A valós számok halmaza

A valós számok halmazának alapvető tulajdonságai

A valós számok halmazának azonosítására alkalmas az alábbiakban felsorolt tulajdonságok összessége.

A tulajdonságok (axiómák) 3 csoportja:

- **test axiómák**
- **rendezési axióma**
- **teljességi axióma**

Megjegyzés

Ezeket a tulajdonságokat mindenki természetes módon használja a számolások során.

Test axiómák

Értelmezve van egy +:R×R→R művelet (összeadás), melyre fennállnak a következő tulajdonságok:

+ kommutatív, azaz minden a,b∈R esetén

$$a + b = b + a$$

+ asszociatív, azaz minden a,b,c∈R esetén

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Létezik additív egység, azaz létezik 0∈R elem, amelyre minden a∈R esetén

$$a + 0 = a$$

Létezik additív inverz, azaz minden a∈R esetén létezik olyan (-a)∈R elem, amelyre

$$a + (-a) = 0$$

Értelmezve van egy ●:R×R→R művelet (szorzás), melyre fennállnak a következő tulajdonságok

● kommutatív, azaz minden a,b∈R esetén

$$a \bullet b = b \bullet a$$

● asszociatív, azaz minden a,b,c∈R esetén

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Létezik multiplikatív egység, azaz létezik 1∈R elem, amelyre minden a∈R esetén

$$1 \bullet a = a$$

Az additív egységen kívül minden elemnek létezik multiplikatív inverze, azaz minden 0≠a∈R esetén létezik olyan a^{-1} ∈R elem, amelyre

$$a \bullet (a^{-1}) = 1$$

Az összeadás és a szorzás műveleteket összekapcsolja a

disztributivitás, azaz minden a,b,c∈R esetén

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

Megjegyzés

További jelölések:

Kivonás: $a - b = a + (-b)$

Osztás: $a / b = a \bullet b^{-1}$

Rendezési axióma

Az R halmazon értelmezve van egy olyan ≤ rendezési reláció, amely az összeadás és a szorzás műveletekkel a következő kapcsolatban van: bármely $a,b,c \in \mathbf{R}$ esetén

ha $a \leq b$, akkor $a + c \leq b + c$

ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor $a \bullet b \geq 0$

Megjegyzés

További jelölések:

Azt, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$ úgy jelöljük, hogy $a < b$

A pozitív számok halmaza: $\mathbf{R}_+ = \{ x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \}$

A negatív számok halmaza: $\mathbf{R}_- = \{ x \in \mathbf{R} \mid x < 0 \}$

Az test axiómákat és a rendezési axiómát teljesítő halmazokat rendezett testeknek nevezzük.

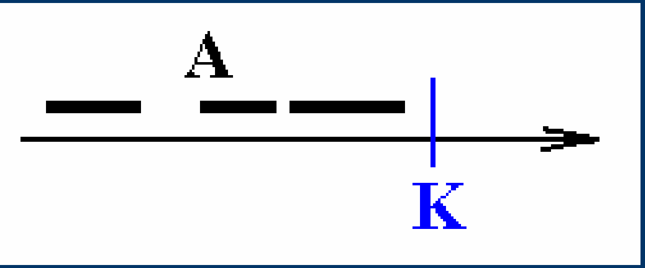
A valós számok halmaza mellett például a racionális számok halmaza is rendezett test.

A valós számok halmazának itt leírt axiómarendszerhez tartozó tulajdonságok közül egyedül a teljességi axiómát nem teljesíti a racionális számok halmaza.

Rendezett halmazban bármely két elem összehasonlítható, így értelmezhető az alsó és felső korlát, valamint a korlátosság fogalma. A teljességi axióma megfogalmazása előtt a korlátosság fogalmát kell definiálnunk.

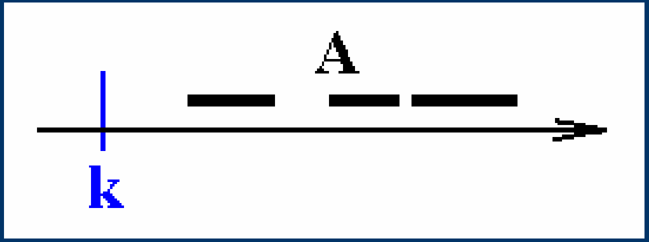
Definíció: felülről korlátos halmaz

Az $A \subset \mathrm{R}$ halmaz felülről korlátos, ha van olyan K valós szám, amely nagyobb vagy egyenlő az A halmaz minden eleménél (*minden $a \in A$ esetén $a \leq K$*)



Definíció: alulról korlátos halmaz

Az $A \subset \mathrm{R}$ halmaz alulról korlátos, ha van olyan k valós szám, amely kisebb vagy egyenlő az A halmaz minden eleménél (*minden $a \in A$ esetén $k \leq a$*)



