Többváltozós, valós értékű függvények

Definíció: többváltozós függvények

Azokat a függvényeket, melyeknek az értelmezési tartománya R^n egy részhalmaza, n változós függvényeknek nevezzük.

Példák

1. A gazdasági eredetű problémák matematikai modelljében gyakoriak a sokváltozós függvények (például: termelési függvény)

2. Az $R^3 \to R$ típusú függvényeket szokás skalármezőnek nevezni.

Ilyenek például a skalár jellegű fizikai mennyiségeknek (tömegsűrűség, töltéssűrűség, hőmérséklet, potenciál, stb.) a helytől való függését kifejező függvények.

3. A geográfiában használt domborzati térképek tekinthetők $R^2 \to R$ típusú (kétváltozós) függvényeknek.

Kétváltozós függvények ábrázolása

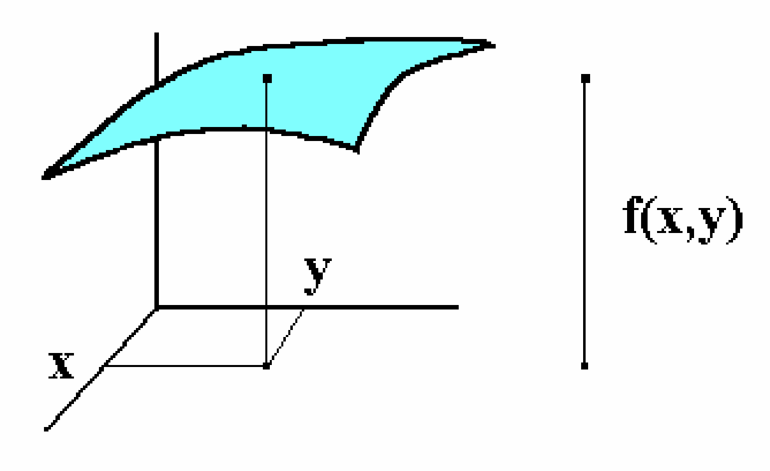
A többváltozós függvények közül csak a kétváltozósakat tudjuk ábrázolni. Ekkor is egy háromdimenziós kép térhatású síkbeli ábrázolásáról van szó.

Az ábrázolásnak két esetben van szerepe:

- **a többváltozós függvényekkel kapcsolatos fogalmak tartalmának speciálisan kétváltozós függvényeken való bemutatásakor**
- **olyan esetekben, amikor egy kétváltozós függvény egy felület megadására szolgál**

NEM NYOMTATÁSRA!

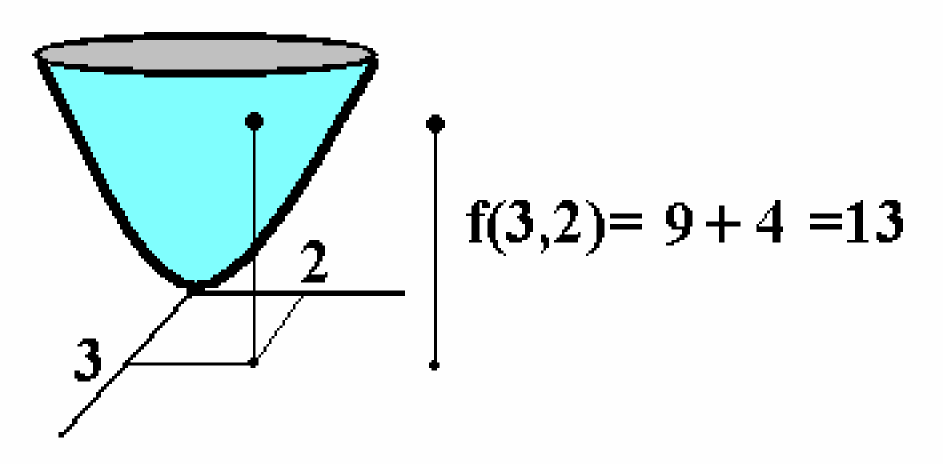
Kétváltozós függvények ábrázolása



$(x,y) \rightarrow f\,(x,y)$

Példa

$f\,(x,y) = x^2 + y^2$



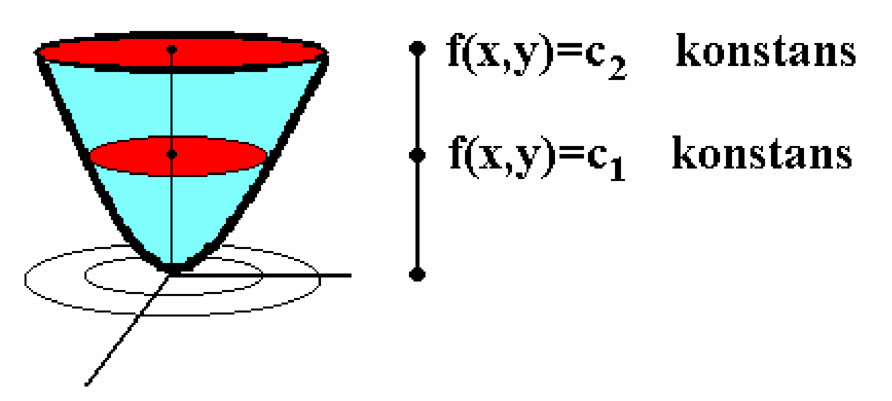
Definíció: szintvonalak

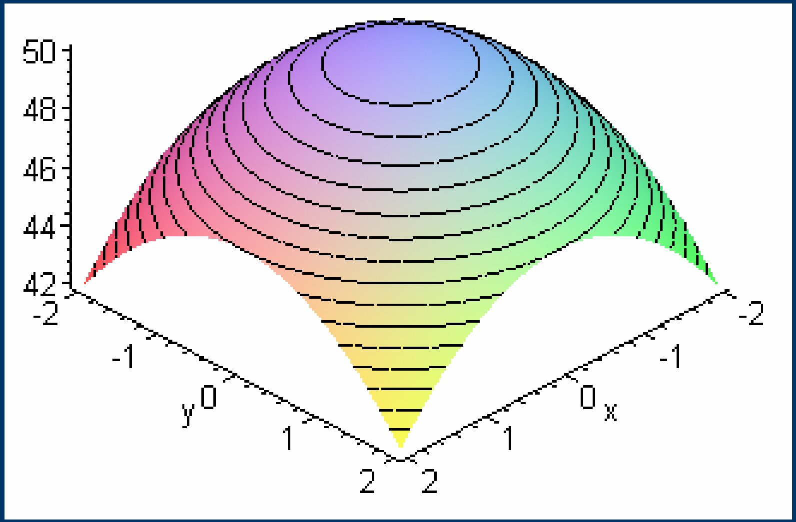
Ha c eleme az (x,y)→f(x,y) függvény értékkészletének, akkor az

$$\{ (x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c \}$$

síkgörbét c értékhez tartozó szintvonalnak nevezzük.

A definíció szerint egy szintvonal pontjaihoz a függvény ugyanazt az értéket rendeli.





