Valós számsorozatok

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: sorozat

Legyen $A \neq \emptyset$. Az $f: \mathbf{N} \to A$ függvényeket az A halmaz elemeiből képzett sorozatoknak nevezzük.

(N szokás szerint a természetes számok halmazát jelöli.)

$$\begin{array}{l} 1 \to f(1) \\ 2 \to f(2) \\ \quad\vdots \\ n \to f(n) \\ \quad\vdots \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 \to f_1 \\ 2 \to f_2 \\ \quad\vdots \\ n \to f_n \\ \quad\vdots \end{array}$$

Jelölések

$f_n = f(n)$: az f sorozat n-edik eleme

(f_n) : az $f: \mathbf{N} \to A$ sorozat rövid jelölése

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: valós számsorozat

Az $(a_n):\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ sorozatokat valós számsorozatoknak nevezzük.

Példa

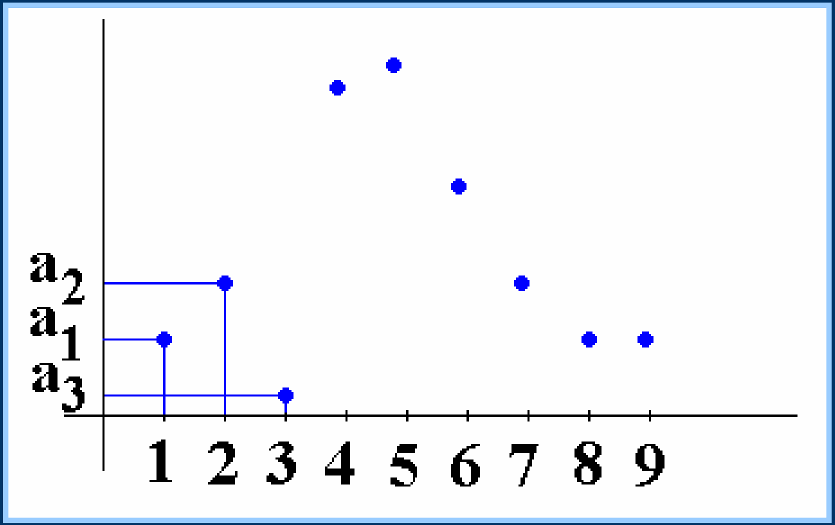
Az $a_n = n^2 + 2n$ sorozat első 5 eleme:

$$a_1 = 3 ,\ a_2 = 8 ,\ a_3 = 15 ,\ a_4 = 24 ,\ a_5 = 35$$

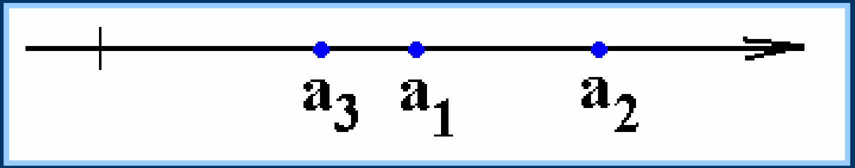
NEM NYOMTATÁSRA!

Számsorozatok ábrázolása

Függvényszerűen:



Számegyenesen:



NEM NYOMTATÁSRA!

Valós számsorozatok határértéke

számsorozatok

konvergens sorozatok
(a határérték egy valós szám)

divergens sorozatok

$+\infty$-hez divergáló sorozatok
(a határérték $+\infty$)

$-\infty$-hez divergáló sorozatok
(a határérték $-\infty$)

egyéb divergens sorozatok
(nincs határérték)

NEM NYOMTATÁSRA!

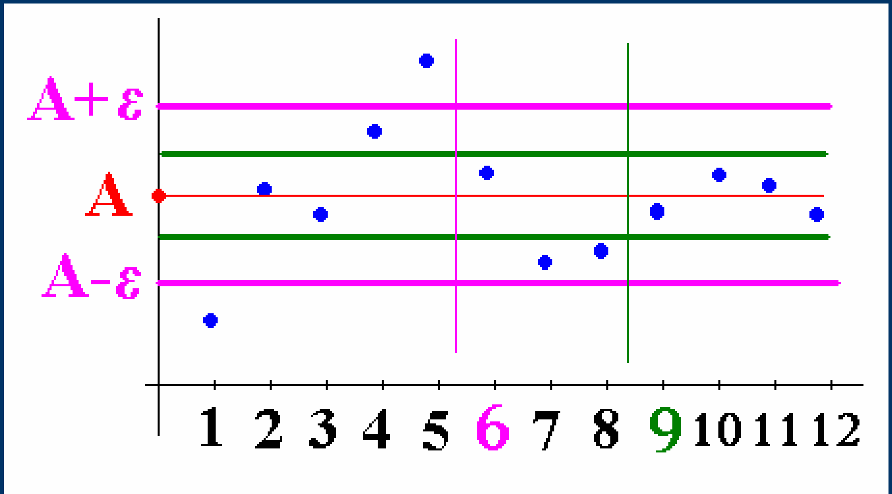
Definíció: konvergens sorozat

Az (a_n) sorozat konvergens, ha van olyan A valós szám, hogy bármely pozitív ε esetén az A szám

$]\, A - \varepsilon\, ,\, A + \varepsilon\, [$ környezetén kívül

a sorozatnak legfeljebb csak véges sok eleme van.

Az A valós számot a sorozat határértékének nevezzük.



Jelölések

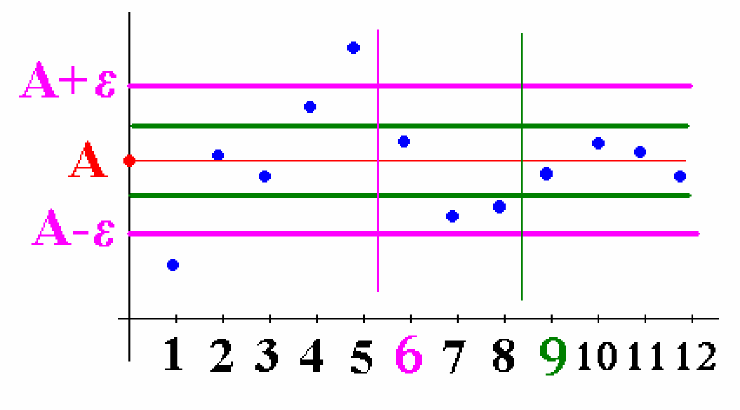
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim a_n = A \qquad a_n \to A$$

Tétel **Ha egy sorozat konvergens, akkor a határértéke egyértelmű.**
(Azaz: nem lehet több különböző határérték.)