Megjegyzések

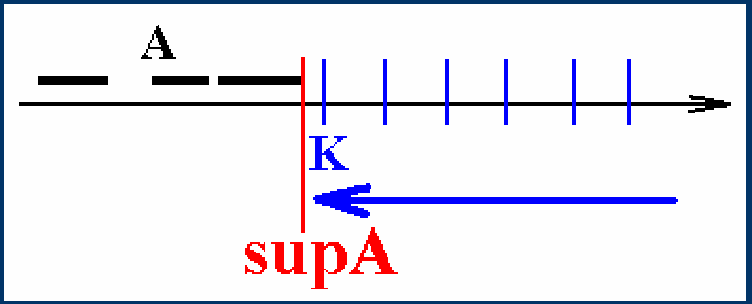
1. Vegyük észre, hogy a korlát nem feltétlenül eleme a halmaznak!

2. Ha az A⊂R halmaz felülről korlátos, akkor végtelen sok felső korlátja van.

Definíció: szupremum

A legkisebb felső korlátot (ha van ilyen) pontos felső korlátnak (vagy szupremumnak) nevezzük.

Jelölése: sup A



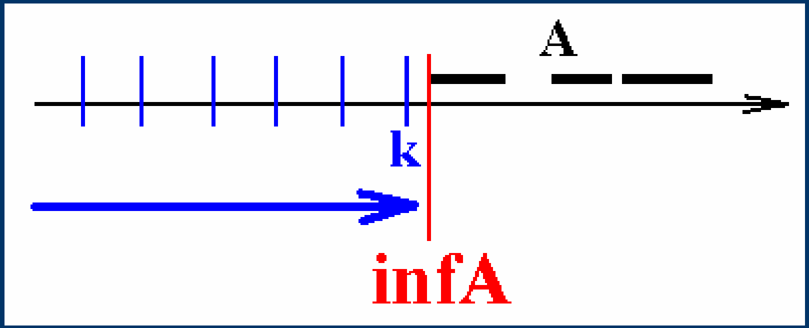
Megjegyzés

Ha az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van.

Definíció: infinum

A legnagyobb alsó korlátot (ha van ilyen) pontos alsó korlátnak (vagy infinumnak) nevezzük.

Jelölése: inf A



Teljességi axióma

A valós számok halmazában bármely nem üres, felülről korlátos részhalmaznak van valós pontos felső korlátja.

Vagyis a pontos felső korlát fogalma nem mutat ki a halmazból, szemben például a racionális számok halmazával (lásd később).

Megjegyzések

1. A teljességi axiómából az is következik, hogy R bármely nem üres, alulról korlátos részhalmazának van R-beli pontos alsó korlátja.

2. A teljességi axióma szemléletes tartalma: a valós számok halmaza „kitölti” a számegyenest, míg a racionális számok halmaza „lyukacsosan hagyja”.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

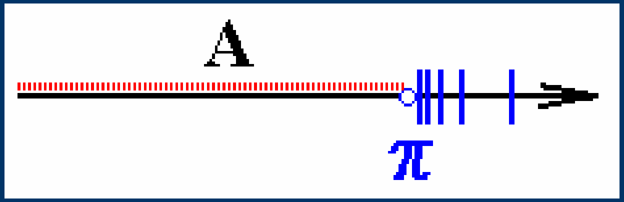
Tekintsük a racionális számok halmazát és ennek

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < \pi \}$$

részhalmazát!

Az A halmaz felülről korlátos (például a $4 \in \mathbb{Q}$ felső korlátja A-nak), de A-nak még sincs pontos felső korlátja a racionális számhalmazon belül. A pontos felső korlát csak a π szám lehetne, de az nem racionális szám.

A racionális számhalmaz tehát „lyukasan” hagyja a számegyenest a π-nél.



Definíció: maximum

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$.

$M \in A$ az A halmaz legnagyobb eleme (maximuma), ha minden $a \in A$ esetén $a \leq M$.

Jelölés: $M = \max A$

Definíció: minimum

$m \in A$ az A halmaz legkisebb eleme (minimuma), ha minden $a \in A$ esetén $m \leq a$.

Jelölés: $m = \min A$

Megjegyzés: összefüggés a pontos korlátok és a minimum, maximum között

Nem üres, felülről korlátos valós számhalmaznak mindig van pontos felső korlátja (a teljességi axióma miatt), de nem feltétlenül van legnagyobb eleme.

Nem üres, alulról korlátos valós számhalmaznak mindig van pontos alsó korlátja (a teljességi axióma miatt), de nem feltétlenül van legkisebb eleme.

Ha viszont létezik legnagyobb (legkisebb) elem, akkor az egyenlő a pontos felső (alsó) korláttal.

