Definíció

Ha $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ és

$$\rho \subset A \times B\,,$$

akkor azt mondjuk, hogy ρ reláció A és B között, vagy azt, hogy ρ leképezés A-ból B-be.

Ha speciálisan A=B, azaz

$$\rho \subset A \times A\,,$$

akkor azt mondjuk, hogy ρ reláció az A halmazon.

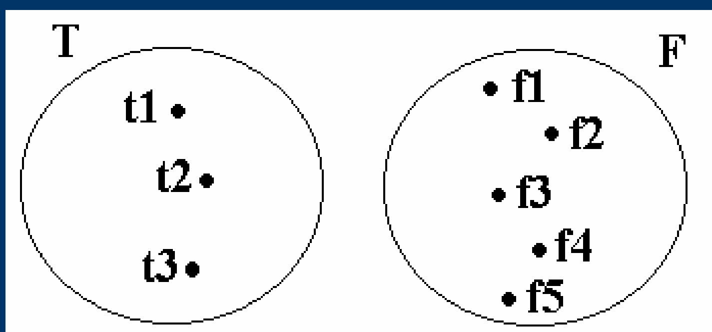
A relációk témakörben a továbbiakban minden esetben feltételezzük, hogy az A és a B halmazok nem üresek.

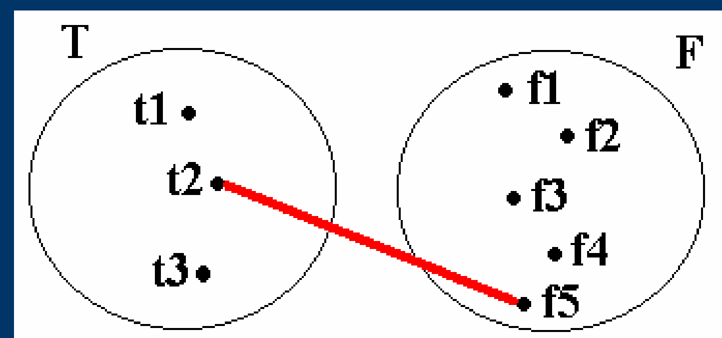
Példa

3 termelő állít elő egy-egy fajta terméket, és ezeket 5 fogyasztó használja fel.

a termelők halmaza: $T = \{ t1 , t2 , t3 \}$

a fogyasztók halmaza: $F = \{ f1 , f2 , f3 , f4 , f5 \}$

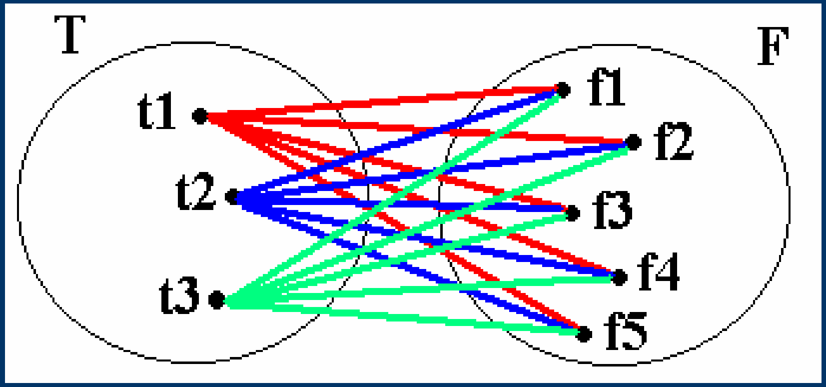


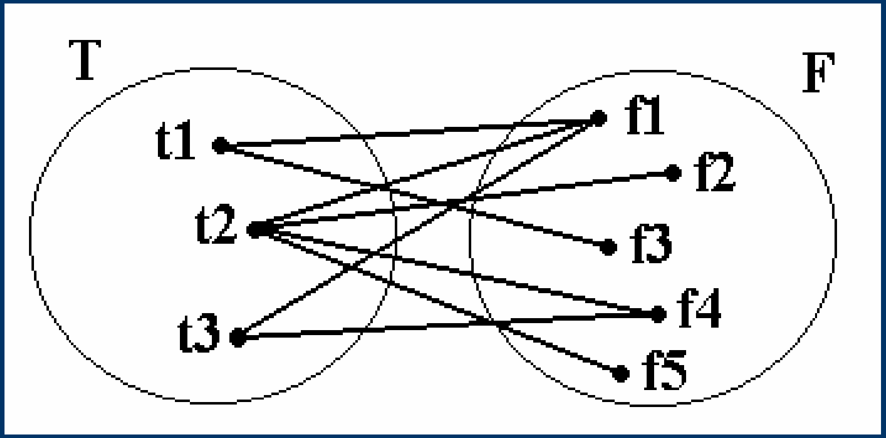


Ha egy f fogyasztó felhasznál egy t termelő által előállított termékből, akkor mondjuk azt, hogy a t termelő relációban (kapcsolatban) áll az f fogyasztóval, avagy a (t,f) pár eleme a relációnak.