Tétel: a konvergencia egy ekvivalens megfogalmazása

Az (a_n) sorozat konvergens, ha van olyan A valós szám, melyre igaz a következő állítás:

az A bármely $U=]A-\varepsilon,A+\varepsilon[$ környezetéhez van olyan $n_0 \in N$ szám (küszöbszám), hogy az n_0-adik elemtől kezdődően (azaz ha $n \geq n_0$) a sorozat minden eleme U-ban van.

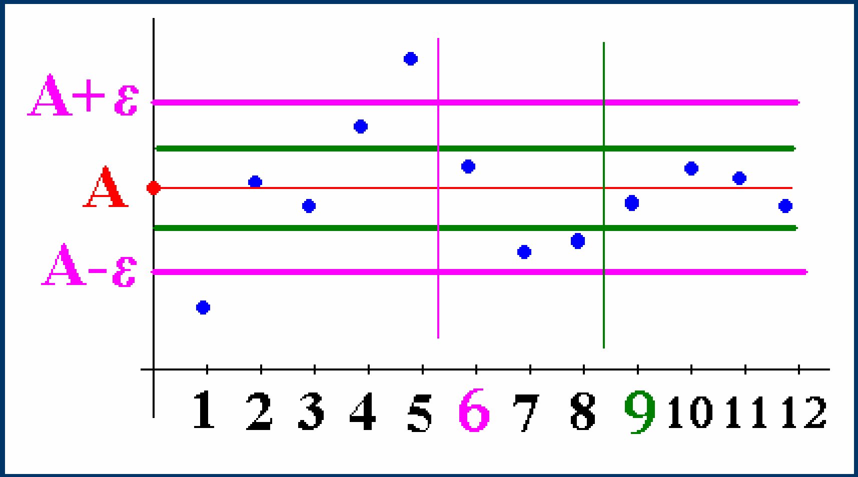


Tétel: a konvergencia egy ekvivalens megfogalmazása

Az (a_n) sorozat konvergens, ha van olyan A valós szám, melyre igaz a következő állítás:

bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_o \in \mathbf{N}$, hogy

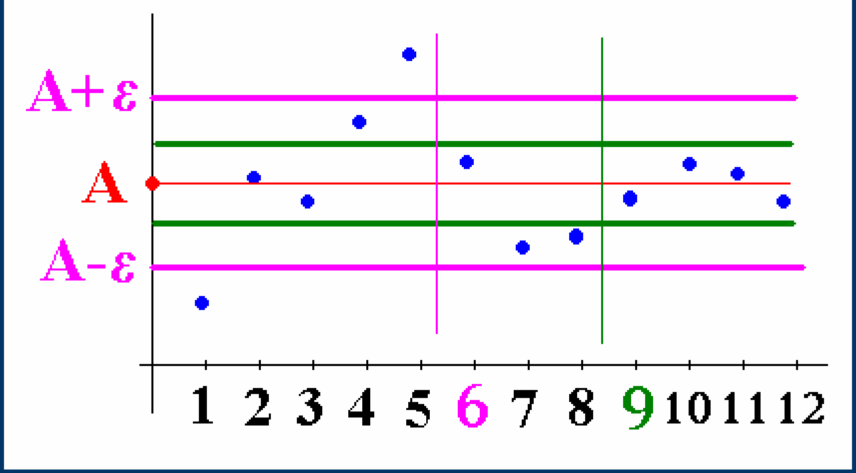
ha $n \geq n_o$, akkor $| a_n - A | < \varepsilon$.



Megjegyzés

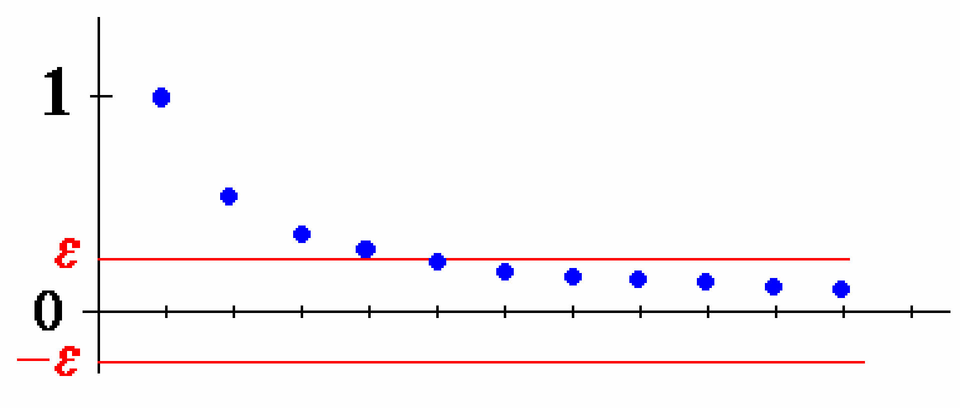
A konvergencia fenti megfogalmazásainak ekvivalenciája könnyen belátható, ha észrevesszük, hogy az alábbi három feltétel ugyanazt jelenti:

$a_n \in \left] A-\varepsilon , A+\varepsilon \right[$	$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$	$\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$



Példa

Igazoljuk, hogy $\lim \dfrac{1}{n} = 0$



A konvergencia harmadik ekvivalens megfogalmazása szerint ehhez azt kell kimutatni, hogy ha n „elég" nagy, akkor az $| a_n - 0 |$ eltérés bármilyen kicsi pozitív ε számnál is kisebb lesz.