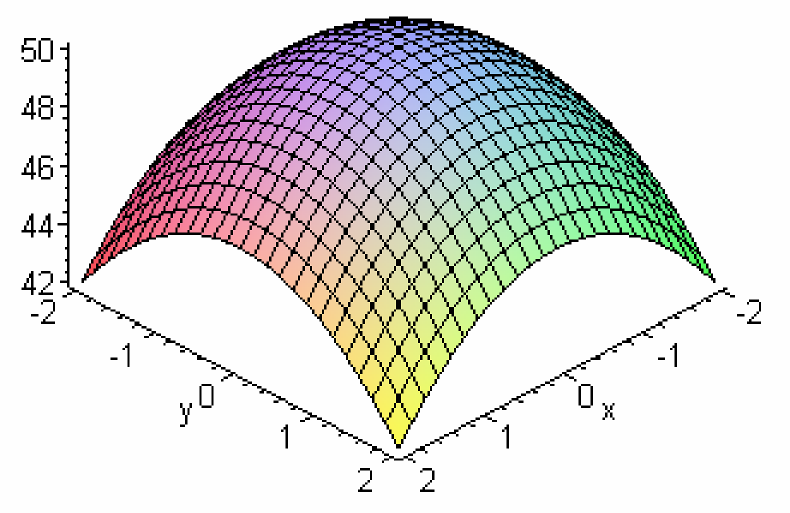
Megjegyzés

A domborzati térképek szintvonalainak jelentése ugyanez.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: paramétervonalak

A kétváltozós függvények paramétervonalai síkgörbék, a függvényfelületnek a „függőleges” koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal való síkmetszetei.

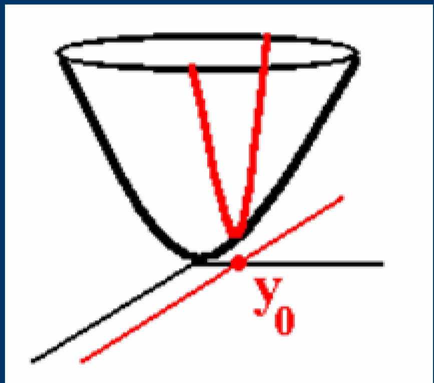


A paramétervonalak olyan egyváltozós függvények grafikonjaként állnak elő, melyek az eredeti kétváltozós függvény egyik változójának rögzítésével keletkeznek.

NEM NYOMTATÁSRA!

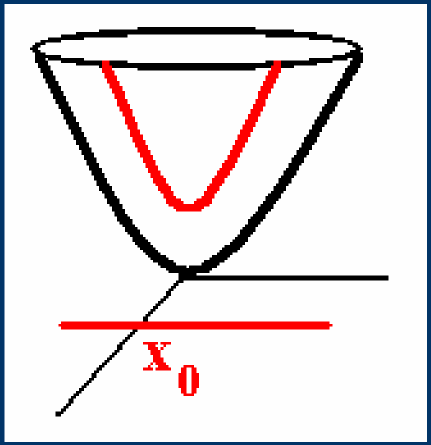
A második változó rögzítésével keletkező paramétervonalak

Az első változó rögzítésével keletkező paramétervonalak



$$x \to f(x, y_0)$$

$$y \to f(x_0, y)$$



Példa

$$(x,y) \to x^2 + y^2$$

$$y_0 = 2 \quad \Downarrow \qquad \Downarrow \quad x_0 = 3$$

$$x \to x^2 + 4 \qquad y \to 9 + y^2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Többváltozós függvények határértéke és folytonossága

Emlékeztető: egyváltozós függvény határértéke

Az f:D→R függvény határértéke a D egy x_0 torlódási pontjában A∈R, ha bármely D-beli (x_n), $x_n \neq x_0$ sorozat esetén, melyre

$$x_n \to x_0$$

fennáll, hogy

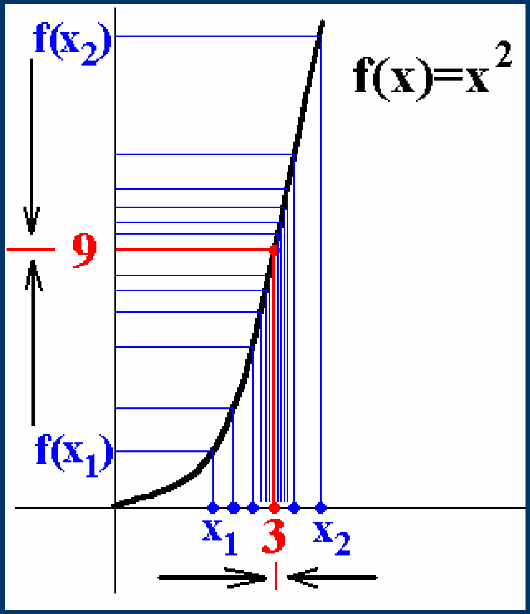
$$f(x_n) \to A$$

Jelölés

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Példa

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: többváltozós függvény határértéke

Tekintsük az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ függvényt, és $\underline{r}_0$ legyen torlódási pontja az f értelmezési tartományának.

Ha van olyan $A\in\mathbf{R}$, melyre fennáll, hogy bármely D-beli

$$\underline{r}_n \to \underline{r}_0 , \qquad (\underline{r}_n \neq \underline{r}_0 ,\ n\in\mathbf{N})$$

sorozat esetén

$$f(\underline{r}_n) \to A,$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a $\underline{r}_0$ helyen A.

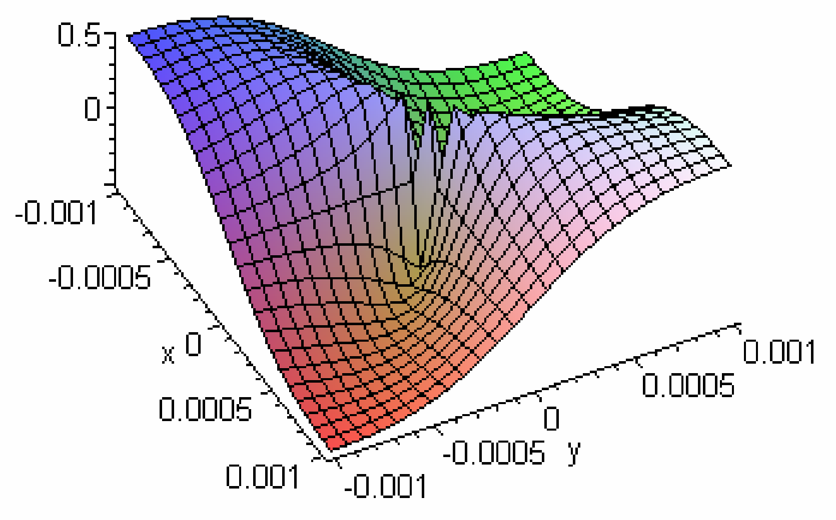
Jelölés:

$$\lim_{\underline{r}\to\underline{r}_0} f(\underline{r}) = A$$

Többváltozós függvények

Példa

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



Az f függvénynek a (0,0) helyen nem létezik határértéke (és így nem is folytonos). Indoklás:

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$$ **sorozat esetén:**

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$$ **sorozat esetén:**

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Emlékeztető: egyváltozós függvény folytonossága

Az $f:D \to R$ függvény folytonos az $x_0 \in D$ helyen, ha bármely $(x_n):N \to D$,

$$x_n \to x_0$$

sorozat esetén fennáll, hogy

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

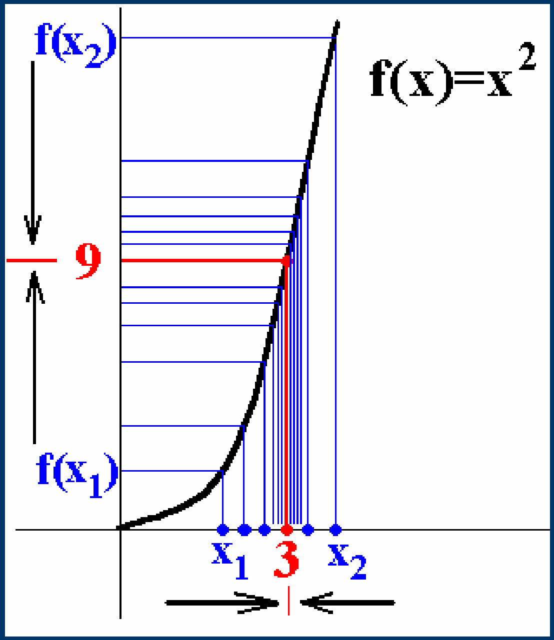
Példa

Az $f(x)=x^2$ függvény folytonos az $x_0=3$ helyen, mert ha

$$x_n \to 3,$$

akkor

$$f(x_n) = (x_n)^2 \to 9 = f(3)$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: többváltozós függvény folytonossága

Az f : D ($\subseteq$R^n) $\rightarrow$ R függvény folytonos az $\underline{r}_0 \in$D helyen, ha bármely D-beli

$$\underline{r}_n \rightarrow \underline{r}_0$$

sorozat esetén

$$f(\underline{r}_n) \rightarrow f(\underline{r}_0).$$

Megjegyzés: folytonosság és határérték létezésének kapcsolata

Legyen D$\subseteq$R^n nyílt halmaz.