Példák

A=[1,2]

B=]1,2[

inf A = 1

sup A = 2

inf B = 1

sup B = 2

min A = 1

max A = 2

min A nem létezik

max A nem létezik

Természetes számok halmaza, a teljes indukció elve

Definíció: induktív halmaz

Az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz induktív, ha
- **$1 \in A$**
- **$n \in A \Rightarrow n+1 \in A$**

Induktív halmaz például: $\mathbf{R}$, $[1,+\infty[$

Definíció: a természetes számok halmaza

A legszűkebb induktív halmazt (vagyis az összes induktív halmaz metszetét) a természetes számok halmazának nevezzük. Jelölés: $\mathbf{N}$.

Definíció: sorozat

Legyen $\emptyset \neq A$.

Egy $f:N \to A$ függvényt az A halmaz elemeiből képzett sorozatnak nevezünk.

(Bármelyik nem üres halmaz elemeiből képezhető sorozat.)

Az $f:N \to A$ sorozat tömör jelölése: (f_n)

Sorozat esetén az értelmezési tartomány elemeit indexként is használhatjuk, felhasználva azok természetes sorrendjét.

$f(n) = f_n$ a sorozat n-edik eleme

$1 \to f(1)$
$2 \to f(2)$
$\vdots$
$n \to f(n)$
$\vdots$

$1 \to f_1$
$2 \to f_2$
$\vdots$
$n \to f_n$
$\vdots$

A teljes indukció elve

A teljes indukció elve akkor alkalmazható, ha állítások egy sorozatáról akarunk valamit igazolni.

A bizonyítási mód lényege, hogy az egymást követő állítások között kimutatott kapcsolat alapján az állítás igazsága „automatikusan” adódik mindegyik állításra.

Definíció: teljes indukció

Tekintsük állítások egy (T_n) sorozatát. Ha

- **T_1 igaz és**
- **T_n igaz $\Rightarrow$ T_{n+1} igaz ($n \in \mathbb{N}$),**

akkor T_n igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megjegyzés

A bizonyítási módszer alkalmazása tehát két részből áll:

1. Az első állítás igazságát ki kell mutatni.

2. Igazolni kell, hogy egy állítás igazságából következik az őt követő állítás igazsága („öröklődés)”.

A következő példák mutatják, hogy a bizonyítás két része egymástól független, és csak együtt adják az állítássorozat bizonyítását.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Példa arra, hogy akárhány (de véges sok) állítás igazságát ellenőrizzük is, abból még nem következik a teljes állítássorozat igazsága.

Állítás:

Az 1000 000 000 000 ! számnak bármely természetes szám osztója.

(A ! jel faktoriálist jelent.)

Vizsgálat:

Az első 1000 000 000 000 természetes számra kipróbálva az állítást nyilvánvalóan igaznak találjuk.

(Persze ennyi számot legfeljebb csak számítógépes programmal tudnánk kipróbálni.)

Az állítás mégsem igaz minden természetes számra, hiszen például az 1000 000 000 000-nál nagyobb prímszámok egyikére sem igaz.

Példa

Példa arra, hogy az „öröklődés” igazolásából önmagában nem következik az állítássorozat igazsága.

Állítás:

7 osztója a $3 \cdot 5^n$ számnak bármely n természetes szám esetén.

Vizsgálat (a tulajdonság „öröklődésének” kimutatása):

Tegyük fel, hogy $7 \mid 3 \cdot 5^k$ valamely k természetes szám esetén.

Könnyen beláthatjuk, hogy ebből következik, hogy $7 \mid 3 \cdot 5^{k+1}$ hiszen:

$$3 \cdot 5^{k+1} = 5 \cdot (3 \cdot 5^k)$$

márpedig, ha a szorzat egyik tényezője oszthat egy számmal, akkor a szorzat is. Az „öröklődés” tehát működne.

De kipróbálva az első állítást, vagyis amikor n=1, látjuk hogy nem igaz.

Sőt könnyen belátható, hogy valójában egyetlen n természetes szám esetén sem igaz az állítás.

A teljes indukció elvének egy alkalmazása: a Binomiális tétel bizonyítása

Jelölés: faktoriális

Ha n pozitív egész szám, akkor

$$n! = 1\cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Továbbá definíció szerint: $0! = 1$

Jelölés: binomiális együtthatók

Ha n pozitív egész szám, k pedig nem negatív egész szám és n≥k, akkor

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tétel: binomiális tétel

Ha n pozitív egész szám, a és b valós számok, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Részletezve:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A binomiális tétel állítása kéttagú összegek pozitív egész kitevős hatványairól szól. Úgy is szoktunk fogalmazni, hogy a formula a hatvány kifejtésének módját mutatja.