Ez igaz, hiszen

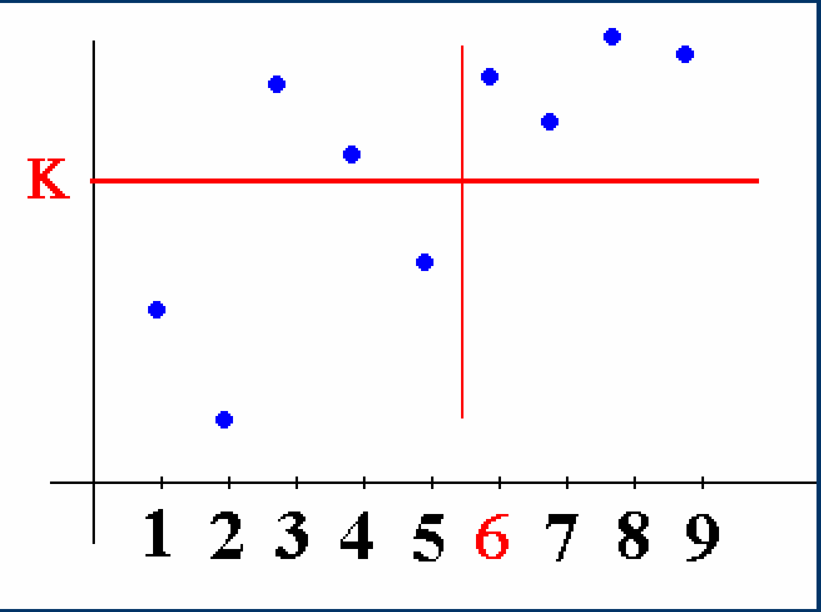
$$| a_n - 0 | < \varepsilon \Leftrightarrow | 1/n - 0 | < \varepsilon \Leftrightarrow 1/n < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon$$

Például: $\varepsilon = 0{,}002$ esetén $n_o = 501$ megfelel küszöbszámnak

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: $+\infty$-hez divergáló sorozatok

Az (a_n) sorozat $+\infty$-hez divergál, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ szám esetén a sorozatnak legfeljebb csak véges sok, K-nál kiesebb eleme van.

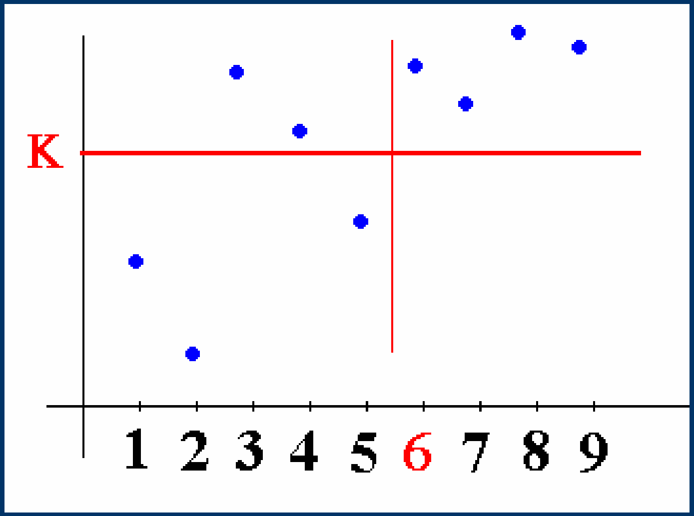


Jelölések

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \lim a_n = +\infty \qquad a_n \to +\infty$$

Tétel: egy ekvivalens megfogalmazás

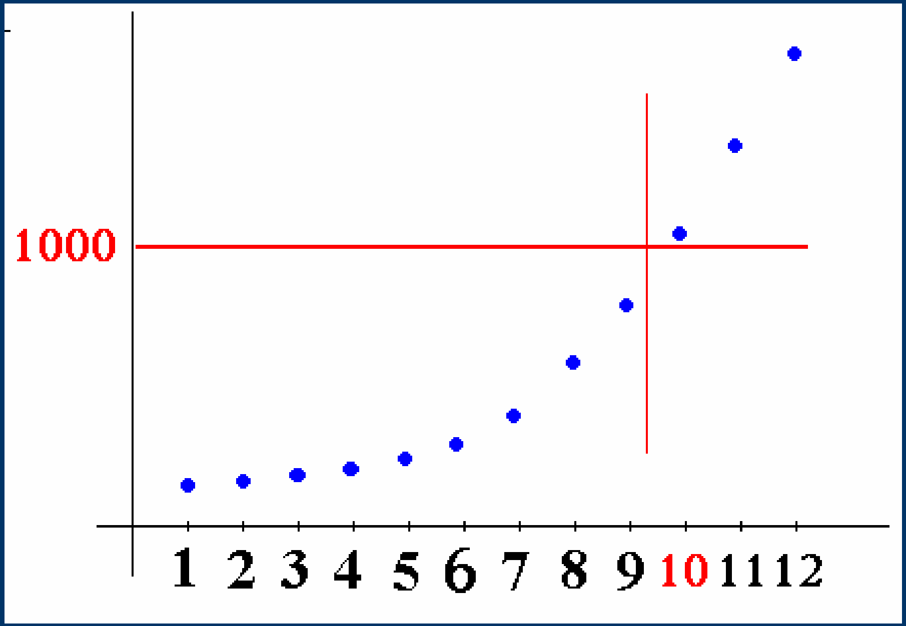
Az (a_n) sorozat $+\infty$-hez divergál, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n_o \in \mathbb{N}$ szám (küszöbszám), hogy az n_o-adik elemtől kezdődően (azaz ha $n \geq n_o$) a sorozat minden eleme K-nál nagyobb vagy egyenlő.



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\lim 2^n = +\infty$$



Indoklás: $a_n = 2^n > K$, ha $n > \log_2 K$

Például:

K=1000 esetén n_o=10 megfelel küszöbszámnak

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: -∞-hez divergáló sorozatok

Az (a_n) sorozat -∞-hez divergál, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ szám esetén a sorozatnak legfeljebb csak véges sok, K-nál nagyobb eleme van.

Jelölések

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \lim a_n = -\infty \qquad a_n \to +\infty$$

Példa

$$\lim\,(-2^n) = -\infty$$

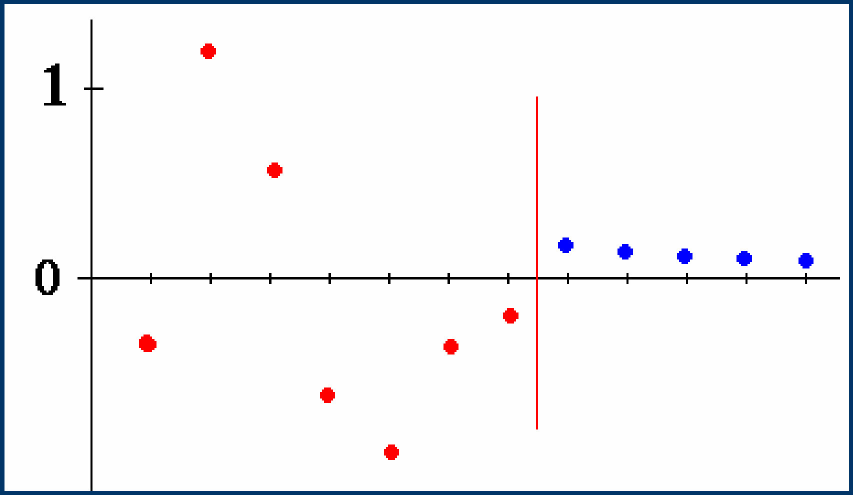
Megjegyzés

Vigyázat: lim (-2^n) és lim $(-2)^n$ nem ugyanazt jelenti!