Ha minden egyes fogyasztó felhasználná minden egyes termelő termékét, akkor a kapcsolatrendszert a teljes T×F Descartes szorzat írná le.

Az ettől eltérő esetekben a T×F egy valódi részhalmaza modellezi a kapcsolatrendszert.





Például:

$\rho = \{ (t1, f1), (t1, f3), (t2, f1), (t2, f2), (t2, f4), (t2, f5), (t3, f1), (t3, f4) \} \subset T \times F$

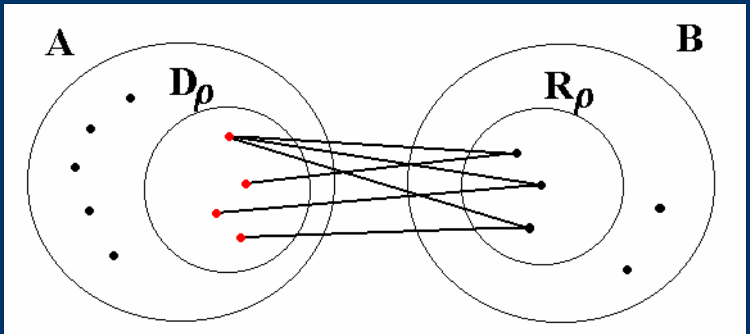
Definíció: reláció értelmezési tartománya és értékkészlete

A $\rho\subset A\times B$ reláció értelmezési tartománya:

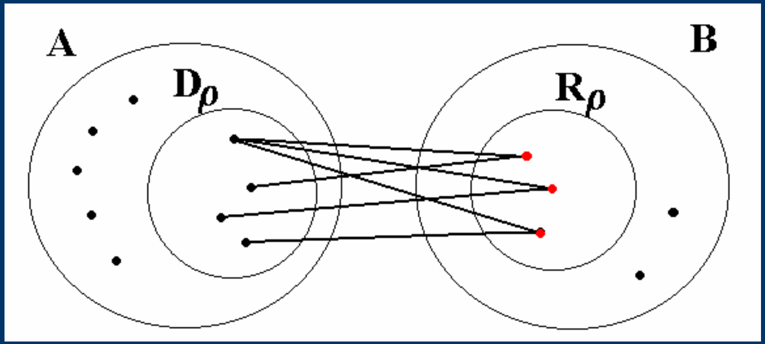
$$D_\rho = \{\, x\in A \mid \text{van olyan } y\in B, \text{ melyre } (x,y)\in\rho \,\}$$

A $\rho\subset A\times B$ reláció értékkészlete:

$$R_\rho = \{\, y\in B \mid \text{van olyan } x\in A, \text{ melyre } (x,y)\in\rho \,\}$$



A D_ρ halmaz az A halmaz azon elemeiből áll, melyek relációban állnak legalább egy B-beli elemmel.



Az R_ρ halmaz a B halmaz azon elemeiből áll, melyek relációban állnak legalább egy A-beli elemmel.

Definíció: reláció inverze

A $\rho \subset A \times B$ reláció inverzén (megfordításán) azt a $\rho^{-1} \subset B \times A$ relációt értjük, melyre:

$$\rho^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in \rho \} \subset B \times A$$