Példák

Második hatványra emelés:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}\cdot a^2\cdot b^0 + \binom{2}{1}\cdot a^1\cdot b^1 + \binom{2}{2}\cdot a^0\cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Harmadik hatványra emelés:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}\cdot a^3\cdot b^0 + \binom{3}{1}\cdot a^2\cdot b^1 + \binom{3}{2}\cdot a^1\cdot b^2 + \binom{3}{3}\cdot a^0\cdot b^3 =$$

$$= a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A binomiális együtthatók két tulajdonsága

A bizonyításban felhasználjuk a binomiális együtthatók alábbi tulajdonságait:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

A definíció alapján mindkét egyenlőség könnyen ellenőrizhető.

Bizonyítás

1. lépés: az első állítás ellenőrzése

n = 1 esetén az állítás nyilvánvalóan fennáll:

$$(a+b)^1 = a + b$$

2. lépés: az „öröklődés igazolása”

Ennél a lépésnél azt próbáljuk kimutatni, hogy ha az állítás igaz lenne valamely n-re, akkor igaz lenne (n+1)-re is.

Fontos megérteni, hogy itt nem azt igazoljuk, hogy az állítás igaz (n+1)-re, hanem azt, hogy ha a feltételezésünk fennáll, akkor igaz (n+1)-re.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely n pozitív egész számra, azaz

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n$$

Ahhoz, hogy a tétel állítását a teljes indukció elve alapján bizonyítsuk azt kell megmutatni, hogy az előbbi feltételezésből következik az állítás igazsága az n+1 számra is, azaz

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}\cdot a^{n+1}\cdot b^0+\binom{n+1}{1}\cdot a^n\cdot b^1+\ldots+\binom{n+1}{n}\cdot a^1\cdot b^n+\binom{n+1}{n+1}\cdot a^0\cdot b^{n+1}$$

Ennek megmutatásához az utóbbi egyenlőség jobb oldalát alakítjuk célszerűen úgy, hogy a feltételben szereplő összefüggést fel tudjuk használni.

NEM NYOMTATÁSRA!

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n \cdot a + (a+b)^n \cdot b =$$

$$= \binom{n}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^n \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^2 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^1 \cdot b^n +$$

$$+ \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^1 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^n + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^{n+1}$$

Az egyenlőség jobb oldalán lévő tagokat célszerűen csoportosítva, és felhasználva a binomiális együtthatók tulajdonságait, éppen a kívánt formát kapjuk az $(a+b)^{n+1}$ kifejezésre:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \binom{n+1}{1} \cdot a^n \cdot b^1 + \ldots + \binom{n+1}{n} \cdot a^1 \cdot b^n + \binom{n+1}{n+1} \cdot a^0 \cdot b^{n+1}$$

További speciális halmazok

Egész számok halmaza:

$$Z = N \cup \{0\} \cup \{ -n \mid n \in N \}$$

Racionális számok halmaza:

$$Q = \{ p / q \mid p \in Z, q \in N \}$$

A valós számok bővített halmaza:

$$R_b = R \cup \{ -\infty \} \cup \{ +\infty \}$$

A $-\infty$ és a $+\infty$ szimbólumokkal nem lehet úgy számolni, mint a valós számokkal. Vannak azonban olyan esetek, amikor formálisan műveleteket végezhetünk ezekkel is.

Számolás a - ∞ és a + ∞ szimbólumokkal

Bizonyos körülmények között, például a határérték-számításnál, a -∞ és a +∞ szimbólumokkal formálisan elvégezhetünk műveleteket.

Például:

ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$-\infty < x < +\infty, \quad x + (+\infty) = +\infty, \quad x - (+\infty) = -\infty,$$

$$x / (+\infty) = x / (-\infty) = 0$$

ha $0 < x \in \mathbb{R}$, akkor

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = -\infty$$

továbbá

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty), \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty),$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty)$$

Abszolút érték függvény

$$|x| = \begin{cases} x \;, \text{ha } x \geq 0 \\ -x, \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbf{R}$

Tulajdonságok:

- $| x | \geq 0$, $(| x | = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
- $| x | = | -x |$
- $| \lambda \cdot x | = | \lambda | \cdot | x |$
- $| x + y | \leq | x | + | y |$

Definíció: a valós számok távolsága

A

$$d(x,y) = | x - y |$$

értéket az x és az y valós számok távolságának nevezzük.

Tulajdonságok: minden $x,y \in \mathbb{R}$ esetén

- $d(x,y) \geq 0 \quad (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y)$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
  (háromszög egyenlőtlenség)

Definíció: a valós számok nagysága

Az $|x|$ értéket az x valós szám normájának (nagyságának) nevezzük.