A definíciókból látható, hogy az f:D$\rightarrow$R függvény pontosan akkor folytonos az $\underline{r}_0 \in$D helyen, ha f-nek létezik határértéke $\underline{r}_0$-ban, és az éppen f($\underline{r}_0$).

NEM NYOMTATÁSRA!

Lineáris függvények

Definíció

Az

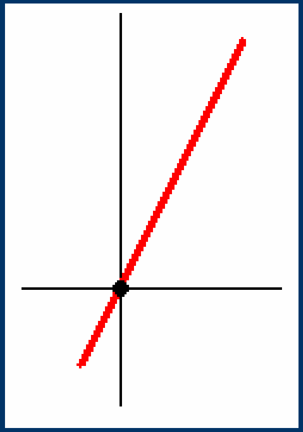
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \dots + k_n \cdot x_n = \underline{k} \bullet \underline{x}$$

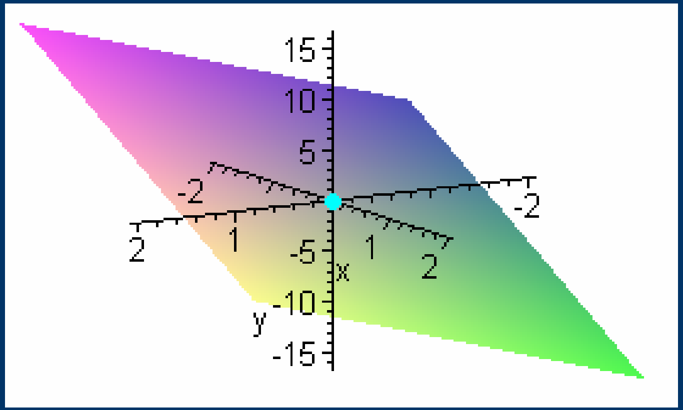
függvényeket, ahol $k_1, k_2, \dots, k_n$ valós számok, n változós lineáris függvényeknek nevezzük.

Az egyváltozós lineáris függvények: $x \rightarrow k \cdot x$

A kétváltozós lineáris függvények:

$$(x_1, x_2) \rightarrow k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 = \underline{k} \bullet \underline{x}$$





Megjegyzés

A lineáris függvények alapvető szerepet játszanak a differenciálszámításban, hiszen a differenciálás valójában lineáris függvénnyel való közelítést jelent:

Egyváltozós (differenciálható) függvény lineáris közelítése az ún. érintő egyenessel való közelítést jelenti, ennek meredeksége az adott pontbeli differenciálhányados.

Kétváltozós (differenciálható) függvény lineáris közelítése az ún. érintő síkkal való közelítést jelenti, melynek normálvektorát az adott pontbeli ún. parciális differenciálhányadosok határozzák meg.

NEM NYOMTATÁSRA!

Többváltozós függvények differenciálása

Emlékeztető: egyváltozós függvények differenciálhányadosa

Az $f:D(\subseteq \mathbf{R})\rightarrow \mathbf{R}$ függvény differenciálható az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában, ha van olyan $k\in \mathbf{R}$ szám, melyre

$$f(x)-f(x_0)=k\cdot(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)$$

ahol

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0)=0$$

Ekkor a k számot az f függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük. Jelölés:

$$k=f'(x_0)$$

Megjegyzés

A

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

jelölésekkel a differenciálhatóság feltétele szemléletesebb alakot ölt:

$$\Delta f = k \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

ahol

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

Definíció: többváltozós függvények differenciálhányadosa

Az $f:D(\subseteq R^n) \to R$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány $\underline{r}_0$ belső pontjában, ha van olyan $\underline{k} \in R^n$ vektor, melyre

$$f(\underline{r}) - f(\underline{r}_0) = \underline{k} \bullet (\underline{r} - \underline{r}_0) + \underline{\varepsilon}(\underline{r} - \underline{r}_0) \bullet (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

ahol

$$\lim_{\underline{r} \to \underline{r}_0} \varepsilon(\underline{r} - \underline{r}_0) = \underline{0}$$

Ekkor a $\underline{k}$ vektort az f függvény $\underline{r}_0$ helyen vett differenciálhányadosának, vagy gradiensének nevezzük.

Jelölés:

$$\underline{k} = f'(\underline{r}_0) \qquad \underline{k} = \operatorname{grad} f(\underline{r}_0)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzések

1. A

$$\Delta\underline{r} = \underline{r} - \underline{r}_0 \qquad \Delta f = f(\underline{r}) - f(\underline{r}_0)$$

jelölésekkel a differenciálhatóság feltétele szemléletesebb alakot ölt:

$$\Delta f = \underline{k} \cdot \Delta\underline{r} + \underline{\varepsilon}(\Delta\underline{r}) \cdot \Delta\underline{r}$$

ahol

$$\lim_{\Delta\underline{r} \to 0} \underline{\varepsilon}(\Delta\underline{r}) = \underline{0}$$

2. Ha differenciálhányados létezik, akkor egyértelmű.

3. Ha $D \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz (minden pontja belső pont) és az $f: D \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható a D minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható a D halmazon.

Definíció: iránymenti derivált

Legyen $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$, $\underline{r}_0$ a D értelmezési tartomány belső pontja, $\underline{0}\neq\underline{v}\in \mathbf{R}^n$ legyen rögzített vektor, és $\underline{v}^0$ jelölje a $\underline{v}$ irányú, egységnyi nagyságú vektort.

Az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli, $\underline{v}$ irányban vett iránymenti deriváltján a

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{r}_0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\underline{r}_0+\lambda\cdot\underline{v}^0)-f(\underline{r}_0)}{\lambda}$$

határértéket értjük, amennyiben létezik és valós.

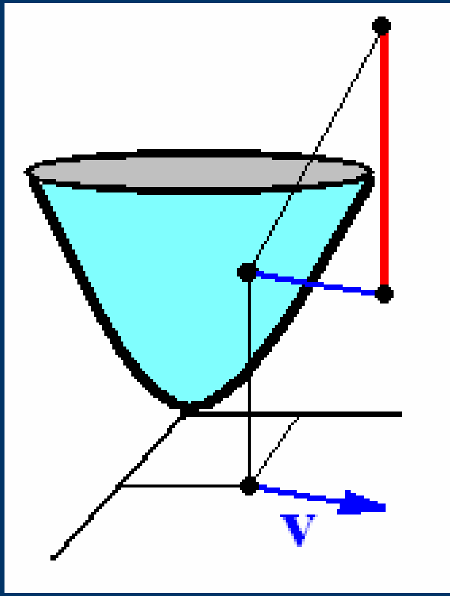
Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a definícióban egy egyváltozós függvény határértékéről van szó! Az egyetlen változó: λ.

NEM NYOMTATÁSRA!

