Többváltozós függvények

Riemann integrálja

Az integrál konstrukciója tetszőleges változószám esetén

Definíció: n dimenziós (zárt) intervallum

Legyen $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$a_1 < b_1 \,,\; a_2 < b_2 \,,\; \ldots \,,\; a_n < b_n .$$

Ekkor az

$$I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbf{R}^n$$

halmazt n dimenziós intervallumnak nevezzük.

Megjegyzés

Az egydimenziós intervallumok a szokásos intervallumok.

A kétdimenziós intervallumok téglalapok.

A háromdimenziós intervallumok téglatestek.

Definíció: n dimenziós intervallum beosztása

Legyenek $I_1, I_2, \ldots, I_k$ és I n dimenziós intervallumok.

A $d = \{ I_1 , I_2 , \ldots , I_k \}$ intervallumrendszert az I intervallum beosztásának nevezzük, ha

- $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k = I$
- $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$, **ha $i \neq j$ $(i = 1,\ldots,k\,,\ j = 1,\ldots,k)$.**

(I^0 az I intervallum belsejét jelenti)

Jelölés

D(I): az I összes beosztásának halmaza

Definíció: n dimenziós intervallum mértéke

Az $I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbf{R}^n$

n dimenziós intervallum **mértéke**:

$$v\,(\,I\,) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

Megjegyzés

A mérték

- **egydimenziós esetben az intervallum hossza,**
- **kétdimenziós esetben a téglalap területe,**
- **háromdimenziós esetben a téglatest térfogata.**

A továbbiakban I legyen n dimenziós zárt intervallum.

Ha $f : I \rightarrow R$ *korlátos* függvény, $\{ I_1 , I_2 , \dots , I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor vezessük be a következő jelöléseket:

$$\boxed{m_i = \inf f (I_i) , \quad i=1,\dots,k} \qquad \boxed{M_i = \sup f (I_i) , \quad i=1,\dots,k}$$

($f (I_i)$ az I_i intervallum f függvény szerinti képhalmazát jelenti.)

Megjegyzés

Ha f folytonos, akkor

m_i a függvény legkisebb értéke (minimuma) az I_i intervallumon,

M_i a függvény legnagyobb értéke (maximuma) az I_i intervallumon.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: alsó és felső integrálközelítő összeg

Ha $f : I \to \mathbf{R}$ *korlátos* függvény, $d = \{ I_1 , I_2 , \ldots , I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor az

$$s(f,d) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot v(I_i) \qquad S(f,d) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot v(I_i)$$

összegeket az f függvény d beosztáshoz tartozó alsó ill. felső integrálközelítő összegének nevezzük.

Megjegyzés

Az integrálközelítő összeg tagjai olyan szorzatok, melyek egyik tényezője a függvény egy értéke, a másik tényezője a felosztásban szereplő egy részintervallum mértéke.

Tétel: az alsó és a felső integrálközelítő összegek viszonya

Ha f : I → R *korlátos* függvény, d_1 és d_2 az I intervallum két tetszőleges beosztása, akkor

$$\boxed{s(f, d_1) \le S(f, d_2)}$$

vagyis egy felső integrálközelítő összeg nem lehet kisebb egy alsó integrálközelítő összegnél.

Következmény

Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos.

A felső integrálközelítő összeg halmaza alulról korlátos.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: alsó integrál

Az f:I→R *korlátos* függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény alsó integráljának nevezzük.

$$\underline{\int_I} f = \sup_{d\in D(I)} s(f,d)$$

Definíció: felső integrál

Az f:I→R *korlátos* függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény felső integráljának nevezzük.

$$\overline{\int_I} f = \inf_{d\in D(I)} S(f,d)$$

Az előző következmény miatt az alsó és a felső integrál valós szám.)

Megjegyzés

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy $\underline{\int_{I}} f \le \overline{\int_{I}} f$

Definíció: integrál

Ha az alsó és a felső integrál egyenlő, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény integrálható az I intervallumon. Az alsó és a felső integrálok közös értékét az f függvény I intervallumon vett integráljának nevezzük.

Jelölés

$$\int_{I} f = \underline{\int_{I}} f = \overline{\int_{I}} f$$

Tétel

Ha az f:I→R függvény folytonos, akkor integrálható.