Tulajdonságok: minden $x,y \in \mathbf{R}$ esetén

- $|x| \geq 0$ $(|x| = 0 \Leftrightarrow x=0)$
- $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

Definíció: valós számhalmaz korlátossága

Egy $A \subset \mathbf{R}$ halmaz korlátos, ha van olyan $K \in \mathbf{R}$ melyre minden $x \in A$ elem esetén

$$|x| \leq K$$

(az A-beli elemek nagysága nem nagyobb, mint K)

Megjegyzés

Egy $A \subset \mathbf{R}$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha van alsó és felső korlátja.

Valós számhalmaz korlátosságának fogalmával könnyen definiálható a valós értékű függvények korlátossága:

Definíció: valós értékű függvény korlátossága

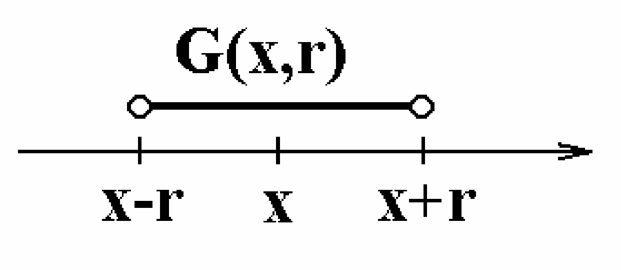
Az $f:A \to R$ függvény korlátos, ha az R_f halmaz (az f függvény értékkészlete) korlátos.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: nyílt környezet

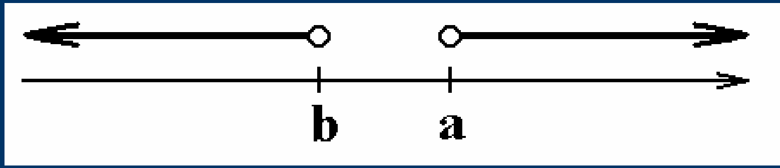
Legyen $x \in \mathbb{R}$, $0 < r \in \mathbb{R}$. Az x elem r sugarú (szimmetrikus) környezete:

$$G(x,r) = \{\, h \in \mathbb{R} \mid |x - h| < r \,\}$$



Megjegyzés

Ez nem más, mint az $]\,x - r\,,\,x + r\,[$ nyílt intervallum.



A $-\infty$ környezetei a $]-\infty,b[$ típusú nyílt intervallumok ($b \in \mathbb{R}$).

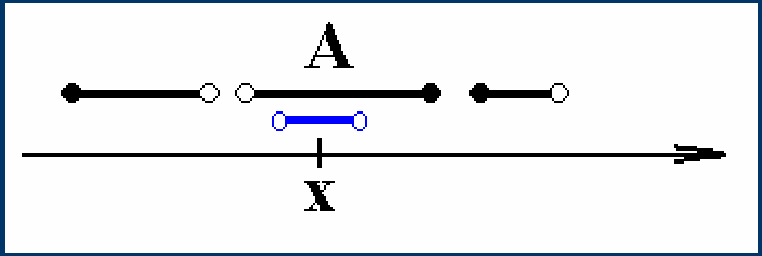
A $+\infty$ környezetei az $]a,+\infty[$ típusú nyílt intervallumok ($a \in \mathbb{R}$).

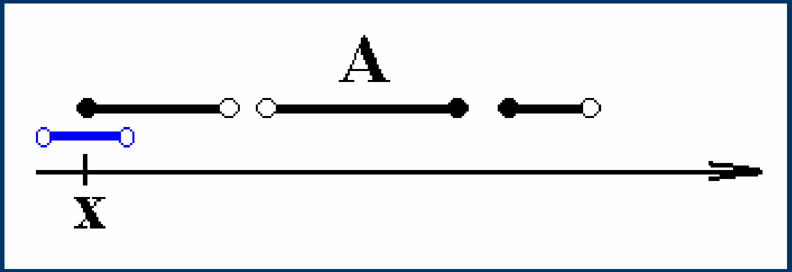
Definíció: belső pont

$x \in A$ az A halmaz belső pontja, ha x-nek van olyan G(x,r) nyílt környezete, melyre

$$G(x,r) \subset A$$

(A ponttal együtt annak egy nyílt környezete is benne van a halmazban.)