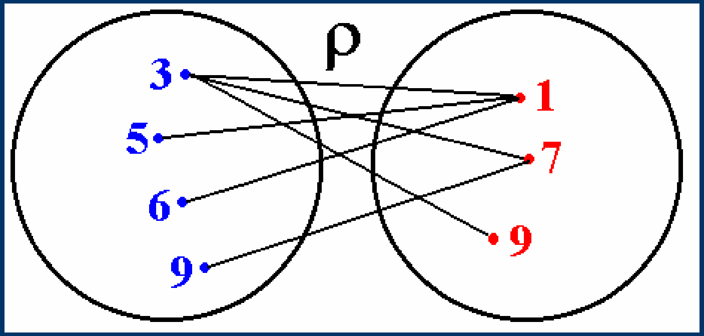
Példa

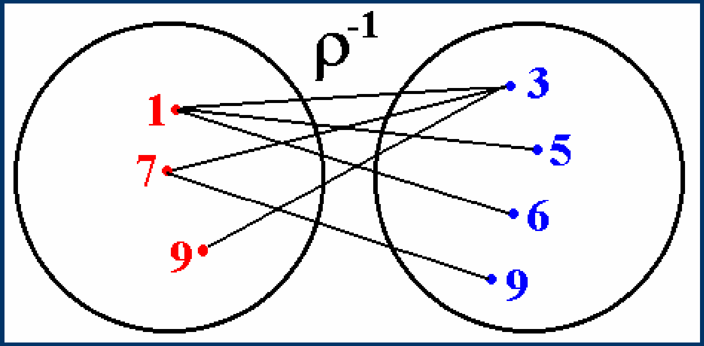
A $\rho \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$,

$$\rho = \{ (3,1) , (3,7) , (3,9) , (5,1) , (6,1) , (9,7) \}$$

reláció inverze:

$$\rho^{-1} = \{ (1,3) , (7,3) , (9,3) , (1,5) , (1,6) , (7,9) \}$$



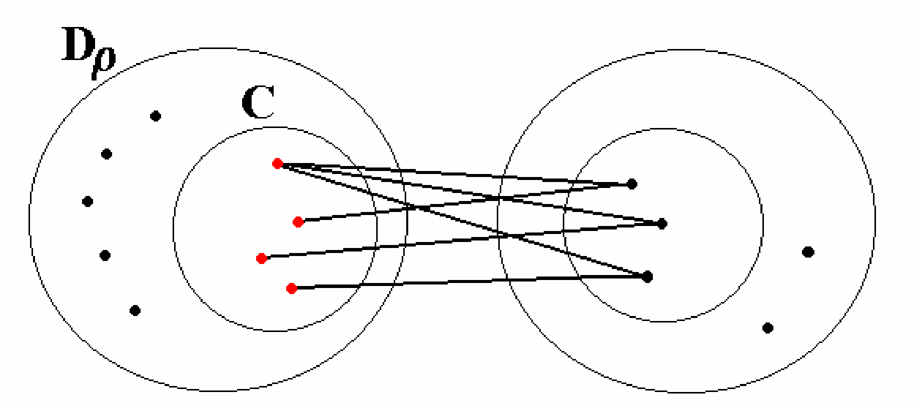


Definíció: reláció leszűkítése

Ha $\rho \subset A \times B$ egy reláció és $\emptyset \neq C \subset D_\rho$, akkor a

$$\rho|_C = \{ (x,y) \in \rho \mid x \in C \}$$

relációt ρ C-re való leszűkítésének nevezzük.



A relációk néhány tulajdonsága

A $\rho \subset A \times A$ reláció

reflexív, ha minden $x \in A$ esetén

$$(x, x) \in \rho$$

(minden elem relációban áll önmagával)

szimmetrikus, ha minden $x, y \in A$ esetén

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$$

tranzitív, ha minden $x, y, z \in A$ esetén

$$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$$

A $\rho \subset A \times A$ reláció

antiszimmetrikus, ha minden $x,y \in A$ esetén

$$(x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho \Rightarrow x = y$$

lineáris, ha minden $x,y \in A$ esetén

$$(x,y) \in \rho \vee (y,x) \in \rho$$

(bármely két elem „összehasonlítható”)

Definíció: ekvivalencia reláció

A $\rho \subset A \times A$ reláció ekvivalencia reláció, ha

- **reflexív**
- **szimmetrikus**
- **tranzitív**

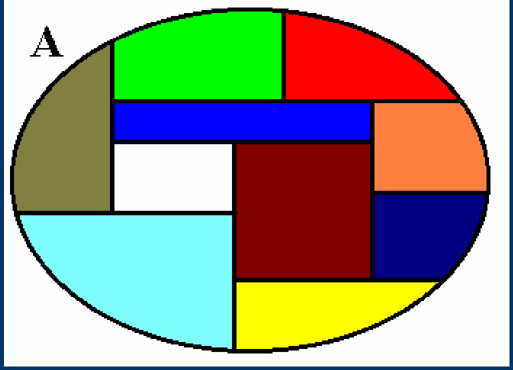
Példák ekvivalencia relációra

- **bármely számhalmazban az egyenlőség**
- **a síkidomok halmazában a hasonlóság**
- **az egyenesek halmazában a párhuzamosság**

Definíció: osztályozás

Az A nem üres részhalmazainak egy rendszerét az A osztályozásának nevezzük, ha

- **az elemek páronként diszjunktak**
- **az elemek uniója egyenlő A-val**



Tétel: ekvivalencia reláció és osztályozás

Egy A halmazon értelmezett bármely ekvivalencia reláció az A egy osztályozását generálja: két elem legyen egy osztályban, ha relációban állnak egymással.