Az integrál konstrukciója két változó esetén - Kettős integrál

Definíció: kétdimenziós (zárt) intervallum

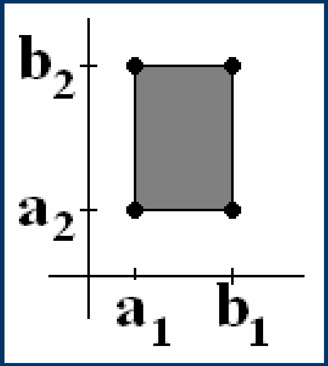
Legyen $a = (a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2$, $b = (b_1,b_2) \in \mathbf{R}^2$,

$$a_1 < b_1,\ a_2 < b_2.$$

Ekkor az

$$I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \subseteq \mathbf{R}^2$$

halmazt (téglalapot) kétdimenziós intervallumnak nevezzük.



NEM NYOMTATÁSRA!

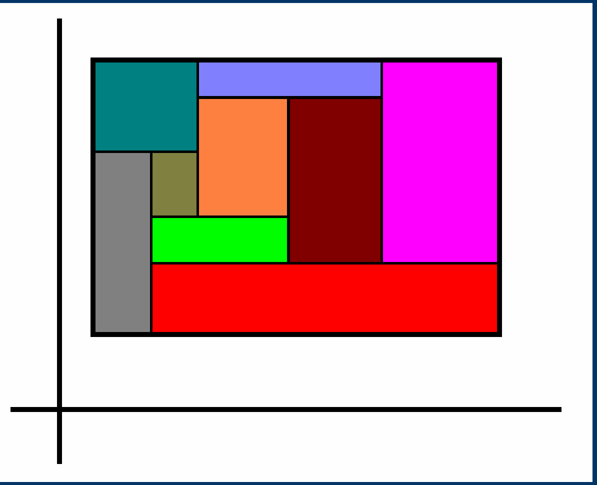
Definíció: kétdimenziós intervallum beosztása

Legyenek $I_1, I_2, \ldots, I_k$ és I kétdimenziós intervallumok.

A $d = \{ I_1, I_2, \ldots, I_k \}$ intervallumrendszert az I intervallum beosztásának nevezzük, ha

- $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k = I$
- $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$, ha $i \neq j$ $(i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, k)$.

(I^0 az I intervallum belsejét jelenti)



Jelölés

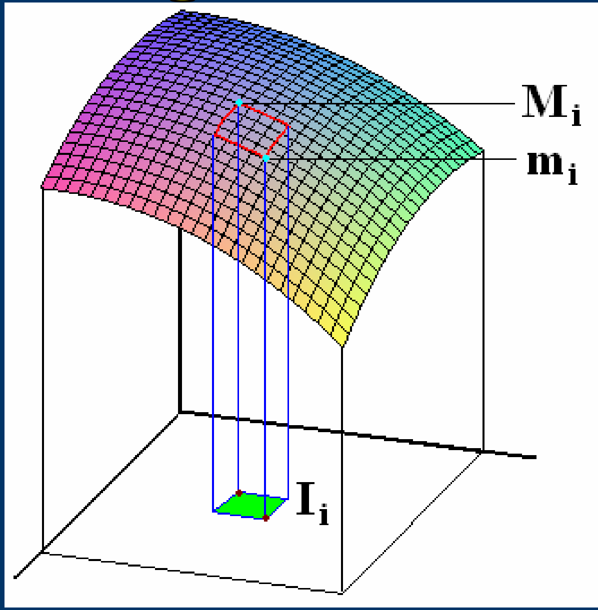
D(I): az I összes beosztásának halmaza

Definíció: kétdimenziós intervallum mértéke

Az $I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \subseteq \mathbf{R}^2$

kétdimenziós intervallum mértéke (területe):

$$v(I) = T(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$



A továbbiakban I legyen kétdimenziós zárt intervallum.

Ha $f : I \to R$ *korlátos* függvény, $\{ I_1 , I_2 , \ldots , I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor vezessük be a következő jelöléseket:

$$m_i = \inf f (I_i) , \quad i=1,\ldots,k$$

$$M_i = \sup f (I_i) , \quad i=1,\ldots,k$$

Megjegyzés

Ha f folytonos, akkor

- **m_i a függvény legkisebb értéke (minimuma) az I_i intervallumon,**
- **M_i a függvény legnagyobb értéke (maximuma) az I_i intervallumon.**

Definíció: alsó és felső integrálközelítő összeg

Ha $f : I \to \mathbf{R}$ *korlátos* függvény, $d = \{ I_1 , I_2 , \dots , I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor az

$$s(f,d) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot T(I_i)$$

$$S(f,d) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot T(I_i)$$

összegeket az f függvény d beosztáshoz tartozó alsó ill. felső integrálközelítő összegének nevezzük.