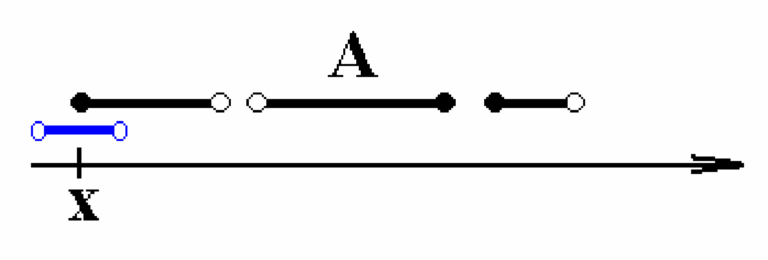


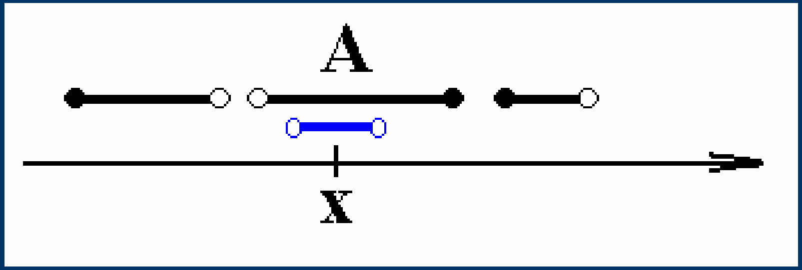
Definíció: határpont

$x \in A$ az A halmaz határpontja, ha x bármely G(x,r) nyílt környezete tartalmaz A-beli és R\A-beli pontot egyaránt

Definíció: torlódási pont

Legyen $A \subset \mathbf{R}$. $x \in \mathbf{R}$ az A halmaz torlódási pontja, ha x bármely G(x,r) nyílt környezete tartalmaz x-től különböző A-beli pontot

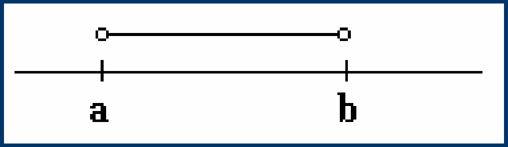




Megjegyzések

1. **A torlódási pont nem feltétlenül eleme a halmaznak.**
2. **A belső pontok egyben torlódási pontok is.**

Példák



Az]a,b[nyílt intervallum

- **minden pontja belső pont**
- **minden pontja torlódási pont**
- **az a és a b végpontok torlódási pontok**

Az [a,b] zárt intervallum esetén

- **az a és a b végpontok határpontok**
- **a végpontok kivételével minden pont belső pont**
- **az intervallum minden pontja torlódási pont**

Komplex számok

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció

A $C=R^2$ halmazt a **komplex számok** halmazának nevezzük, amennyiben az összeadás és a szorzás műveletek a következő módon vannak definiálva:

Ha $(a,b)\in C$ és $(c,d)\in C$, akkor

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c)$$

Megjegyzés

C test a fenti műveletekkel. Lásd a test axiómákat a valós számok című fejezetben.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: nevezetes komplex számok

Additív egység: $(0,0) = 0$

Multiplikatív egység: $(1,0) = 1$

Imaginárius egység: $(0,1) = i$

A komplex számok halmazának definíciójában szereplő szorzás művelet szerint:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

azaz:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\boxed{(a, b)\cdot(c, d) = (a\cdot c - b\cdot d,\ a\cdot d + b\cdot c)}$$

Megjegyzések

1. A (0,-1) komplex számnak is -1 a négyzete.

2. A komplex számok halmazában a gyökvonás – ahogyan azt a későbbiekben látni fogjuk – korlátlanul elvégezhető, így például a negatív valós számokból négyzetgyök vonható.

Például a (-16)-nak négyzetgyöke a 4i, hiszen

$$(4\cdot i)^2 = 16\cdot i^2 = 16\cdot(-1) = -16$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

A komplex számok halmazának $\{ (a,0) \mid a \in \mathbf{R} \}$ részhalmaza azonosítható a valós számok halmazával az $a \leftrightarrow (a,0)$ megfeleltetés alapján.

Ebben az értelemben a valós számok halmaza a komplex számhalmaz részhalmazának tekinthető.

A továbbiakban $(a,0)$ helyett egyszerűen a-t írunk.

Megjegyzés

Ha $(a,b) \in \mathbf{C}$, akkor

$$(a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + b \cdot i$$

$$\boxed{(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c)}$$

Definíció: algebrai alak

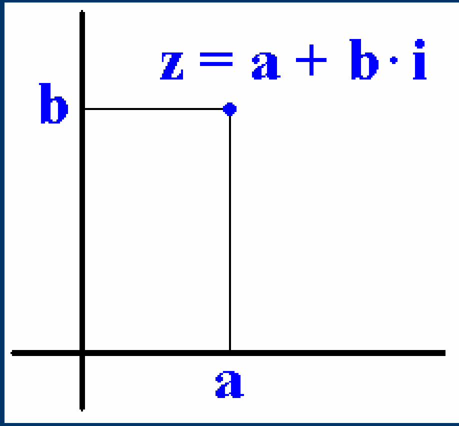
A $z=(a,b)\in \mathbf{C}$ komplex szám algebrai alakján a

$$z = a + b \cdot i$$

kifejezést értjük.

