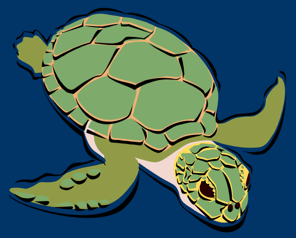
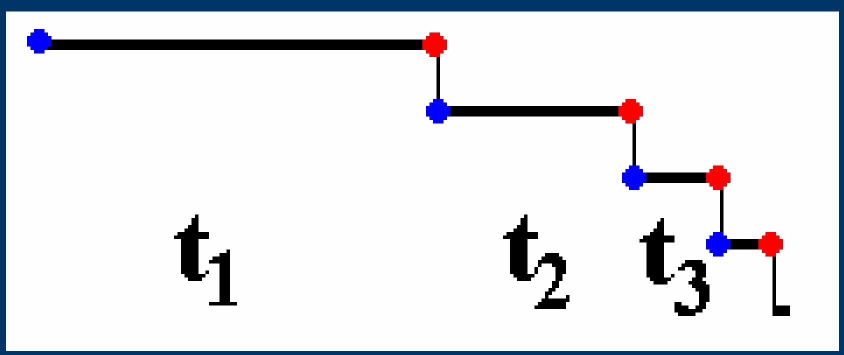
NEM NYOMTATÁSRA!

Valós és komplex számsorok

NEM NYOMTATÁSRA!

Achilleus és a teknős

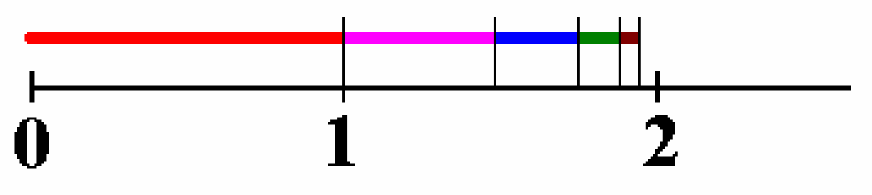




$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = ?$$

Lehet-e végtelen sok pozitív szám „összege” véges?

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=?$$



Az egyetlen elfogadhatónak látszó válasz:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$$

Definíció: sor

Legyen (a_n) egy valós vagy komplex számsorozat. Az

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\vdots$$

sorozatot az (a_n) sorozat elemeiből képzett (szám) sornak nevezzük.

Jelölés

$$(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Elnevezések

a_n : a sor n-edik (általános) tagja

s_n : a sor n-edik részletösszege

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{8}$$

Az (a_n) sorozat elemeiből képzett sor:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Definíció: sor konvergenciája

A $\Sigma\ a_n$ sor konvergens, ha a részletösszegeinek (s_n) sorozata konvergens.

Ha egy sor nem konvergens, akkor divergens.

Definíció: sor összege

Ha a Σa_n sor konvergens, akkor a sor összegén a $\lim s_n$ határértéket értjük.

Jelölés

Ha $\lim s_n = A$, akkor azt írjuk, hogy $\Sigma\ a_n = A$

Példa konvergens sorra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$$

(lásd korábban)

Példa divergens sorra

A $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots$ **sor divergens, mert**

$$\lim s_n = \lim(1+2+\ldots+n) = \lim\frac{n(n+1)}{2} = \lim\frac{n^2+n}{2} = +\infty$$

Definíció: geometriai sor

$$a_n = q^{n-1} \qquad (q \in \mathbf{R}, \text{ rögzített})$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = q,\ a_3 = q^2,\ a_4 = q^3,\ \ldots$$

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1+q$$
$$s_3 = 1+q+q^2$$
$$s_4 = 1+q+q^2+q^3$$
$$\vdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \quad \text{avagy} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^{n}$$

Példa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{avagy} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel **Ha $|q|<1$, akkor a geometriai sor konvergens, továbbá:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Indoklás:

Az ismert $a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^n + a^{n-1}\cdot b + \ldots + a\cdot b^{n-1} + b^n)$ azonosság alapján:

$$1 - q^n = (1-q)\cdot(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \text{ , azaz}$$

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

így

$$\Sigma\, a_n = \lim s_n = \lim\,(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = \lim \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

$$q = \frac{1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$$q = -\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$ típusú sorok

Tétel

A $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$ **sor**

- **konvergens, ha $\alpha>1$**
- **divergens, ha $\alpha\le 1$**

Megjegyzés

Bár az $\alpha>1$ esetben kimutatható a sor konvergenciája, de az összegre nem áll rendelkezésre formula úgy, mint a geometriai sor esetén.

Példák a divergens esetre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

Példák a konvergens esetre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

További nevezetes példák

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$x \in \mathbf{R}$

Lásd az exponenciális függvény előállítása hatványsor formájában című részt (Elemi függvények fejezet)!