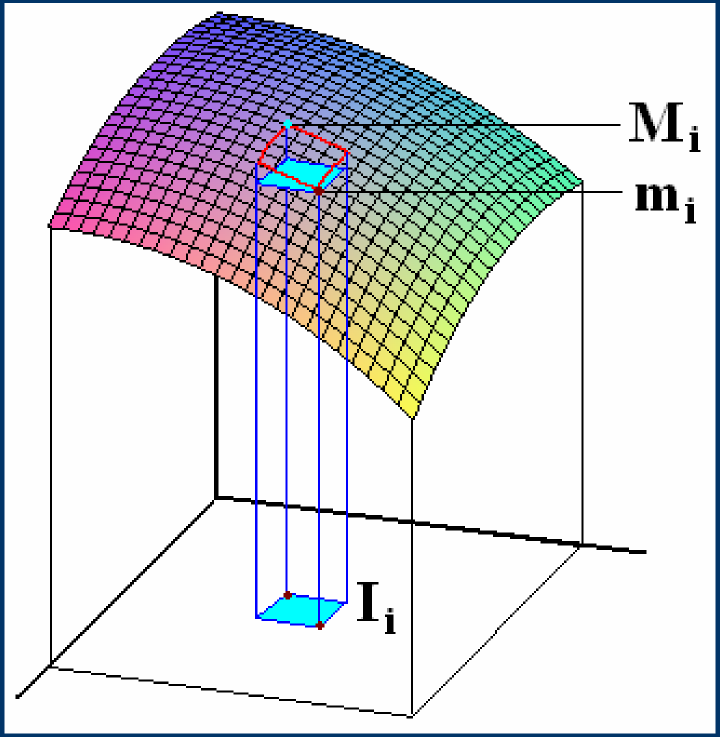
Megjegyzés

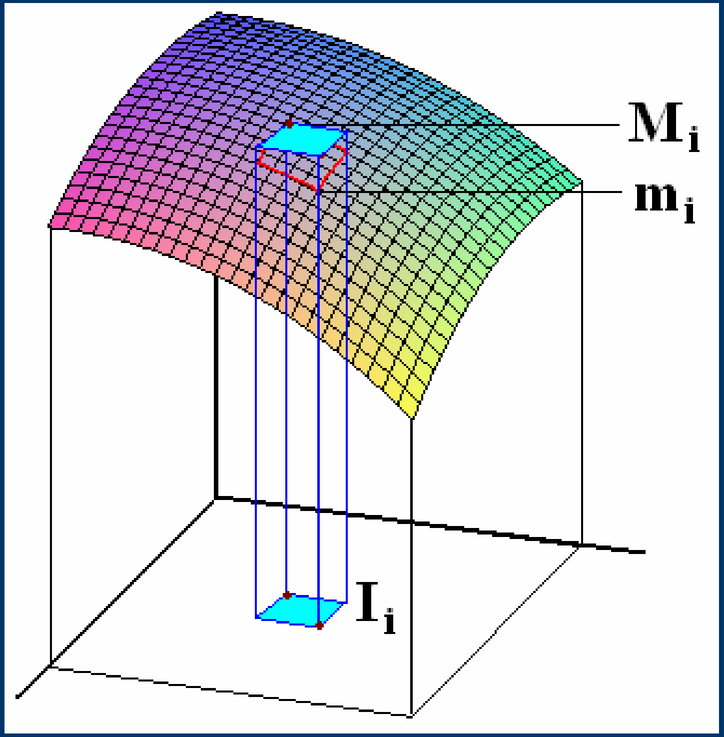
Az integrálközelítő összeg tagjai olyan szorzatok, melyek egyik tényezője a függvény egy értéke, a másik tényezője a felosztásban szereplő egy téglalap területe. Vagyis az integrálközelítő összeg tagjai téglatestek (előjeles) térfogataiként is felfoghatók.

Az alsó és a felső integrálközelítő összegek geometriai jelentése

$m_i \cdot T(I_i)$

$M_i \cdot T(I_i)$





Tétel: az alsó és a felső integrálközelítő összegek viszonya

Ha f : I → R *korlátos* függvény, d_1 és d_2 az I intervallum két tetszőleges beosztása, akkor

$$\boxed{s(f, d_1) \leq S(f, d_2)}$$

vagyis egy felső integrálközelítő összeg nem lehet kisebb egy alsó integrálközelítő összegnél.

Következmény

Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos.

A felső integrálközelítő összeg halmaza alulról korlátos.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: alsó integrál

Az f:I→R *korlátos* függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény alsó integráljának nevezzük.

$$\int_{\underline{I}} f = \sup_{d\in D(I)} s(f,d) \qquad \int^{\overline{\ }}_{I} f = \inf_{d\in D(I)} S(f,d)$$

Definíció: felső integrál

Az f:I→R *korlátos* függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény felső integráljának nevezzük.