Az iránymenti derivált jelentése

A $\underline{v}$ irányban vett iránymenti derivált szemléletesen azt fejezi ki, hogy az értelmezési tartományban az $\underline{r}_0$ pontból a $\underline{v}$ irányban „haladva" mennyi a függvényértékek változásának gyorsasága.



Megjegyzés

Ahol az f függvény differenciálható, ott létezik az összes iránymenti deriváltja is, az iránymenti deriváltak létezéséből viszont nem következik a differenciálhatóság.

Parciális derivált

Definíció

Legyen $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$, $\underline{r}_0$ a D értelmezési tartomány belső pontja, továbbá az $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\dots,\underline{e}_n$ vektorok legyenek az $\mathbf{R}^n$ természetes bázisának bázisvektorai. Az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli,

$\underline{e}_i$ irányban vett

iránymenti deriváltját az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli i-edik (vagy i-edik változó szerinti) parciális differenciálhányadosának, vagy röviden parciális deriváltjának nevezzük (i=1,…,n) .

Megjegyzés

A parciális deriváltak tehát speciális iránymenti deriváltak.

NEM NYOMTATÁSRA!

Jelölések

Az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli i-edik változó szerinti parciális deriváltjának jelölései:

$$\partial_i f(\underline{r}_0) \quad \textbf{vagy} \quad f_i'(\underline{r}_0)$$

Szokás a változó sorszáma helyett magát a változót szerepeltetni a parciális derivált jelölésénél: például az x változó szerinti parciális derivált lehetséges jelölései:

$$\partial_x f(\underline{r}_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{r}_0) \qquad f_x'(\underline{r}_0)$$

Megjegyzés: a differenciálhányados és a parciális deriváltak

A parciális deriváltak létezéséből általában nem következik a differenciálhatóság, de igaz a következő tétel:

Ha az $\underline{r}_0$ hely valamely környezetében az f függvénynek minden változó szerint létezik parciális deriváltja, továbbá ezek folytonosak $\underline{r}_0$-ban, akkor f differenciálható $\underline{r}_0$-ban.

Az előbbiekben a parciális deriváltat, mint speciális irányban vett iránymenti deriváltat értelmeztük. Most megadjuk a parciális derivált közvetlen definícióját.

(Az egyszerűség kedvéért a definíciókat csak a kétváltozós esetre írjuk fel, de ezzel analóg módon lehet eljárni kettőnél több változós esetben is.)

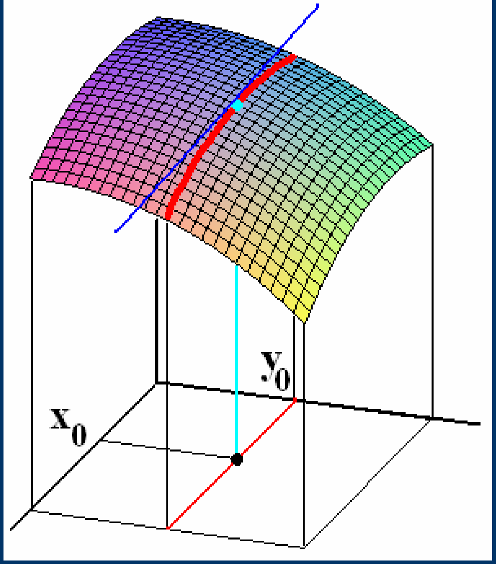
NEM NYOMTATÁSRA!

A parciális deriváltak közvetlen értelmezése
(kétváltozós függvény esetére)

Definíció: első változó szerinti parciális derivált

Legyen $f:D(\subseteq \mathbf{R}^2)\to \mathbf{R}$, (x_0,y_0) a D belső pontja. Az f függvény (x_0,y_0) helyen vett, első változó szerinti parciális differenciálhányadosán (vagy röviden parciális deriváltján) a

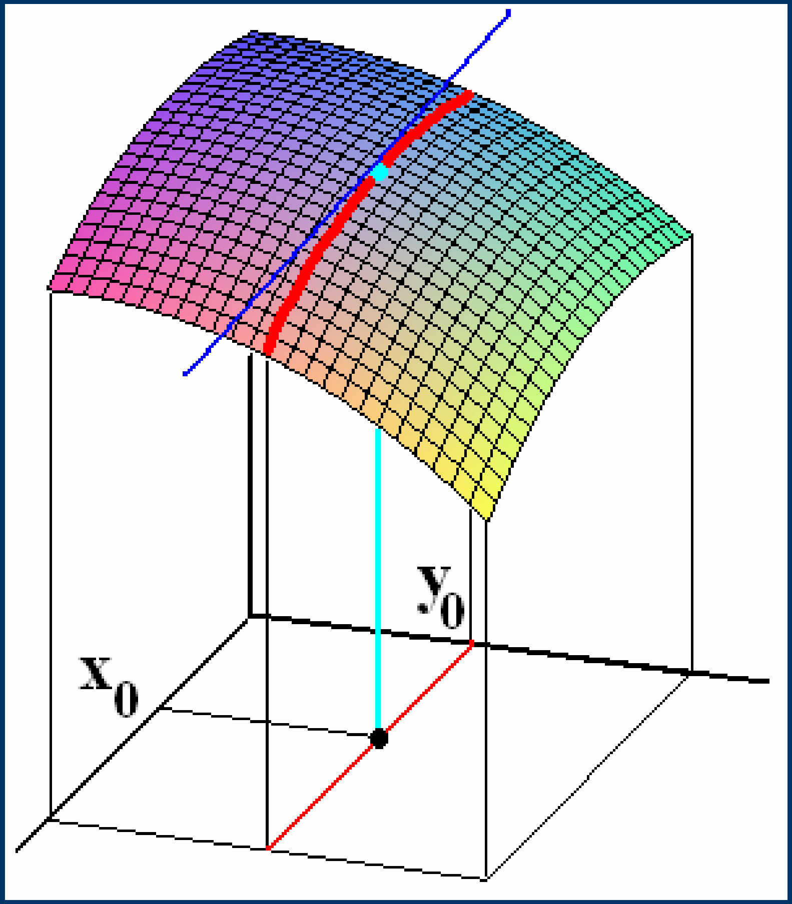
$$\partial_x f(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

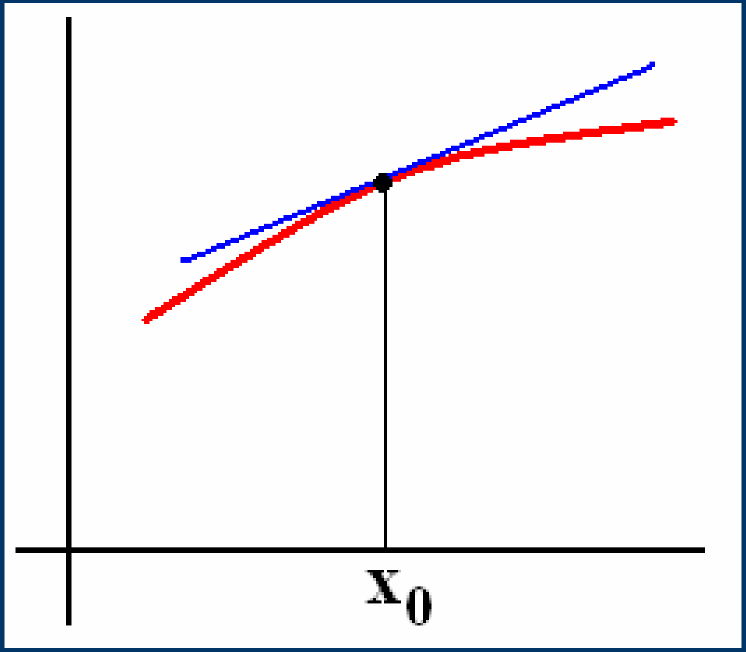


határértéket értjük, amennyiben ez létezik és véges.