Definíció: faktoriális

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, ha n természetes szám, $0! = 1$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: az összeg és a műveletek kapcsolata

Ha a Σa_n és a Σb_n sorok konvergensek, továbbá $\Sigma\, a_n = A$, $\Sigma\, b_n = B$ és $\lambda \in R$, akkor a $\Sigma(a_n + b_n)$ és a $\Sigma(\lambda \cdot a_n)$ sorok konvergensek és

- $\Sigma\,(a_n + b_n) = A + B$
- $\Sigma\,(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot A$

Tétel: az összeg és a rendezés kapcsolata

Ha a Σa_n és a Σb_n sorok konvergensek, $\Sigma a_n = A$, $\Sigma b_n = B$, továbbá $a_n \leq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $A \leq B$.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétele: váltakozó előjelű sor konvergenciája

Ha az (a_n) sorozat nemnegatív elemekből áll, továbbá monoton csökkenőleg 0-hoz konvergál, akkor az (a_n) elemeiből képzett

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

sor konvergens.

Példa

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ **sor konvergens, mert az** $a_n = \frac{1}{n}$

sorozat teljesíti a tétel feltételeit.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: abszolút konvergencia

A Σa_n sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\Sigma\, |a_n|$ sor konvergens.

Példa

A $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ **sor abszolút konvergens, mert a**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

sor konvergens.

Megjegyzés

Az abszolút konvergencia erősebb követelmény: ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is, de fordítva nem igaz.

Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ **konvergens, de** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **divergens.**

Megjegyzés

A definícióból világos nemnegatív tagú sor esetén az abszolút konvergencia nem jelent többet a konvergenciával.

Definíció: feltételes konvergencia

Ha egy sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor feltételesen konvergensnek nevezzük.

Példa

A $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ **sor feltételesen konvergens.**

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: komplex sor konvergenciája

A $\Sigma z_n = \Sigma(a_n+i\cdot b_n)$ komplex számsor pontosan akkor konvergens, ha a valós részekből képzett Σa_n és a képzetes részekből képzett Σb_n valós számsorok konvergensek.

Továbbá: ha Σz_n konvergens, akkor

$$\Sigma z_n = (\Sigma a_n) + i \cdot (\Sigma b_n)$$

Példa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+i\cdot\frac{3^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}+i\cdot e^3=\frac{5}{4}+i\cdot e^3$$

Tétel: sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Ha a Σa_n sor konvergens, akkor $\lim a_n = 0$

Következmény

Az előző tételből következik, hogy ha az általános tagok sorozatának nem 0 a határértéke, akkor a sor nem lehet konvergens:

$$\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \Sigma\, a_n \text{ divergens}$$

Sor konvergenciájának vizsgálatakor először azt célszerű ellenőrizni, hogy a_n nullsorozat-e.

Példa

A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n-1}$ **sor divergens, mert** $\displaystyle\lim \frac{2n+3}{5n-1} = \frac{2}{5} \neq 0$

Megjegyzés

A lim $a_n = 0$ feltétel szükséges, de nem elegendő: lehetséges, hogy lim $a_n = 0$, de $\Sigma\, a_n$ divergens.

Példa

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$ **de** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ **divergens.**

Elégséges feltételek az abszolút konvergenciára

Tétel: hányadoskritérium

Tegyük fel, hogy $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Ha $\lim \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ **akkor $\Sigma\, a_n$ sor abszolút konvergens.**

Ha $\lim \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ **akkor $\Sigma\, a_n$ sor divergens.**

Megjegyzés

Ne feledjük, hogy az abszolút konvergenciából következik a konvergencia!

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ **sor abszolút konvergens, mert**

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \lim \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

Megjegyzés

Az előző tétel szerint határérték-számítással próbálkozhatunk a konvergencia vizsgálatára. A tételben szereplő határérték általában nem létezik, illetve ha létezik, akkor sok lényeges esetben 1-gyel egyenlő, és erre az esetre a tétel nem mond semmit.

Példa

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **divergens sor esetén**

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: gyökkritérium

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ **akkor** $\Sigma\, a_n$ **sor abszolút konvergens.**

Ha $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ **akkor** $\Sigma\, a_n$ **sor divergens.**

Példa

A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ **sor abszolút konvergens, mert**

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

NEM NYOMTATÁSRA!

További két kritérium nemnegatív tagú sorokra

Tétel: majoráns kritérium

Ha $0 \le a_n \le b_n$ $(n \in \mathbf{N})$ és Σb_n konvergens, akkor Σa_n is konvergens.

Tétel: minoráns kritérium

Ha $0 \le a_n \le b_n$ $(n \in \mathbf{N})$ és Σa_n divergens, akkor Σb_n is divergens.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: a majoráns kritérium alkalmazása

Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ **sor konvergenciáját!**

Mivel minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ **továbbá a**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **sor konvergens, így** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ **konvergens.**

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: a minoráns kritérium alkalmazása

Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ **sor konvergenciáját!**

Mivel minden n∈N esetén $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$ **továbbá a**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **sor divergens, így a** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

sor is divergens.