Az A halmaz bármely osztályozása egy A-n értelmezett ekvivalencia relációt generál: két elem álljon relációban egymással, ha egy osztályban vannak.

Példa: szabadvektorok

A geometriai tér pontjaiból képzett (P,Q) párokat irányított szakaszoknak nevezzük.

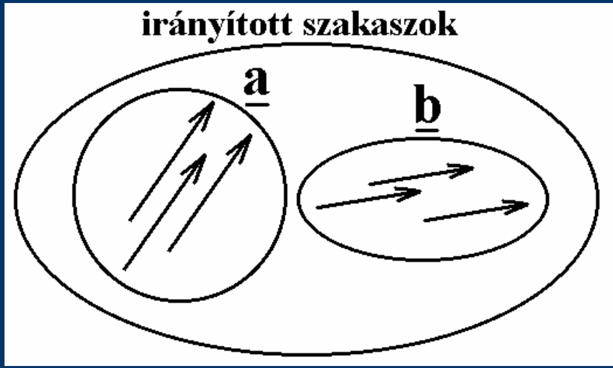
Tekintsük a következő relációt: a (P,Q) és az (R,S) irányított szakaszok relációban állnak egymással (ekvivalensek), ha van a térnek olyan párhuzamos eltolása, amelyre P→R és Q→S.

Könnyen belátható, hogy az így értelmezett reláció ekvivalencia reláció.

Az általa létrehozott osztályozás szerinti osztályokat szabad vektoroknak nevezzük. Egy osztályban az egymással ekvivalens irányított szakaszok vannak.

Az egy osztályban lévő irányított szakaszok az osztály által definiált szabad vektor reprezentánsai.

Egy szabad vektornak a tér minden pontjából pontosan egy reprezentánsa indul ki.



Definíció: rendezési reláció

A $\rho \subset A \times A$ reláció rendezési reláció, ha

- **reflexív**
- **antiszimmetrikus**
- **tranzitív**
- **lineáris**

Példa

A $\leq$ reláció a valós számok halmazának bármely részhalmazán.

Minden $x,y,z \in R$ esetén:

- $x \leq x$
- $x \leq y \wedge y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y$
- $x \leq y \wedge y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z$
- $x \leq y \vee y \leq x$

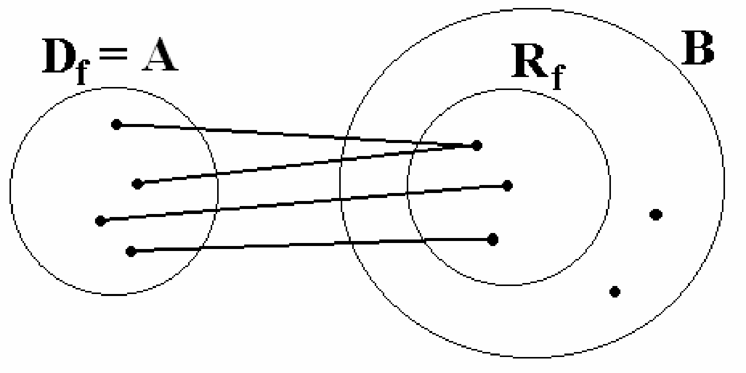
Megjegyzés

A valós számok a számegyenesen ennek a rendezésnek „megfelelően" helyezkednek el.

Függvények

Definíció: függvény

Egy $f \subset A \times B$ reláció függvény, ha az A halmaz minden eleme *pontosan egy* B halmazbeli elemmel áll relációban.



Megjegyzés

A relációknál definiált értelmezési tartomány, értékkészlet, leszűkítés fogalmak változatlan formában érvényesek a függvényekre is.