NEM NYOMTATÁSRA!

Az első változó szerinti parciális derivált geometriai jelentése kétváltozós függvény esetén





Az első változó szerinti parciális derivált az y változó rögzítésével előálló felületi görbe érintőjének meredekségét adja.

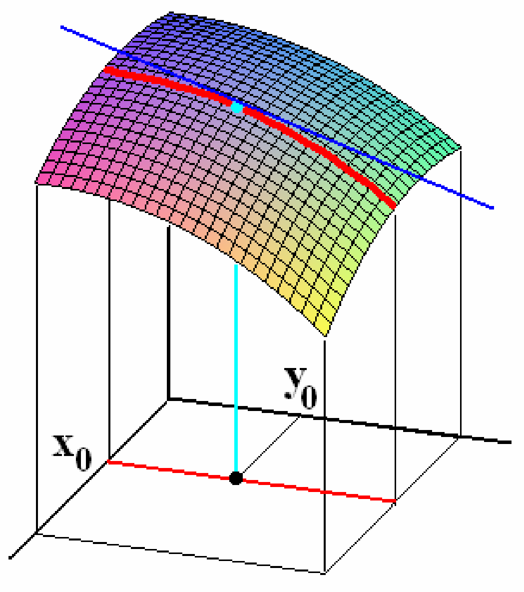
NEM NYOMTATÁSRA!

A parciális deriváltak közvetlen értelmezése
(kétváltozós függvény esetére)

Definíció: második változó szerinti parciális derivált

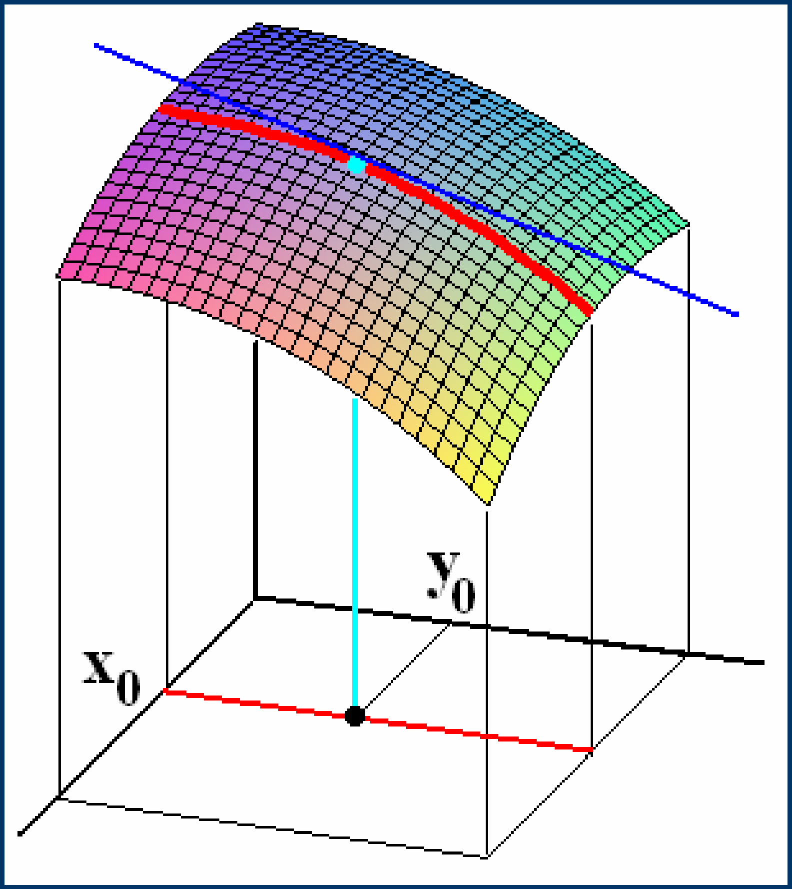
Legyen $f:D(\subseteq \mathbb{R}^2)\to \mathbb{R}$, (x_0,y_0) a D belső pontja. Az f függvény (x_0,y_0) helyen vett, második változó szerinti parciális differenciálhányadosán (vagy röviden parciális deriváltján) a

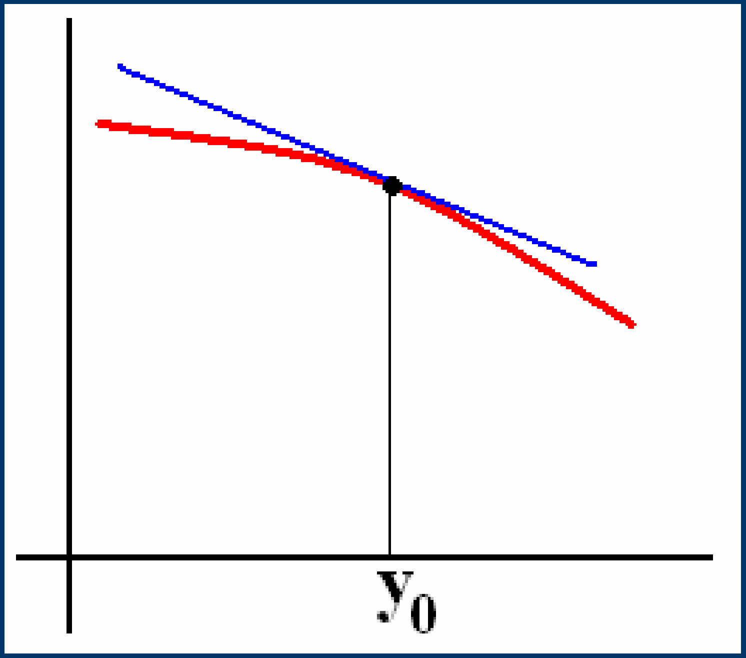
$$\partial_y f(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$



határértéket értjük, amennyiben ez létezik és véges.

A második változó szerinti parciális derivált geometriai jelentése kétváltozós függvény esetén





A második változó szerinti parciális derivált az x változó rögzítésével előálló felületi görbe érintőjének meredekségét adja.

Megjegyzés: gradiens vektor komponensei

Ha az f:D($\subseteq$R^n)$\to$R függvény differenciálható a D értelmezési tartomány $\underline{r}_0$ belső pontjában, akkor $\underline{r}_0$-ban léteznek a parciális deriváltak.

Az $\underline{r}_0$ helyen vett gradiens vektor komponensei az ottani parciális deriváltak:

$$\mathrm{grad}\, f(\underline{r}_0) = \left(\partial_1 f(\underline{r}_0), \partial_2 f(\underline{r}_0), \ldots, \partial_n f(\underline{r}_0)\right)$$

Tétel: az iránymenti deriváltak és a gradiens vektor

Legyen az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány $\underline{r}_0$ belső pontjában, $\underline{v}\in\mathbf{R}^n$ legyen rögzített vektor, és $\underline{v}^0$ jelölje a $\underline{v}$ irányú, egységnyi nagyságú vektort.