Az előző következmény miatt az alsó és a felső integrál valós szám.)

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy $\underline{\int}_{I} f \leq \overline{\int}_{I} f$

Definíció: integrál

Ha az alsó és a felső integrál egyenlő, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény integrálható az I intervallumon. Az alsó és a felső integrálok közös értékét az f függvény I intervallumon vett integráljának nevezzük.

Jelölés

$$\int_{I} f = \underline{\int}_{I} f = \overline{\int}_{I} f$$

Jelölés

A kettős integrált általában két integrál jellel írjuk:

$$\iint_I f \qquad \textbf{ill.} \qquad \iint_I f(x,y)\,dxdy$$

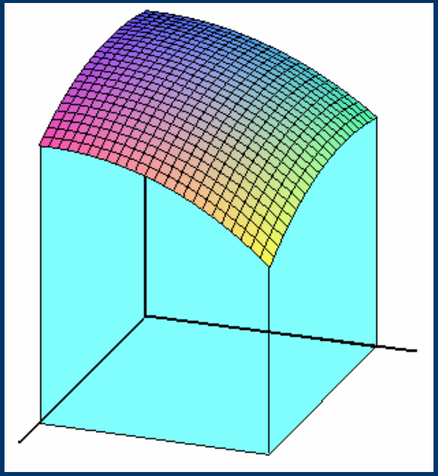
Tétel

Ha az f:I→R függvény folytonos, akkor integrálható.

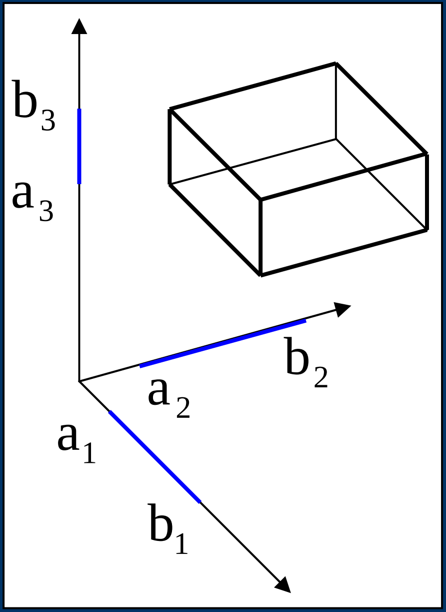
Az integrál geometriai jelentése kétváltozós esetben

Nemnegatív értékkészletű folytonos kétváltozós függvény integrálja a „függvény alatti térfogattal” egyenlő:

$$V = \iint\limits_{I} f$$



Az integrál konstrukciója három változó esetén
Hármas integrál



Definíció: háromdimenziós (zárt) intervallum

Legyen $a = (a_1,a_2,a_3) \in \mathbf{R}^3$, $b = (b_1,b_2,b_3) \in \mathbf{R}^3$,

$a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$.

Ekkor az

$$I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \subseteq \mathbf{R}^3$$

halmazt (téglatestet) háromdimenziós intervallumnak nevezzük.

Definíció: háromdimenziós intervallum beosztása

Legyenek $I_1, I_2, \ldots, I_k$ és I kétdimenziós intervallumok.

A $d = \{ I_1, I_2, \ldots, I_k \}$ intervallumrendszert az I intervallum beosztásának nevezzük, ha

- $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k = I$
- $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$, ha $i \neq j$ $(i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, k)$.

(I^0 az I intervallum belsejét jelenti)

Jelölés

D(I): az I összes beosztásának halmaza

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: háromdimenziós intervallum mértéke

Az $I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \subseteq \mathbf{R}^3$

n dimenziós intervallum mértéke (térfogata):

$$v(I) = V(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A továbbiakban I legyen háromdimenziós zárt intervallum.

Ha $f : I \to R$ *korlátos* függvény, $\{ I_1, I_2, \dots, I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor vezessük be a következő jelöléseket:

$$m_i = \inf f(I_i), \quad i=1,\dots,k$$

$$M_i = \sup f(I_i), \quad i=1,\dots,k$$

Megjegyzés

Ha f folytonos, akkor

- m_i a függvény legkisebb értéke (minimuma) az I_i intervallumon,
- M_i a függvény legnagyobb értéke (maximuma) az I_i intervallumon.

Definíció: alsó és felső integrálközelítő összeg

Ha $f : I \to \mathbf{R}$ *korlátos* függvény, $d = \{ I_1 , I_2 , \dots , I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor az

$$s(f,d) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot V(I_i)$$

$$S(f,d) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot V(I_i)$$

összegeket az f függvény d beosztáshoz tartozó alsó ill. felső integrálközelítő összegének nevezzük.