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A határérték a sorozat „végének” jellemzője: ha az (a_n) sorozatnak van határértéke, akkor az (a_n) véges sok elemének megváltoztatásával keletkező sorozatnak is ugyanannyi a határértéke.



Néhány nevezetes konvergens sorozat

$$\lim q^{n} = \begin{cases} 0 & ,\text{ha} \quad -1 < q < 1 \\ 1 & ,\text{ha} \quad q = 1 \\ +\infty & ,\text{ha} \quad q > 1 \\ - & ,\text{ha} \quad q \le -1 \end{cases}$$

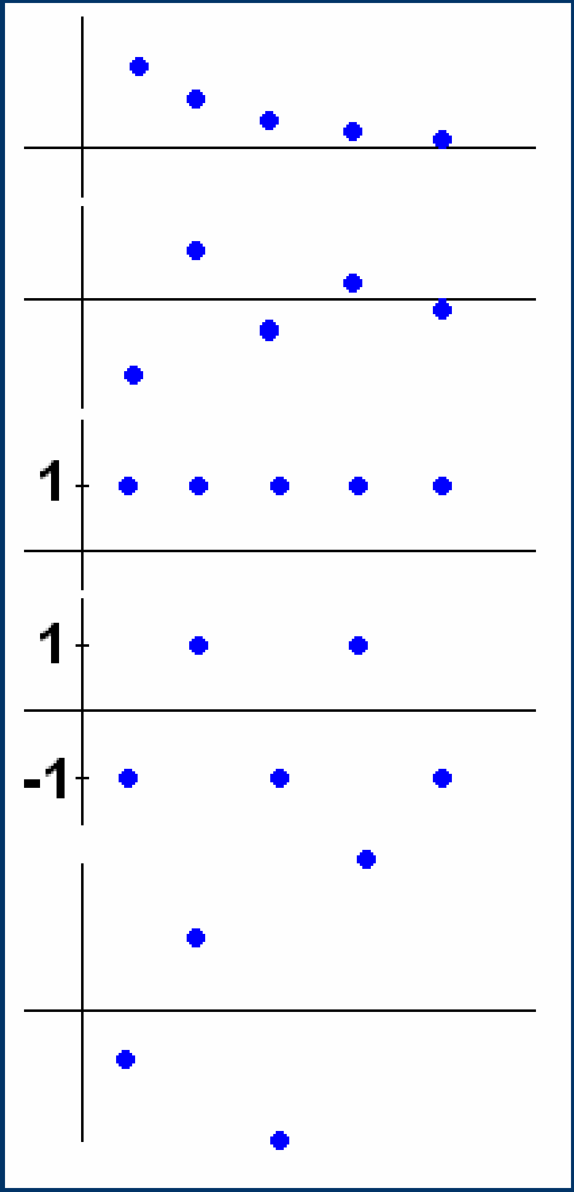
$$q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$q_n = (1)^{n}$$

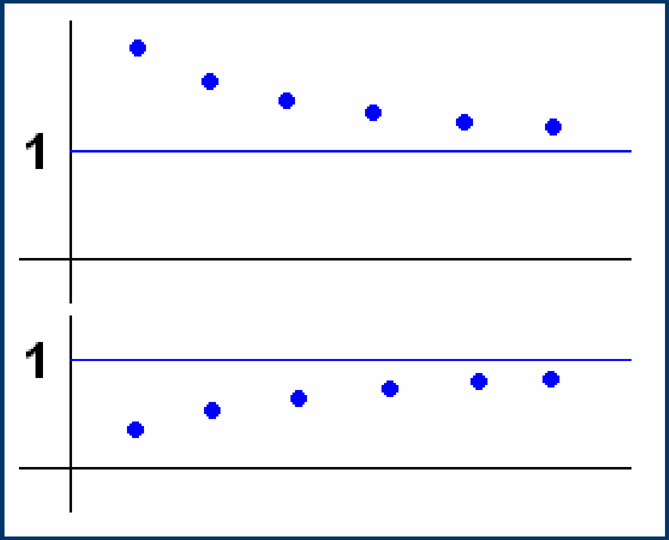
$$q_n = (-1)^{n}$$

$$q_n = (-2)^{n}$$



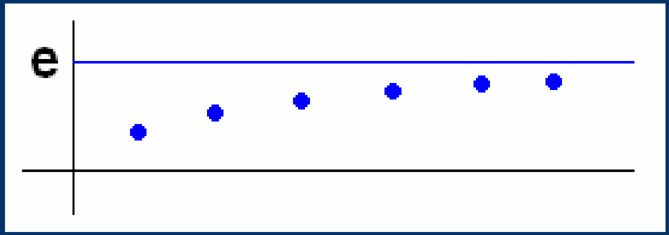
NEM NYOMTATÁSRA!

$$\lim \sqrt[n]{c} = 1 \quad (c > 0)$$



$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718$$



e: az Euler szám, értéke közelítőleg 2,718

Tétel: a határérték és a műveletek kapcsolata

Ha az (a_n) és a (b_n) sorozatok konvergensek, továbbá

$$\lim a_n = A\text{ , }\lim b_n = B \quad (A,B\in \mathbf{R}) \quad \text{és} \quad c\in \mathbf{R},$$

akkor az (a_n+b_n), az $(a_n \cdot b_n)$ és a $(c \cdot a_n)$ sorozatok is konvergensek, és

$$\boxed{\lim\,(a_n + b_n) = A + B} \qquad \boxed{\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B}$$

$$\boxed{\lim\,(c \cdot a_n) = c \cdot A}$$

Továbbá ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, és $B \neq 0$, akkor az (a_n/b_n) sorozat is konvergens és

$$\boxed{\lim\,(a_n / b_n) = A / B}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Ha két (véges, vagy végtelen) határértékkel rendelkező sorozat között műveletet végzünk, de nem teljesülnek az előző tétel feltételei, például azért, mert legalább az egyik sorozat határértéke végtelen, vagy két 0 határértékű sorozatot osztottunk el, akkor előfordulhat az is, hogy pusztán a határértékek alapján meg lehet állapítani az új sorozat határértékét, de az is, hogy ez nem lehetséges (ha van egyáltalán határérték). Az utóbbi eseteket szokás határozatlan alakú határérték-feladatnak nevezni.