A $\underline{v}$ irányban vett iránymenti derivált kiszámítható a gradiens vektor és a $\underline{v}^0$ vektor skaláris szorzataként:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{r}_0) = \operatorname{grad} f(\underline{r}_0) \bullet \underline{v}^0$$

Példa

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{{x_2}^2}{4x_1} + \frac{{x_3}^2}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

$\underline{r}_0 = (1,4,2)$ $\underline{v} = (2,2,1)$

Határozzuk meg az f függvény

- **elsőrendű parciális derivált függvényeit**
- **gradiens vektorát az $\underline{r}_0$ helyen**
- **iránymenti deriváltját a $\underline{r}_0$ helyen, a $\underline{v}$ irányban!**

Az elsőrendű parciális derivált függvények:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+\frac{x_2^{\,2}}{4x_1}+\frac{x_3^{\,2}}{x_2}+\frac{2}{x_3}$$

$$\partial_1 f(x_1,x_2,x_3)=1+\frac{0\cdot 4x_1-x_2^{\,2}\cdot 4}{16x_1^{\,2}}+0+0=1-\frac{x_2^{\,2}}{4x_1^{\,2}}$$

!!!a számolás közben x_2 és x_3 konstans!!!

$$\partial_2 f(x_1,x_2,x_3)=0+\frac{1}{4x_1}\cdot 2x_2+\frac{0\cdot x_2-x_3^{\,2}\cdot 1}{x_2^{\,2}}+0=\frac{x_2}{2x_1}-\frac{x_3^{\,2}}{x_2^{\,2}}$$

!!!a számolás közben x_1 és x_3 konstans!!!

$$\partial_3 f(x_1,x_2,x_3)=0+0+\frac{1}{x_2}2x_3+\frac{0\cdot x_3-2\cdot 1}{x_3^{\,2}}=\frac{2x_3}{x_2}-\frac{2}{x_3^{\,2}}$$

!!!a számolás közben x_1 és x_2 konstans!!!

NEM NYOMTATÁSRA!

Az elsőrendű parciális derivált függvények értéke az $\underline{r}_0$ helyen:

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{x_2^2}{4x_1^2}$$

$$\partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_1 f(1,4,2) = -3$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{x_3^2}{x_2^2}$$

$$\partial_2 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(1,4,2) = \frac{7}{4}$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{x_3^2}$$

$$\partial_3 f(\underline{r}_0) = \partial_3 f(1,4,2) = \frac{1}{2}$$

A gradiens vektor:

$$\operatorname{grad} f(\underline{r}_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{r}_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{v} = (2,2,1)$$

$$\underline{v}^0 = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v} = \frac{1}{3} \cdot (2,2,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Az iránymenti derivált:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{r}_0) = \operatorname{grad} f(\underline{r}_0) \bullet \underline{v}^0 = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right) \bullet \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

Definíció: differenciál

Tekintsük az $f:D(\subseteq \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ függvényt.

Legyen

$$\underline{r}_0 = (x_{10} , x_{20} , \dots , x_{n0})$$

a D egy belső pontja, legyen továbbá

$$\underline{r} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$

a D egy pontja és

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{10} \;,\; \Delta x_2 = x_2 - x_{20} \;, \dots ,\; \Delta x_n = x_n - x_{n0} .$$

$$\Delta\underline{r} = \underline{r} - \underline{r}_0 = (\Delta x_1 , \Delta x_2 , \dots , \Delta x_n)$$

Ha f differenciálható az $\underline{r}_0$ helyen, akkor az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli, a $\Delta\underline{r}$ eltéréshez tartozó (első) differenciálja:

$$\partial_1 f(\underline{r}_0)\cdot\Delta x_1 + \partial_2 f(\underline{r}_0)\cdot\Delta x_2 + \dots + \partial_n f(\underline{r}_0)\cdot\Delta x_n$$

$$\partial_1 f(\underline{r}_0) \cdot \Delta x_1 + \partial_2 f(\underline{r}_0) \cdot \Delta x_2 + \ldots + \partial_n f(\underline{r}_0) \cdot \Delta x_n$$

Megjegyzés

A differenciál röviden felírható a gradiens vektor segítségével:

$$\operatorname{grad} f(\underline{r}_0) \bullet \Delta \underline{r}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: lineáris közelítés

Ha az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány $\underline{r}_0$ belső pontjában, akkor az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli lineáris közelítésén azt értjük, hogy a függvény

$$\Delta f = f(\underline{r}) - f(\underline{r}_0)$$

megváltozását a differenciállal közelítjük:

$$\Delta f = f(\underline{r}) - f(\underline{r}_0) \approx \operatorname{grad} f(\underline{r}_0) \bullet \Delta \underline{r} =$$

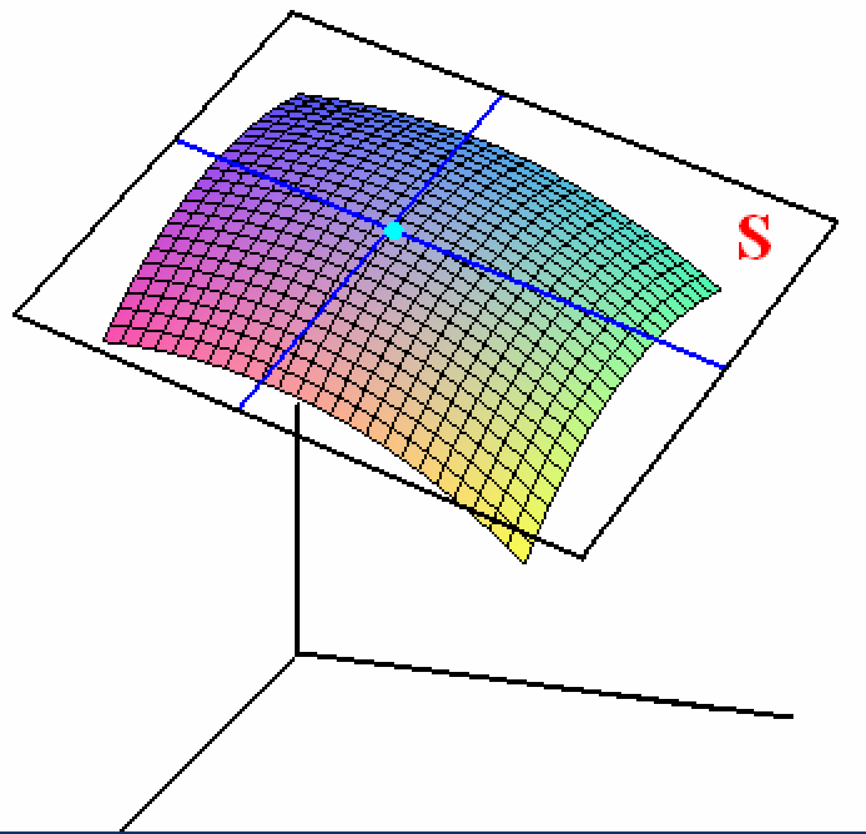
$$= \partial_1 f(\underline{r}_0)\cdot \Delta x_1 + \partial_2 f(\underline{r}_0)\cdot \Delta x_2 + \ldots + \partial_n f(\underline{r}_0)\cdot \Delta x_n$$

avagy:

$$f(\underline{r}) \approx f(\underline{r}_0) + \operatorname{grad} f(\underline{r}_0) \bullet \Delta \underline{r}$$

Lineáris közelítés kétváltozós függvény esetén

Kétváltozós differenciálható függvény esetén a lineáris közelítés az ún. „érintősíkkal való” közelítést jelenti.



Definíció: érintősík

Ha az $(x,y)\to f(x,y)$ kétváltozós függvény differenciálható a $\underline{r}_0=(x_0,y_0)$ helyen, akkor az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli érintősíkján a következő függvényt (annak grafikonját) értjük:

$$S(x,y)=f(\underline{r}_0)+\partial_x f(\underline{r}_0)\cdot(x-x_0)+\partial_y f(\underline{r}_0)\cdot(y-y_0)$$

Az f függvény $\underline{r}_0$ pontbeli lineáris közelítése:

$$f(x,y)\approx S(x,y)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2^{\,2}}{4x_1} + \frac{x_3^{\,2}}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

$$\underline{r}_0 = (1,4,2)$$

Határozzuk meg az f függvény

- **lineáris közelítését az $\underline{r}_0$ helyen**
- **közelítő értékét az**

$$\underline{r}_1 = (1.12 \text{ , } 3.98 \text{ , } 1.95)$$

helyen!