Megjegyzés

Az integrálközelítő összeg tagjai olyan szorzatok, melyek egyik tényezője a függvény egy értéke, a másik tényezője a felosztásban szereplő egy téglatest térfogata.

Tétel: az alsó és a felső integrálközelítő összegek viszonya

Ha f : I → R *korlátos* függvény, d_1 és d_2 az I intervallum két tetszőleges beosztása, akkor

$$s(f, d_1) \leq S(f, d_2)$$

vagyis egy felső integrálközelítő összeg nem lehet kisebb egy alsó integrálközelítő összegnél.

Következmény

Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos.

A felső integrálközelítő összeg halmaza alulról korlátos.

Definíció: alsó integrál

Az f:I→R *korlátos* függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény alsó integráljának nevezzük.

$$\int_{\underline{I}} f = \sup_{d \in D(I)} s(f,d) \qquad \int^{\overline{}}_{I} f = \inf_{d \in D(I)} S(f,d)$$

Definíció: felső integrál

Az f:I→R *korlátos* függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény felső integráljának nevezzük.

Az előző következmény miatt az alsó és a felső integrál valós szám.)

Megjegyzés

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy $\underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f$

Definíció: integrál

Ha az alsó és a felső integrál egyenlő, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény integrálható az I intervallumon. Az alsó és a felső integrálok közös értékét az f függvény I intervallumon vett integráljának nevezzük.

Jelölés

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$$

Tétel

Ha az f:I→R függvény folytonos, akkor integrálható.

Jelölés

A hármas integrált általában három integrál jellel írjuk:

$$\iiint\limits_I f \qquad \text{ill.} \qquad \iiint\limits_I f(x,y,z)\,dxdydz$$

Tétel

Ha az $f: I \to R$ függvény folytonos, akkor integrálható.

NEM NYOMTATÁSRA!

Az integrál néhány tulajdonsága

Tétel: összegfüggvény integrálja

Ha az f:I→R és a g:I→R függvények integrálhatóak, akkor az f+g függvény is integrálható és

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

(Tagonként lehet integrálni.)

Tétel: függvény konstansszorosának integrálja

Ha az f:I→R függvény integrálható és c∈R, akkor a c·f függvény is integrálható és

$$\int_I (c \cdot f) = c \cdot \int_I f$$

(Szorzó konstans kiemelhető az integrál elé.)

Tétel: az integrál additivitása

Ha az $\{ I_1 , I_2 , \dots , I_k \}$ intervallumrendszer az I intervallum egy beosztása, és az $f:I\to\mathbf{R}$ függvény integrálható az $I_1 , I_2 , \dots , I_k$ intervallumokon, akkor f integrálható az I intervallumon is és

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} f$$

Tétel

Ha az $f:I\to\mathbf{R}$ függvény integrálható az I (n dimenziós) intervallumon, akkor integrálható bármely $J \subseteq I$ n dimenziós részintervallumon is.

NEM NYOMTATÁSRA!

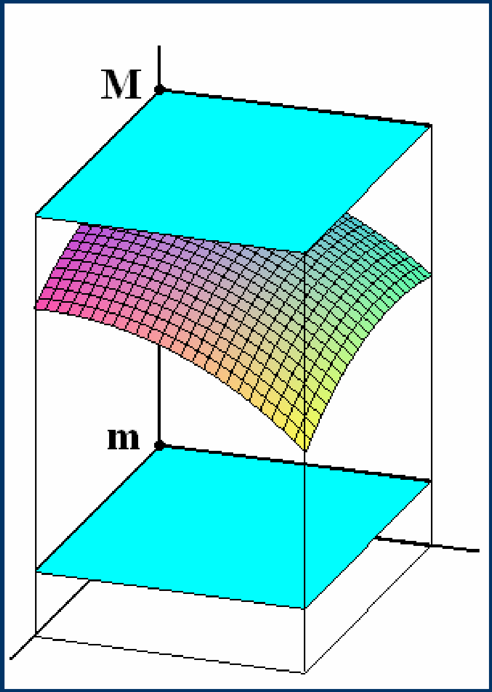
Tétel: az integrál monotonitása

Ha az f:I→R és a g:I→R függvények integrálhatók, és $f(x) \le g(x)$, ha $x \in I$, akkor

$$\int_I f \le \int_I g$$

Tétel: középérték tétel

Ha az f:I→R függvény integrálható, $m \in R$ és $M \in R$ az f alsó és felső korlátja, azaz $m \le f(x) \le M$, ha $x \in I$, akkor



$$m \cdot v(I) \le \int_I f \le M \cdot v(I)$$

Tétel: az integrál kiszámítása intervallumon

Legyen $I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbf{R}^n$ n dimenziós zárt intervallum.