A következő táblázatban ? jelöli a határozatlan eseteket. A ! jel arra utal, hogy előjelvizsgálattal a határérték megállapítható. A többi esetben a határérték szerepel.

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim a_n+b_n$	$\lim a_n-b_n$	$\lim b_n-a_n$	$\lim a_n \cdot b_n$	$\lim a_n/b_n$	$\lim b_n/a_n$
$A>0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
$A<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$A>0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$A<0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	0	!
0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	0	!
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	?	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	?	$+\infty$	?	?

NEM NYOMTATÁSRA!

A következő tételben szereplő állításokat gyakran kell alkalmazni a számolásokban.

Tétel

Ha $a_n \to 0$ és $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\frac{1}{a_n} \to +\infty$$

Ha $a_n \to 0$ és $a_n < 0$, $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\frac{1}{a_n} \to -\infty$$

Ha $a_n \to +\infty$ vagy $a_n \to -\infty$, akkor

$$\frac{1}{a_n} \to 0$$

További, gyakran előforduló „határozatlan formák”

A $\lim \frac{a_n}{b_n}$ **határérték-feladat határozatlan, ha $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$.**

A $\lim (a_n)^{b_n}$ **határérték-feladat határozatlan az alábbi esetekben:**

- $a_n \to 0$ **és** $b_n \to 0$
- $a_n \to 1$ **és** $b_n \to +\infty$
- $a_n \to +\infty$ **és** $b_n \to 0$

Példa: egy határozatlan feladat megoldása

A $\lim \dfrac{5n^2-3n+12}{3n^2+7n}$ **határérték-feladat +∞/+∞ típusú, így határozatlan.**

A feladat megoldható az alábbi technikával, melynek lényege, hogy a a tört számlálóját és nevezőjét elosztjuk az n-nek a nevezőben szereplő legnagyobb hatványával (itt n^2-tel):

$$\lim \frac{5n^2-3n+12}{3n^2+7n} = \lim \frac{5-\frac{3}{n}+\frac{12}{n^2}}{3+\frac{7}{n}} = \frac{5-0+0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

A határérték és a rendezés kapcsolata

Tétel

Ha $a_n \to A$, $b_n \to B$ és $a_n \le b_n$, $n \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $A \le B$

Tétel: „rendőr elv”

Ha $a_n \to A$, $b_n \to A$ és $a_n \le c_n \le b_n$, $n \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $c_n \to A$

Példa

$$\lim \frac{\sin n}{n} = ?$$

$$-1 \le \sin n \le 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\downarrow \atop 0} \le \frac{\sin n}{n} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow \atop 0} \quad \Rightarrow \quad \lim \frac{\sin n}{n} = 0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A határérték és a rendezés kapcsolata

Tétel

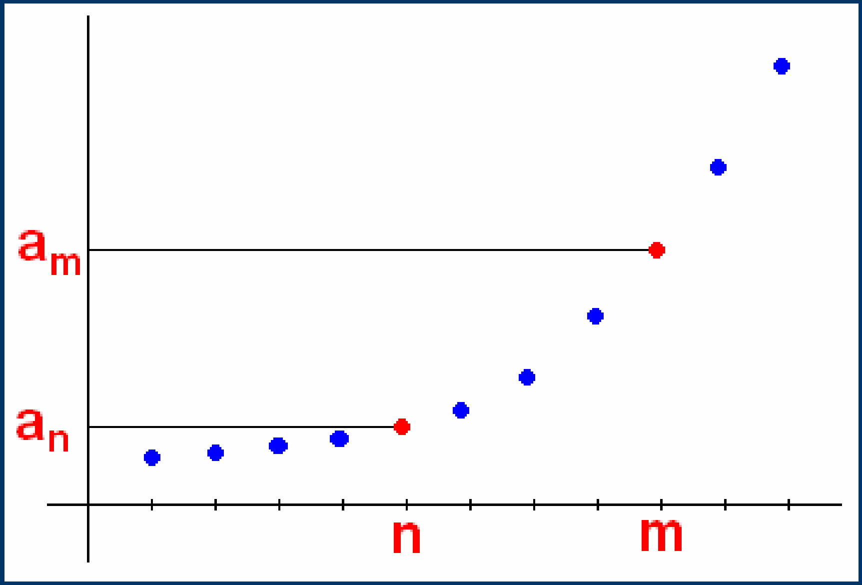
Ha $a_n \to +\infty$ és $a_n \leq b_n,\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow b_n \to +\infty$

Tétel

Ha $b_n \to -\infty$ és $a_n \leq b_n,\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_n \to -\infty$

Definíció: monotonitás

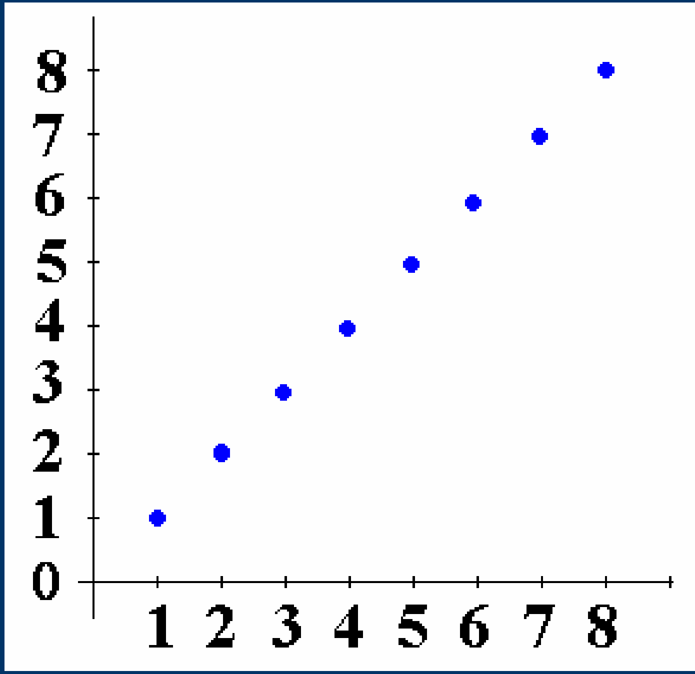
Az (a_n) sorozat $\left\{\begin{array}{l}\text{monoton növekvő}\\ \text{szigorúan monoton növekvő}\\ \text{monoton csökkenő}\\ \text{szigorúan monoton csökkenő}\end{array}\right.$ ha $n < m \Rightarrow a_n \left\{\begin{array}{l}\leq\\ <\\ \geq\\ >\end{array}\right. a_m$