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{x_2^{\,2}}{4x_1^{\,2}}$$

$$\partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_1 f(1,4,2) = -3$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{x_3^{\,2}}{x_2^{\,2}}$$

$$\partial_2 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(1,4,2) = \frac{7}{4}$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{x_3^{\,2}}$$

$$\partial_3 f(\underline{r}_0) = \partial_3 f(1,4,2) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{r}_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{{x_2}^2}{4x_1} + \frac{{x_3}^2}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

$\underline{r}_0 = (1,4,2)$

$\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$

$f(\underline{r}_0) = 7$

$$\operatorname{grad} f(\underline{r}_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

A lineáris közelítés:

$$f(\underline{r}) \approx f(\underline{r}_0) + \operatorname{grad} f(\underline{r}_0) \bullet \Delta\underline{r} =$$
$$= f(\underline{r}_0) + \partial_1 f(\underline{r}_0) \cdot \Delta x_1 + \partial_2 f(\underline{r}_0) \cdot \Delta x_2 + \partial_3 f(\underline{r}_0) \cdot \Delta x_3 =$$
$$= 7 - 3 \cdot (x_1 - 1) + 1.75 \cdot (x_2 - 4) + 0.5 \cdot (x_3 - 2)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$f(\underline{r}) \approx 7 - 3\cdot(x_1 - 1) + 1.75\cdot(x_2 - 4) + 0.5\cdot(x_3 - 2)$$

A függvény közelítő értéke az $\underline{r}_1$ = (1.12 , 3.98 , 1.95) helyen:

$$f(\underline{r}_1) = f(1.12, 3.98, 1.95) \approx$$

$$\approx 7 - 3\cdot(1.12 - 1) + 1.75\cdot(3.98 - 4) + 0.5\cdot(1.95 - 2) =$$

$$= 7 - 3\cdot 0.12 + 1.75\cdot(-0.02) + 0.5\cdot(-0.05) =$$

$$= 7 - 0.36 - 0.035 - 0.025 = 7 - 0.42 = 6.58$$

Definíció: másodrendű parciális deriváltak

Legyen $f:B(\underline{r}_0,r)(\subseteq R^n)\to R$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Ha

- **f-nek minden $\underline{r}\in B(\underline{r}_0,r)$ pontban létezik az i-edik változó szerinti $\partial_i f(\underline{r})$ parciális deriváltja**
- **a $\underline{r}\to\partial_i f(\underline{r})$ parciális derivált függvénynek az $\underline{r}_0$ pontban létezik a j-edik változó szerinti parciális deriváltja**

akkor ezt az f függvény j és i változók szerinti *másodrendű parciális deriváltjának* nevezzük.

Jelölés

$$\partial_j \partial_i f(\underline{r}_0)$$

Megjegyzés

A másodrendű parciális deriváltak jelölésére szokásosak még az alábbi jelölések is:

$$\partial^2_{ji} f(\underline{r}_0) \qquad f''_{ji}(\underline{r}_0)$$

A jelölésben utalhatunk közvetlenül azokra a változókra, melyek szerint a deriválást végeztük. Például az x_1, majd az x_2 változó szerinti deriválás jelölése:

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(\underline{r}_0) \qquad \partial^2_{x_2 x_1} f(\underline{r}_0) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(\underline{r}_0) \qquad f''_{x_2 x_1}(\underline{r}_0)$$

Definíció

Ha $f:B(\underline{r}_0,r)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvénynek $B(\underline{r}_0,r)$-ban léteznek az elsőrendű parciális derivált függvényei, és ezek újra minden változó szerint parciálisan differenciálhatók az $\underline{r}_0$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható $\underline{r}_0$-ban.

Definíció

Ha $f:B(\underline{r}_0,r)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvénynek $B(\underline{r}_0,r)$-ban léteznek az másodrendű parciális derivált függvényei és ezek folytonosak $\underline{r}_0$-ban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer folytonosan differenciálható $\underline{r}_0$-ban.

Megjegyzés: Young tétel (a deriválások sorrendjének felcserélhetősége)

Ha az f:B($\underline{r}_0$,r)($\subseteq R^n$)$\to$R függvény kétszer differenciálható $\underline{r}_0$-ban, akkor az $\underline{r}_0$ pontbeli másodrendű parciális deriváltak kiszámításakor a deriválások sorrendje felcserélhető, azaz

$$\partial_j \partial_i f(\underline{r}_0) = \partial_i \partial_j f(\underline{r}_0)$$

$i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Kvadratikus függvények

Definíció

Legyen n pozitív egész szám. A

$$Q(h_1,\dots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j$$

alakú függvényeket, ahol $A=(a_{ij})$ egy n-edrendű szimmetrikus mátrix, kvadratikus függvényeknek (vagy kvadratikus formának) nevezzük.

Az A mátrix a Q kvadratikus függvény mátrixa.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Az A mátrixhoz tartozó (3 változós) kvadratikus függvény:

$$\begin{aligned} Q(h_1, h_2, h_3) = {} & 2h_1^2 + 1h_1 \cdot h_2 + 3h_1 \cdot h_3 + \\ & + 1h_2 \cdot h_1 + 2h_2^2 - 2h_2 \cdot h_3 + \\ & + 3h_3 \cdot h_1 - 2h_3 \cdot h_2 + 4h_3^2 = \\ = {} & 2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3 \end{aligned}$$

Megjegyzés

Nyilvánvaló, hogy bármely Q kvadratikus függvényre $Q(0) = 0$.

Definíció

A $Q:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kvadratikus függvény

- **pozitív definit, ha $Q(h) > 0$, amikor $h \neq 0$**
- **negatív definit, ha $Q(h) < 0$, amikor $h \neq 0$**
- **indefinit, ha Q fölvehet pozitív és negatív értéket egyaránt.**

Példa

A

$$Q(h_1, h_2, h_3) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3$$

függvény pozitív definit.

Ez az alábbi egyszerű átalakításból könnyen levezethető:

$$2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3 =$$

$$= (h_1+h_2)^2 + (h_2-2h_3)^2 + (h_1+3h_3)^2$$

Definíció: sarokdeterminánsok

Egy n-edrendű kvadratikus mátrix sarokdeterminánsai az első k sorban és az első k oszlopban lévő elemekből álló k-adrendű mátrixok determinánsai (k=1,…,n).

Példa

A $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ **mátrix sarokdeterminánsai:**

$$D_1 = \det(2) = 2$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a definitség megállapítása sarokdeterminánsokkal

Egy kvadratikus függvény pontosan akkor pozitív definit, ha mátrixának bal felső sarokdeterminánsai pozitívak:

$$D_1 > 0 \, , \, D_2 > 0 \, , \, \ldots \, , \, D_n > 0$$

Egy kvadratikus függvény pontosan akkor negatív definit, ha mátrixának bal felső sarokdeterminánsai váltakozó előjelűek úgy, hogy D_1 negatív:

$$D_1 < 0 \, , \, D_2 > 0 \, , \, D_3 < 0 \, , \, D_4 > 0 \, , \, \ldots$$

Egy kvadratikus függvény mátrixának bal felső sarokdeterminánsai nullától különbözőek, és a fenti két eset nem áll fenn, akkor a kvadratikus függvény indefinit.

Példa

$$Q(h_1, h_2, h_3) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \det(2) = 2 > 0$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

Így Q pozitív definit.