Ha az $f: I \to \mathbf{R}$ folytonos, akkor az f függvény I-n vett integrálja kiszámítható n db egyváltozós integrál kiszámításával az alábbiak szerint:

$$\int_I f = \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int_{x_2=a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{x_n=a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1$$

A kettős integrál kiszámítása téglalapon

Legyen $I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \subseteq \mathbf{R}^2$ kétdimenziós zárt intervallum.

Ha az $f:I \to \mathbf{R}$ folytonos, akkor az f függvény I-n vett kettős integrálja meghatározható két db egyváltozós integrál kiszámításával az alábbiak szerint:

$$\iint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x=a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{y=a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$f(x,y) = x^2 \cdot \sqrt{y} - 5y + 2 \qquad I = [1,3]\times[0,4]$$

$$\iint_I f = \iint_{[1,3]\times[0,4]} \left(x^2 \cdot \sqrt{y} - 5y + 2\right) dx\,dy = \int_{y=0}^{4} \left(\int_{x=1}^{3} \left(x^2 \cdot \sqrt{y} - 5y + 2\right) dx \right) dy =$$

$$= \int_{y=0}^{4} \left[\sqrt{y} \cdot \frac{x^3}{3} - 5y \cdot x + 2x \right]_{x=1}^{3} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{4} \left(\left(9 \cdot \sqrt{y} - 15y + 6\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{y} - 5y + 2 \right) \right) dy =$$

$$= \int_{y=0}^{4} \left(\frac{26}{3} \cdot \sqrt{y} - 10y + 4 \right) dy = \left[\frac{26}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 10 \cdot \frac{y^2}{2} + 4y \right]_{y=0}^{4} =$$

$$=\left[\frac{52}{9}\cdot y^{\frac{3}{2}}-10\cdot\frac{y^2}{2}+4y\right]_{y=0}^{4}=$$

$$=\left(\frac{52}{9}\cdot 8-10\cdot 8+16\right)-0=\frac{416}{9}-64\approx -17{,}78$$

A hármas integrál kiszámítása téglatesten

Legyen $I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ háromdimenziós zárt intervallum.

Ha az $f:I\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor az f függvény I-n vett integrálja kiszámítható három db egyváltozós integrál kiszámításával az alábbiak szerint:

$$\iiint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{x=a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{y=a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{z=a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

Példa $f(x,y,z) = x^3 \cdot z - 5y \cdot z^2 + 6z - 3$ $\quad I = [1,3]\times[0,4]\times[2,5]$

$$\int_I f = \int_{[1,3]\times[0,4]\times[2,5]} (x^3 z - 5yz^2 + 6z - 3)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left(\int_{z=2}^{5} (x^3 z - 5yz^2 + 6z - 3)\, dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left[x^3 \frac{z^2}{2} - 5y\frac{z^3}{3} + 6\frac{z^2}{2} - 3z \right]_{z=2}^{5} dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left(\frac{25}{2}x^3 - \frac{725}{3}y + 75 - 15 \right) - \left(2x^3 - \frac{40}{3}y + 12 - 6 \right) dy \right) dx =$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left(\frac{21}{2} x^3 - \frac{685}{3} y + 54 \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left[\frac{21}{2} x^3 y - \frac{685}{3} \cdot \frac{y^2}{2} + 54y \right]_{y=0}^{4} dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\left(\frac{84}{2} x^3 - \frac{5480}{3} + 216 \right) - 0 \right) dx = \int_{x=1}^{3} \left(\frac{84}{2} x^3 - \frac{4832}{3} \right) dx =$$

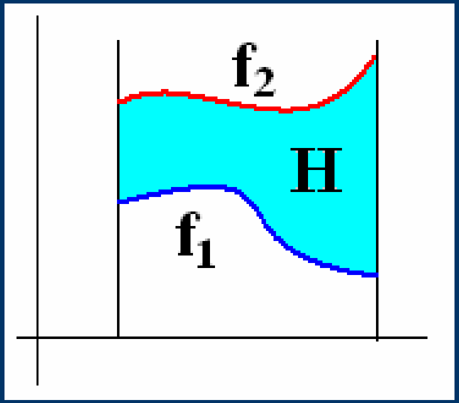
$$= \left[\frac{84}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{4832}{3} \cdot x \right]_{x=1}^{3} = \left(\frac{1701}{2} - 4832 \right) - \left(\frac{21}{2} - \frac{4832}{3} \right) = \frac{-7144}{3}$$