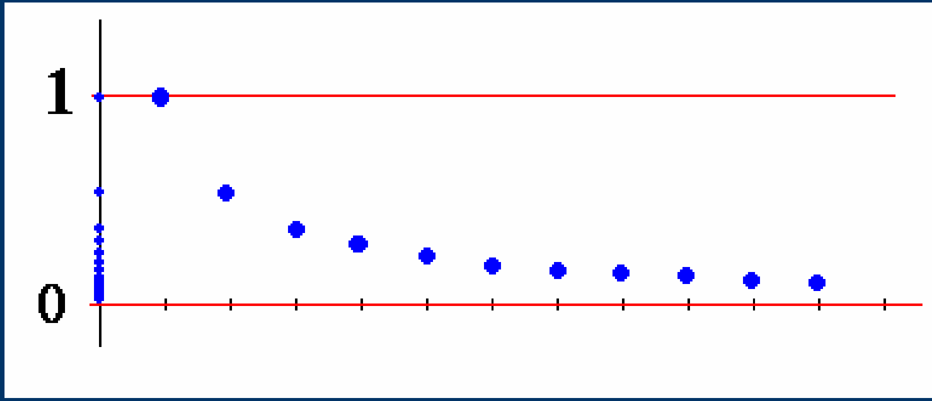
NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$a_n = n$ sorozat szigorúan monoton növekvő



$a_n = 1/n$ sorozat szigorúan monoton csökkenő



NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: korlátosság

Az $(a_n): \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat $\left\{ \begin{array}{l} \text{alulról korlátos} \\ \text{felülről korlátos} \\ \text{korlátos} \end{array} \right.$ ha az értékkészlete

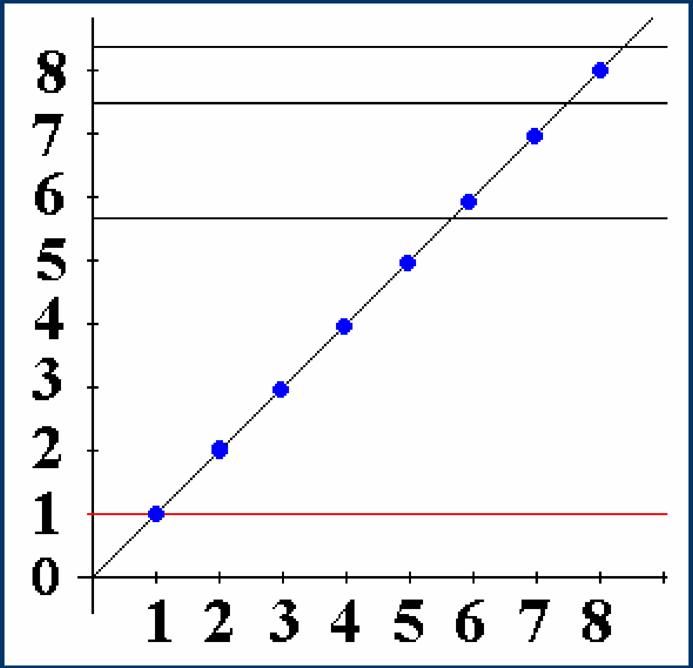
ugyanolyan értelemben korlátos.

Definíció

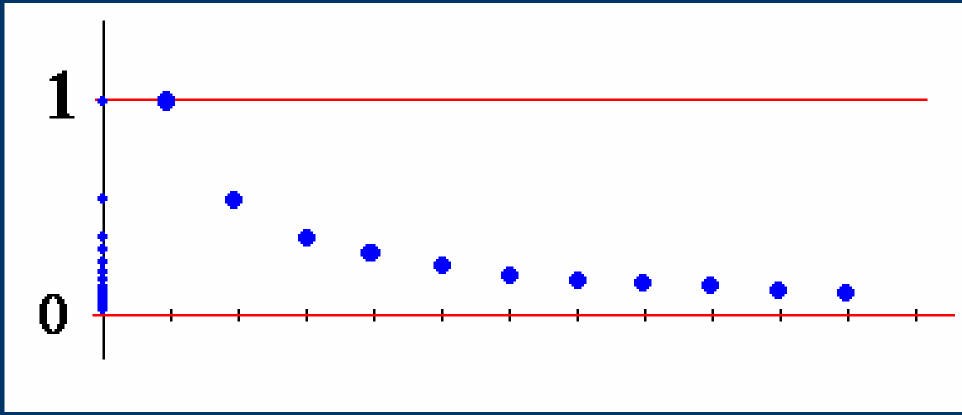
Az értékkészlet felső, alsó, pontos felső, pontos alsó korlátja, a sorozatnak ugyanolyan korlátja.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa



$a_n = n$ sorozat
pontos alsó korlátja: 1
felülről nem korlátos



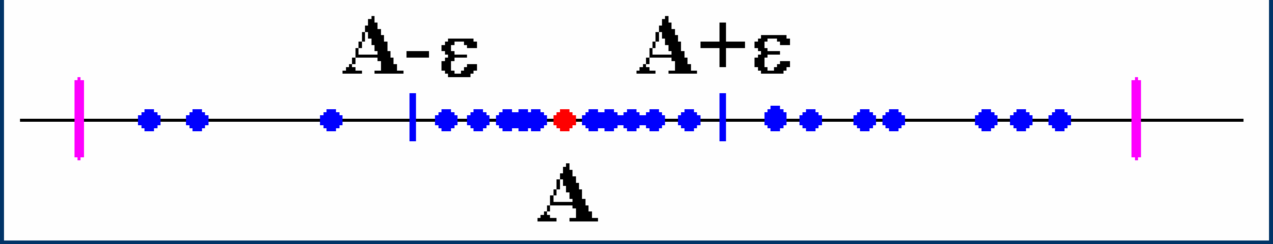
$a_n = 1/n$ sorozat
pontos alsó korlátja: 0
pontos felső korlátja: 1