A komplex számok ábrázolása, komplex számsík

Képzetes tengely



Valós tengely

Definíció: valós és képzetes rész

A $z = (a,b) = a + b \cdot i \in \mathbf{C}$ komplex szám

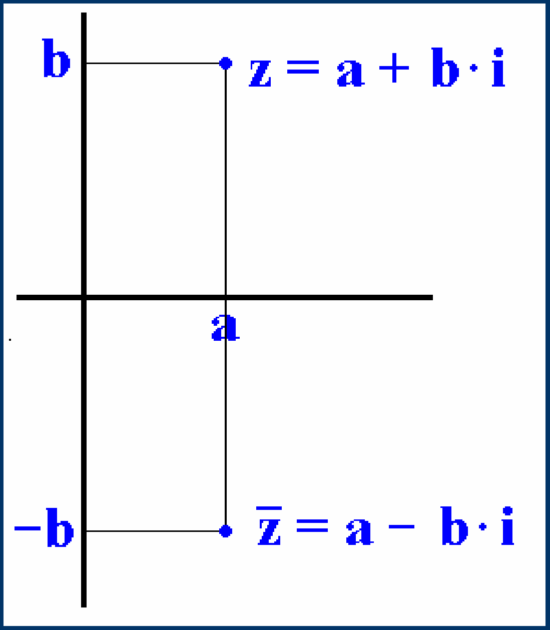
Valós része: $\mathrm{Re}(z) = a$

Képzetes része: $\mathrm{Im}(z) = b$

Definíció: konjugált

A $z = a + b \cdot i$ komplex szám konjugáltja:

$$\overline{z} = a - b \cdot i$$



Műveletek az algebrai alakban

Példák

$$(4+2\cdot i) + (3-5\cdot i) = 7 - 3\cdot i$$

$$(4+2\cdot i) - (3-5\cdot i) = 1 + 7\cdot i$$

$$(4+2i)\cdot(3-5i) = 12 - 20\cdot i + 6\cdot i - 10\cdot i^2 = 22 - 14\cdot i$$

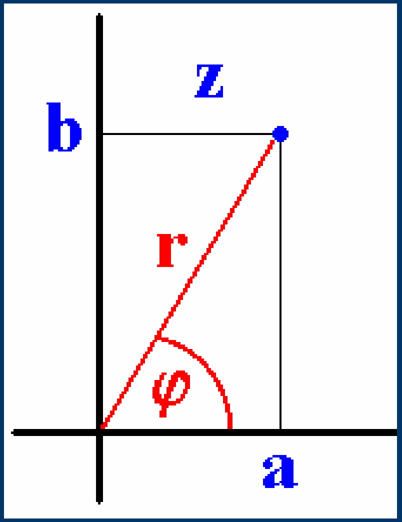
$$\frac{4+2i}{3-5i} = \frac{4+2i}{3-5i}\cdot\frac{3+5i}{3+5i} = \frac{12+20\cdot i+6\cdot i+10\cdot i^2}{9-25\cdot i^2} =$$

$$= \frac{2+26\cdot i}{34} = \frac{2}{34} + \frac{26}{34}\cdot i$$

Definíció: abszolút érték, argumentum

A $z = a + b \cdot i$ komplex szám abszolút értéke (nagysága):

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$



argumentuma (szöge):

$$\varphi \quad , \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

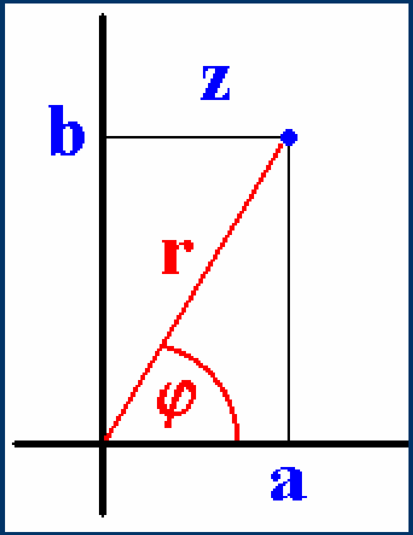
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: trigonometrikus alak

A $z = a + b \cdot i$ komplex szám trigonometrikus alakja, az $r = |z|$ jelölés, valamint az

$$a = r \cdot \cos\varphi \quad \text{és a} \quad b = r \cdot \sin\varphi$$

összefüggések felhasználásával:



$$z = a + b \cdot i =$$
$$= r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i =$$
$$= r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Megjegyzés

$180^o = \pi$ (radián)

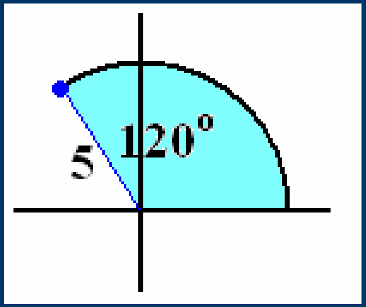
A komplex szám szögének megadására használható a fok és a radián is.