Definíció: síkbeli normál tartomány

Ha f_1 , f_2 : [a,b] → R folytonos függvények és $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a,b]$, akkor a

$$H = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b , f_1(x) \le y \le f_2(x) \}$$

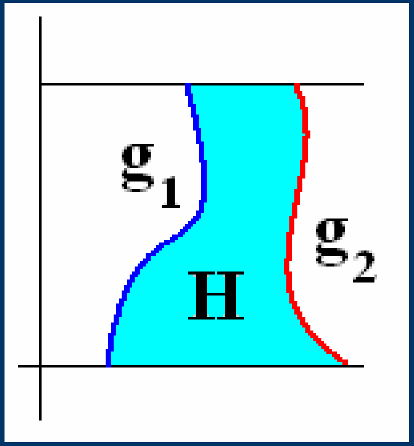
halmaz az „x" tengelyre vonatkozó normál tartománynak nevezzük.



Ha g_1 , g_2 : [a,b] → R folytonos függvények és $g_1(x) \le g_2(x)$, ha $y \in [a,b]$, akkor a

$$H = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le y \le b , g_1(y) \le x \le g_2(y) \}$$

halmaz az „y" tengelyre vonatkozó normál tartománynak nevezzük

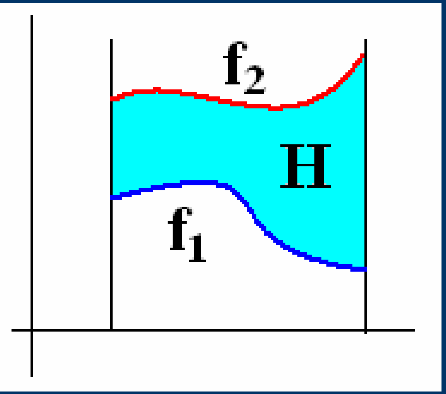


NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a kettős integrál kiszámítása normál tartományon

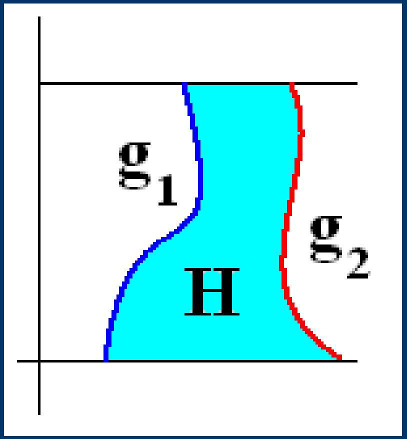
„x” tengelyre vonatkozó normál tartomány esetén:

$$\int_H f = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



„y” tengelyre vonatkozó normál tartomány esetén:

$$\int_H f = \int_{y=a}^{b} \left(\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

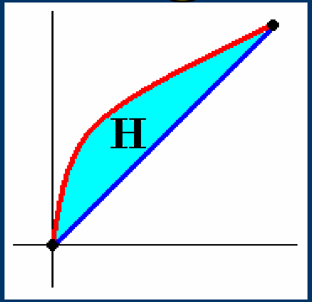


NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$f(x,y)=x^2y-x$$

$$H=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ x\le y\le\sqrt{x}\right\}$$



$$\iint_H f=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{\sqrt{x}}(x^2y-x)\,dy\right)dx=\int_{x=0}^{1}\left[x^2\cdot\frac{y^2}{2}-x\cdot y\right]_{y=x}^{\sqrt{x}}dx=$$

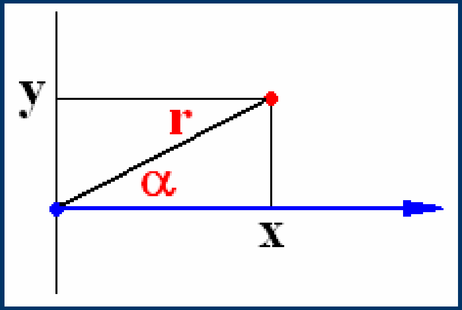
$$=\int_{x=0}^{1}\left(\left(\frac{1}{2}x^3-x^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{2}x^4-x^2\right)\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1}=\frac{1}{8}-\frac{2}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{3}=\frac{-5}{120}$$

Tétel: az integrál kiszámítása polárkoordinátákkal megadott tartomány esetén (integráltranszformáció)