Többváltozós differenciálható függvények szélsőérték-számítása

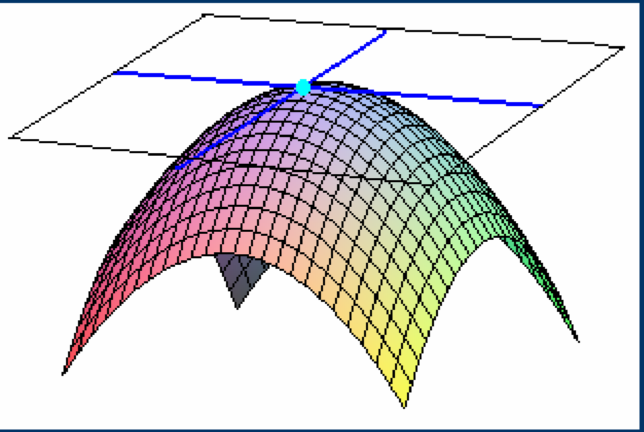
Tétel: a helyi szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha az f:D($\subseteq$R^n)$\to$R differenciálható függvénynek helyi szélsőértéke van a D értelmezési tartomány $\underline{r}_0$ belső pontjában, akkor az $\underline{r}_0$ pontbeli elsőrendű parciális deriváltak értéke 0:

$$\partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(\underline{r}_0) = \ldots = \partial_n f(\underline{r}_0) = 0$$

Megjegyzés

Kétváltozós differenciálható függvény esetén ott lehet helyi szélsőérték, ahol az érintő sík „vízszintes”.



NEM NYOMTATÁSRA!

Következmény

Differenciálható függvény esetén a helyi szélsőértékek keresésekor elsőként azokat $\underline{r}_0$ helyeket kell meghatározni, ahol a parciális deriváltak értéke 0, az előző tétel szerint ui. helyi szélsőérték csak ezeken a helyeken lehet.

Megjegyzés

Helyi szélsőérték létezéséhez nem elegendő, hogy az elsőrendű parciális deriváltak értéke 0.

Az elegendőséghez további feltételt kell megfogalmazni a másodrendű parciális deriváltakra vonatkozóan.

Definíció

Legyen az f:B($\underline{r}_0$,r)($\subseteq R^n$)$\to$R függvény kétszer folytonosan differenciálható $\underline{r}_0$-ban, és definiáljuk a Q:$R^n \to R$ függvényt a következőképpen:

$$Q(h_1,\dots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_i\partial_j f(\underline{r}_0)h_i h_j$$

Megjegyzés

Az így definiált Q függvény kvadratikus.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a helyi szélsőérték létezésének elegendő feltétele

1. ESET

Legyen az f:B($\underline{r}_0$,r)($\subseteq R^n$)$\to$R függvény kétszer folytonosan differenciálható $\underline{r}_0$-ban.

Ha

$$\partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(\underline{r}_0) = \ldots = \partial_n f(\underline{r}_0) = 0$$

és a

$$Q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_i\partial_j f(\underline{r}_0)h_i h_j$$

kvadratikus függvény pozitív definit, akkor f-nek $\underline{r}_0$-ban helyi minimuma van.

Tétel: a helyi szélsőérték létezésének elegendő feltétele

2. ESET

Legyen az f:B($\underline{r}_0$,r)($\subseteq$R^n)$\to$R függvény kétszer folytonosan differenciálható $\underline{r}_0$-ban.

Ha

$$\partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(\underline{r}_0) = \ldots = \partial_n f(\underline{r}_0) = 0$$

és a

$$Q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_i\partial_j f(\underline{r}_0)h_i h_j$$

kvadratikus függvény negatív definit, akkor f-nek $\underline{r}_0$-ban helyi maximuma van.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a helyi szélsőérték létezésének elegendő feltétele

3. ESET

Legyen az f:B($\underline{r}_0$,r)($\subseteq R^n$)$\to$R függvény kétszer folytonosan differenciálható $\underline{r}_0$-ban.

Ha

$$\partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(\underline{r}_0) = \ldots = \partial_n f(\underline{r}_0) = 0$$

és a

$$Q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(\underline{r}_0) h_i h_j$$

kvadratikus függvény indefinit, akkor f-nek $\underline{r}_0$-ban nincs helyi szélsőértéke.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Határozzuk meg a következő függvény helyi szélsőérték-helyeit és a szélsőértékeket!

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2^2}{4x_1} + \frac{x_3^2}{x_2} + \frac{2}{x_3}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$$

1. lépés

Az elsőrendű parciális derivált függvények meghatározása:

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{x_2^2}{4x_1^2}$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{x_3^2}{x_2^2}$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{x_3^2}$$

2. lépés

A $\partial_1 f = \partial_2 f = \ldots = \partial_n f = 0$ egyenletrendszer megoldása:

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{x_2^2}{4x_1^2} = 0$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{x_3^2}{x_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{x_3^2} = 0$$

$$\partial_1 f(x_1,x_2,x_3)=1-\frac{x_2^2}{4x_1^2}$$

$$\partial_2 f(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_2}{2x_1}-\frac{x_3^2}{x_2^2}$$

$$\partial_3 f(x_1,x_2,x_3)=\frac{2x_3}{x_2}-\frac{2}{x_3^2}$$

3. lépés

A másodrendű parciális derivált függvények meghatározása.

$$\begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{2x_1^3} & \frac{-x_2}{2x_1^2} & 0 \\ \frac{-x_2}{2x_1^2} & \frac{1}{2x_1}+\frac{2x_3^2}{x_2^3} & \frac{-2x_3}{x_2^2} \\ 0 & \frac{-2x_3}{x_2^2} & \frac{2}{x_2}+\frac{4}{x_3^3} \end{pmatrix}$$

(A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a függvényeket táblázatba írjuk. Az első sorban a $\partial_1 f$, a második sorban $\partial_2 f$, a harmadik sorban a $\partial_3 f$ függvény deriváltjai vannak.)

4. lépés

A másodrendű parciális derivált függvények értékének meghatározása ott, ahol az elsőrendű deriváltak értéke egyszerre volt nulla.

Most egy ilyen pont van az $\underline{r}_1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{2x_1^3} & \frac{-x_2}{2x_1^2} & 0 \\ \frac{-x_2}{2x_1^2} & \frac{1}{2x_1}+\frac{2x_3^2}{x_2^3} & \frac{-2x_3}{x_2^2} \\ 0 & \frac{-2x_3}{x_2^2} & \frac{2}{x_2}+\frac{4}{x_3^3} \end{pmatrix} \quad \underline{r}_1=\left(\frac{1}{2},1,1\right) \quad \Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

5. lépés

Meg kell állapítani, hogy az A mátrix milyen definitségű Q kvadratikus függvényhez tartozik, ebből megállapítható, hogy a vizsgált pontban van-e helyi szélsőérték, és milyen jellegű.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

$$D_1=\det(4)=4$$

$$D_2=\det\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=8$$

$$D_3=\det\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}=32$$

D_1= 16 > 0, D_2= 28 > 0, D_3= 104 > 0 vagyis az A mátrix pozitív definit kvadratikus függvényhez tartozik. Ebből következik, hogy az f-nek P-ben helyi minimuma van.

Megjegyzés

A fentiekből látható, hogy a

$$Q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_i\partial_j f(\underline{r}_0)h_i h_j$$

kvadratikus függvényt nem szükséges felírni, elegendő csak a mátrixával számolni.

A fent megoldott feladatban a kvadratikus függvény a következő alakú lett volna:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Q(h_1, h_2, h_3) = 4\cdot h_1^2 - 4\cdot h_1\cdot h_2 + 3\cdot h_2^2 - 4\cdot h_2\cdot h_3 + 6\cdot h_3^2$$

Többváltozós Taylor polinomok

A