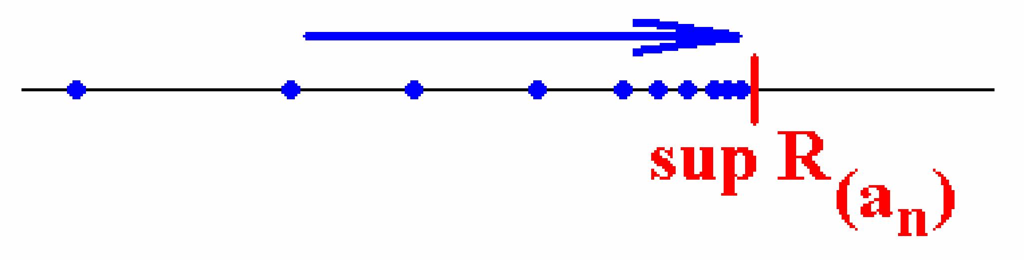
Tétel: összefüggések a tulajdonságok között

1. ***Monoton növekvő*** **sorozat első eleme egyben a sorozat pontos alsó korlátja.**
2. ***Monoton növekvő konvergens*** **sorozat határértéke egyben a sorozat pontos felső korlátja.**
3. ***Monoton csökkenő*** **sorozat első eleme egyben a sorozat pontos felső korlátja.**
4. ***Monoton csökkenő konvergens*** **sorozat határértéke egyben a sorozat pontos alsó korlátja.**

Tétel: összefüggések a tulajdonságok között

1. **Konvergens sorozat korlátos.**
2. **Monoton növekvő, felülről korlátos sorozat konvergens**
3. **Monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat konvergens**





NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: torlódási pont

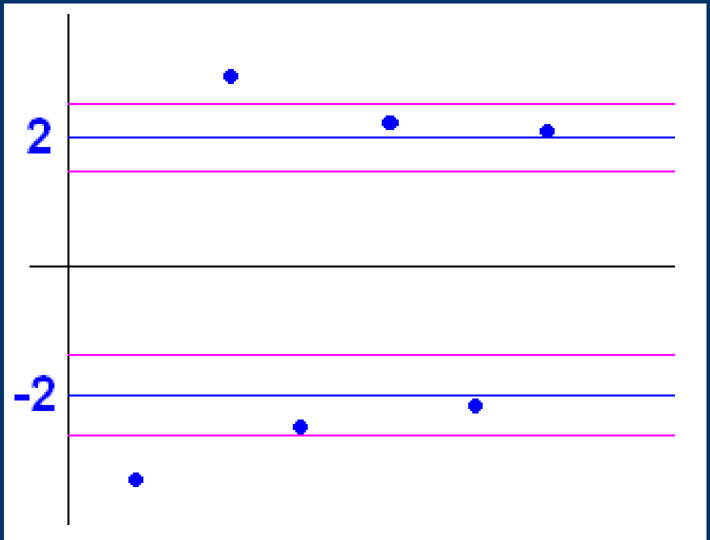
Az $A \in \mathbb{R}$ szám egy sorozat torlódási pontja, ha az A bármely környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.
(Itt az elemek értéke nem feltétlenül különböző, így a sorozat torlódási pontja nem feltétlenül torlódási pontja az értékkészletnek, mint halmaznak!)

Megjegyzés

Konvergens sorozatnak pontosan egy torlódási pontja van: a határértéke.

Példa

Az $a_n = (-1)^n \cdot (2 + 1/n)$ sorozatnak két torlódási pontja van: -2 és 2



Példa

Az $a_n = \sin(n \cdot \pi/2) + (1/n)$ sorozatnak három torlódási pontja van: -1, 0 és 1

Definíció: felső határérték (limesz szuperior)

Az (a_n) sorozat felső határértéke (limes szuperiora): az (a_n) torlódási pontjai halmazának szuprémuma.
Speciálisan: ha van a torlódási pontok között legnagyobb, akkor ez egyenlő a limesz szuperiorral.

Jelölések

$$\overline{\lim}\, a_n \qquad \limsup a_n$$

Definíció: alsó határérték (limesz inferior)

Az (a_n) sorozat alsó határértéke (limes inferiorja): az (a_n) torlódási pontjai halmazának szuprémuma.
Speciálisan: ha van a torlódási pontok között legkisebb, akkor ez egyenlő a limesz inferiorral.

Jelölések

$$\underline{\lim}\, a_n \qquad \liminf a_n$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor

$$\lim a_n = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$$

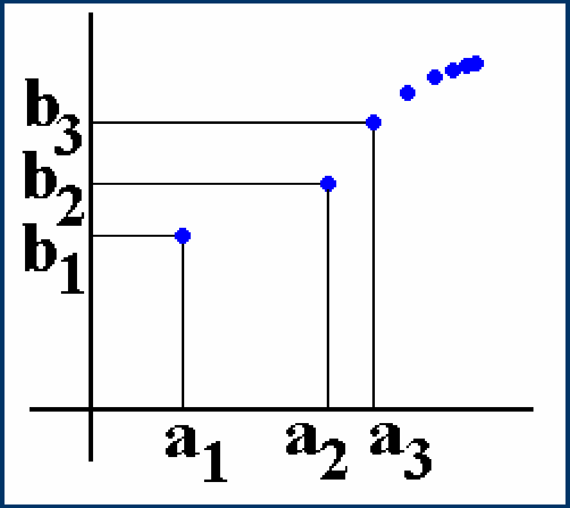
Indoklás:
Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor pontosan egy torlódási pontja van a határértéke, ami egyben a legnagyobb és a legkisebb torlódási pont is.

NEM NYOMTATÁSRA!

Komplex számsorozatok

Definíció: komplex számsorozat

Az $(z_n):\mathbf{N}\to\mathbf{C}$ sorozatokat komplex számsorozatoknak nevezzük.



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Egy $(z_n):\mathbf{N}\to\mathbf{C}$ komplex számsorozatokat azonosítható két valós számsorozattal: a valós részek $(a_n):\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ és a képzetes részek $(b_n):\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ sorozatával.