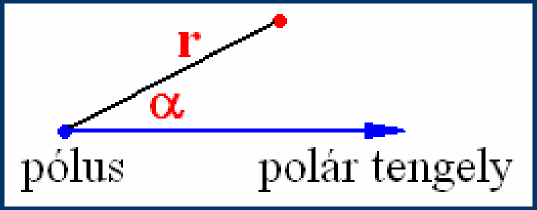
Ha az f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény integrálható a H halmazon, akkor

$$\int_H f(x,y)\,dx\,dy = \int_H f(r\cdot\cos\alpha, r\cdot\sin\alpha)\cdot r\,dr\,d\alpha$$



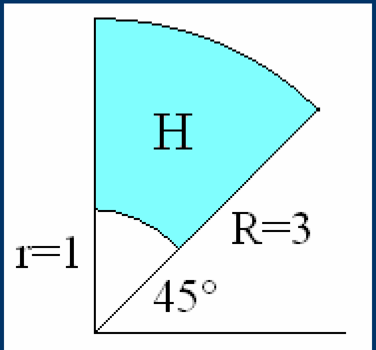
$$x = r\cdot\cos\alpha$$

$$y = r\cdot\sin\alpha$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa



Határozzuk meg az $f(x,y) = x - 2y$ függvény integrálját a H halmazon!

A H halmazt derékszögű koordinátákkal nehéz előállítani, polárkoordinátákkal viszont „téglalap tartománnyá” egyszerűsödik:

$$H = \{ (r,\alpha) \mid 1 \le r \le 3 \, , \pi/4 \le \alpha \le \pi/2 \}$$

így az integrált a transzformációs formulával célszerű kiszámítani.

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\int_H (x-2y)\,dx\,dy = \int_H (r\cdot\cos\alpha - 2r\cdot\sin\alpha)\cdot r\,dr\,d\alpha =$$

$$= \int_H r^2\cdot(\cos\alpha - 2\sin\alpha)dr\,d\alpha = \int_{\alpha=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=1}^{3} r^2\cdot(\cos\alpha - 2\sin\alpha)dr \right) d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos\alpha - 2\sin\alpha)\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{3} \right) d\alpha = \frac{26}{3}\cdot \int_{\alpha=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\alpha - 2\sin\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{26}{3}\cdot[\sin\alpha + 2\cos\alpha]_{\alpha=\pi/4}^{\pi/2} = \frac{26}{3}\cdot\left(1-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Az $$\int_H f(x,y)\,dx\,dy = \int_H f(r\cdot\cos\alpha, r\cdot\sin\alpha)\cdot r\,dr\,d\alpha$$ **képletben**

az a legfontosabb tartalom, hogy $$dx\,dy = r\,dr\,d\alpha$$

Általánosan: ha kettős integrálban új változókra térünk át, például az x-y változókról az u-v változókra, akkor meg kell határozni, hogy az eredeti integrálban szereplő dxdy formula helyébe mi kerül.

Ehhez szükség van az ún. Jacobi determinánsra, amit a régi és az új változók kapcsolatát megadó x(u,v) és y(u,v) kétváltozós függvények parciális deriváltjaiból képzünk:

Definíció: Jacobi determináns

Ha az integráltranszformáció (új változókra való áttérés) esetén a régi (x,y) és az új (u,v) változók kapcsolata az

$$(u, v) \to x(u, v) \qquad (u, v) \to y(u, v)$$

függvények által adott, akkor a problémához tartozó Jacobi determináns:

$$J(u, v) = \det\begin{pmatrix} \partial_u x(u, v) & \partial_v x(u, v) \\ \partial_u y(u, v) & \partial_v y(u, v) \end{pmatrix}$$

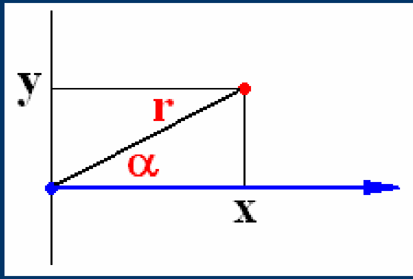
Az új változókra való áttéréskor a következő formulát kell használni:

$$dx\, dy = J(u, v)\, du\, dv$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Síkbeli derékszögű koordinátákról (x,y) síkbeli polár koordinátákra (r,α) való áttérés esetén a Jacobi determináns:

$$x(r,\alpha) = r \cdot \cos\alpha \qquad y(r,\alpha) = r \cdot \sin\alpha$$



$$J(r,\alpha) = \det\begin{pmatrix} \partial_r x(r,\alpha) & \partial_\alpha x(r,\alpha) \\ \partial_r y(r,\alpha) & \partial_\alpha y(r,\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & r\cdot(-\sin\alpha) \\ \sin\alpha & r\cdot\cos\alpha \end{pmatrix} = r\cdot\cos^2\alpha + r\cdot\sin^2\alpha = r$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\alpha$$