Például:

$$z = 4 \cdot (\cos 120^o + i \cdot \sin 120^o)$$

vagy

$$z = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right)$$



FIGYELEM! A szögfüggvényekben (sin, cos, tg, ctg) kizárólag abban az esetben használható a fok, ha az kifejezetten egy szög nagyságát jelenti. Az említett szögfüggvények általános definíciójában, illetve e függvények grafikonján az értelmezési tartománybeli elemek nem jelentenek fokot!

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: műveletek a trigonometrikus alakban

szorzás

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

hatványozás

$$[r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)]^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$$

osztás

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: gyökvonás

Egy komplex számnak n darab különböző n-edik gyöke van (n=2,3,…):

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Megjegyzés

Egy komplex szám n-edik gyökei a komplex számsíkban egy origó középpontú körön, egy szabályos n szög csúcsaiban helyezkednek el.

Példa

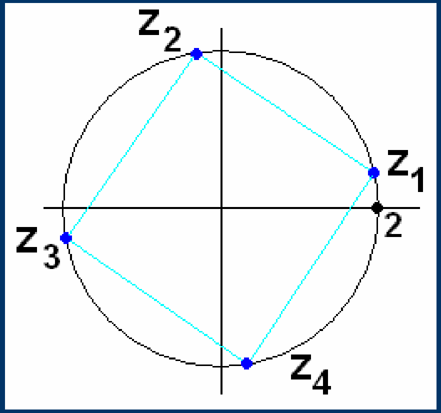
Határozzuk meg a $z = 16 \cdot (\cos 60^o + i \cdot \sin 60^o)$ komplex szám negyedik gyökeit!

$$\sqrt[4]{16 \cdot (\cos 60^o + i \cdot \sin 60^o)} =$$

$$= \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos\left(\frac{60^o}{4} + k \cdot \frac{360^o}{4} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{60^o}{4} + k \cdot \frac{360^o}{4} \right) \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\cos(15^o + k \cdot 90^o) + i \cdot \sin(15^o + k \cdot 90^o) \right)$$

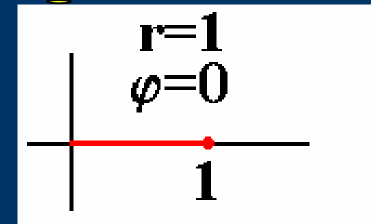
(k= 0, 1, 2,3)



k=0	$\Rightarrow$	$z_1 = 2 \cdot (\cos 15^o + i \cdot \sin 15^o)$
k=1	$\Rightarrow$	$z_2 = 2 \cdot (\cos 105^o + i \cdot \sin 105^o)$
k=2	$\Rightarrow$	$z_3 = 2 \cdot (\cos 195^o + i \cdot \sin 195^o)$
k=3	$\Rightarrow$	$z_4 = 2 \cdot (\cos 285^o + i \cdot \sin 285^o)$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: harmadik egységgyökök



1=cos0+i·sin0

A $z=1$ komplex szám harmadik gyökeit harmadik egységgyököknek nevezzük:

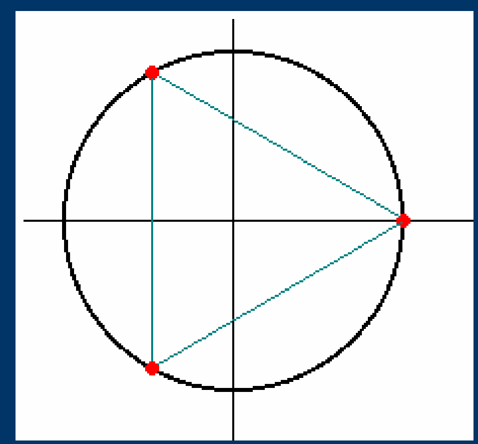
$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0)} = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$

$$z_0 = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

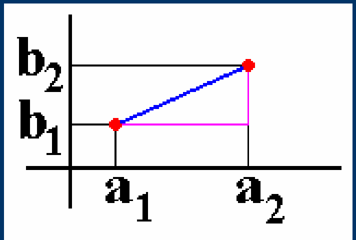


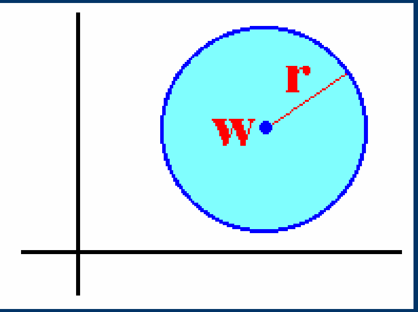
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: távolság

A $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ és a $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ komplex számok távolsága:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$





Definíció: környezet

A $w = a + b \cdot i$ komplex szám r (>0) sugarú (nyílt) környezete:

$$G(w,r) = \{ z \in \mathbf{C} : |w - z| < r \}$$