Példa

A $z_n = a_n + b_n \cdot i = n^2 + 2n \cdot i$ sorozat első 4 eleme:

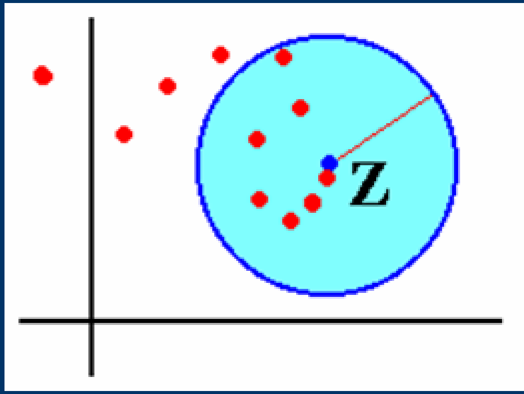
$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = 4 + 4i, \qquad z_3 = 9 + 6i, \qquad z_4 = 16 + 8i$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: konvergens komplex számsorozatok

A (z_n) komplex számsorozat konvergens, ha van olyan z komplex szám, melynek bármely $G(z,r)$ környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb csak véges sok eleme van.

A z komplex számot a sorozat határértékének nevezzük.



Jelölések

$$\lim_{n\to\infty} z_n = Z \qquad \lim z_n = Z \qquad z_n \to Z$$

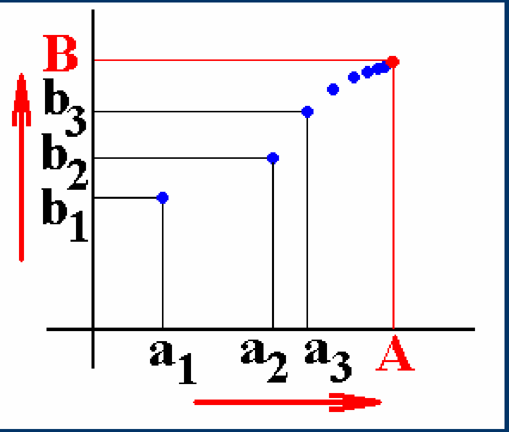
NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Egy komplex számsorozat pontosan akkor konvergens, ha a valós és a képzetes részekből álló sorozatok konvergensek:

A $z_n = a_n + b_n \cdot i$ jelölés mellett:

$$z_n \to Z = A + B \cdot i \quad \Leftrightarrow \quad a_n \to A \wedge b_n \to B$$



Példa

$$\lim\left(\frac{6n+3}{2n+1} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 8} \cdot i\right) = \lim \frac{6n+3}{2n+1} + \lim \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 8} \cdot i = 3 - 2i$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Pontsorozatok (vektorsorozatok) határértéke

Definíció

Az $(x_k):\mathbf{N}\to\mathbf{R}^n$ alakú függvényeket szám n-esek sorozatának, vektorsorozatnak, vagy pontsorozatnak nevezzük.

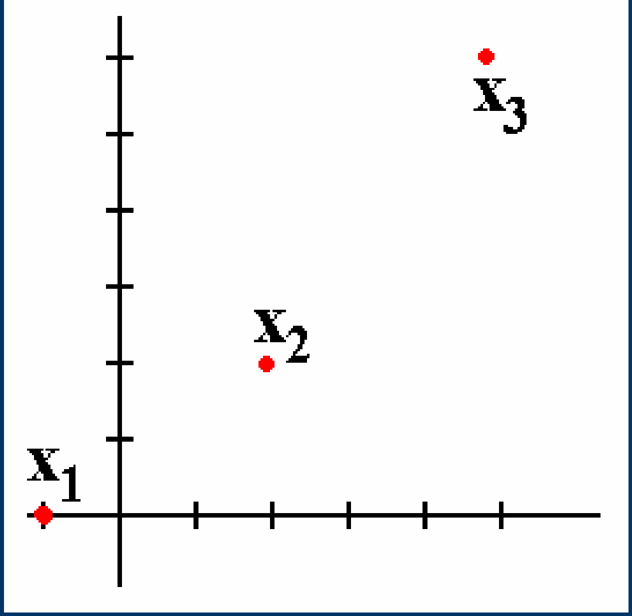
Példa: R^2-beli sorozat

$$x_k = (\,3k - 4\,,\ k^2 - k\,),\ k=1,2,\dots$$

$$x_1 = (\,-1\,,\ 0\,)$$

$$x_2 = (\,2\,,\ 2\,)$$

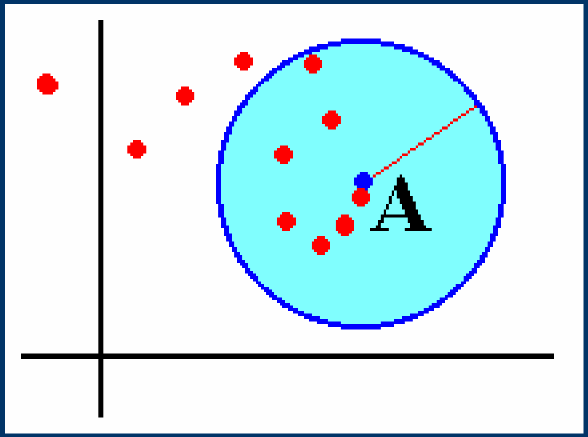
$$x_3 = (\,5\,,\ 6\,)$$



Definíció: pontsorozat konvergenciája

Egy (P_k):$\mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$ sorozat konvergens, ha van olyan $A \in \mathbf{R}^n$ elem melynek bármelyik G(A,r) környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb csak véges sok eleme van.

Az A elemet a sorozat határértékének nevezzük.



Jelölések

$$\lim_{k\to\infty} P_k = A \qquad \lim P_k = A \qquad P_k \to A$$

Tétel

Egy (P_k):N→R^n sorozat pontosan akkor konvergens, ha a koordináta-sorozatai konvergensek.

Továbbá, ha P_k konvergens, akkor a határértékének koordinátái egyenlők a koordinátasorozatok határértékeivel:

$$\begin{array}{ccccccc} P_k & = & (x_k^{(1)}, & x_k^{(2)}, & \ldots, & x_k^{(n)} &) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ A & = & (A_1, & A_2, & \ldots, & A_n &) \end{array}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$x_k = \left(5 - \frac{1}{k},\ 2^{\frac{k+1}{k^2+1}},\ \frac{-3k+5}{7k-2},\ \frac{1}{4^k} \right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\boxed{5} \qquad \boxed{1} \qquad \boxed{-\frac{3}{7}} \qquad \boxed{0}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(5 - \frac{1}{k},\ 2^{\frac{k+1}{k^2+1}},\ \frac{-3k+5}{7k-2},\ \frac{1}{4^k} \right) = \left(5, 1, -\frac{3}{7}, 0 \right)$$