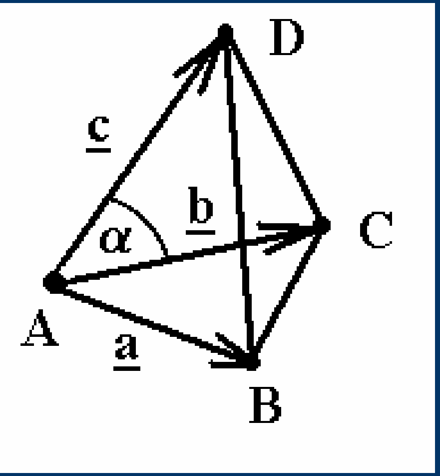
$$\underline{abc} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Emlékeztető

$$\underline{abc} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$$

Csúcspontjaival adott tetraéder térfogata

$$V = \frac{|\underline{abc}|}{6}$$



Példa

A = (1,3,0), B = (5,8,-1), C = (3,6,6), D = (-4,-3,0)

a = (4,5,-1), b = (2,3,6), c = (-5,-6,0)

$$\underline{abc} = \det\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -9$$

$$V = \frac{|\underline{abc}|}{6} = \frac{|-9|}{6} = 1{,}5$$