A függvények esetén a relációknál bevezetettektől eltérő jelöléseket szokás használni. Ezeket tekintjük át a következőkben:

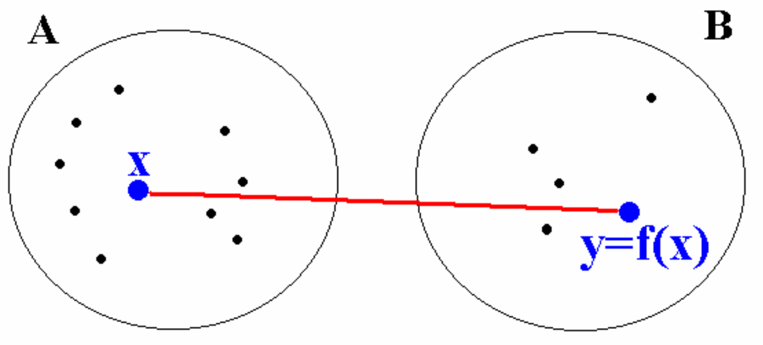
NEM NYOMTATÁSRA!

Jelölések

Ha f függvény az A és a B halmazok között, továbbá az A halmaz egyenlő az f értelmezési tartományával, akkor a következő jelölést használjuk:

$f \subset A \times B$ jelölése: $f: A \to B$

$(x,y) \in f$ jelölése: $f(x) = y$



Ha $f(x)=y$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x elemhez az y elemet rendeli hozzá, vagy azt, hogy az x helyen az f függvény értéke y.

Megjegyzés

A B halmaz általában bővebb az f értékkészleténél.

Megjegyzés: függvény értelmezési tartománya

A definíció szerint az $f:A\rightarrow B$ jelölésben az A halmaz azonos a függvény értelmezési tartományával ($D_f=A$):

az A halmaz minden eleméhez van olyan y eleme a B halmaznak, melyre $f(x)=y$.

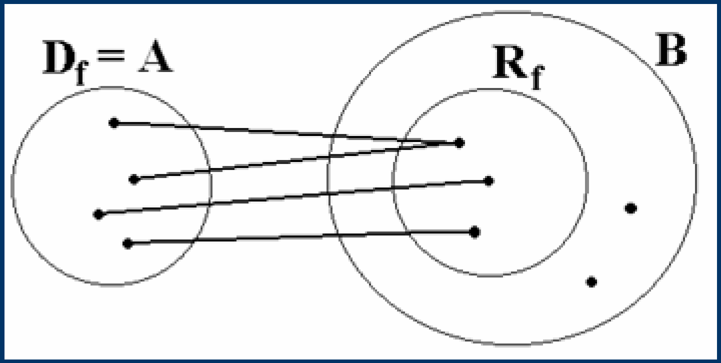
Megjegyzés: függvény értékkészlete

Az $f:A\rightarrow B$ függvény értékkészlete (a relációknál felírt definíció módosítása az új jelölésekkel):

$$R_f = \{\, y\in B \mid \text{van olyan } x\in A\text{, melyre } f(x)=y \,\}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az értelmezési tartományban: helyek

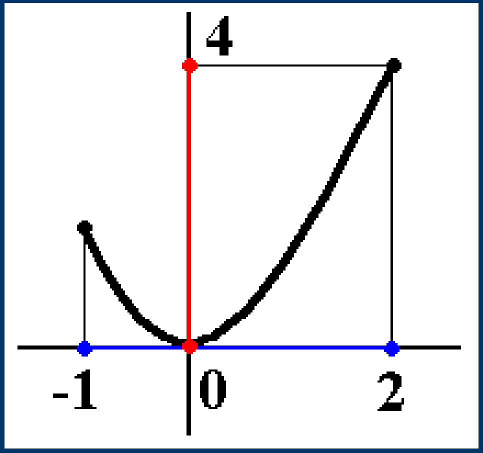


Az érték-készletben: értékek

Függvény megadása

$x \to x^2, \quad x \in [-1,2]$

$f(x)=x^2, \quad x \in [-1,2]=D_f$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

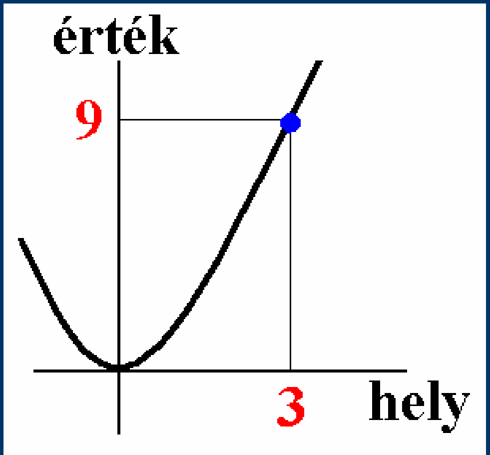
Az $f(x)=x^2$ függvény esetén $f(3)=9$.

Ezt úgy szoktuk megfogalmazni, hogy

„az f függvény értéke a 3-nál 9”,

vagy úgy hogy

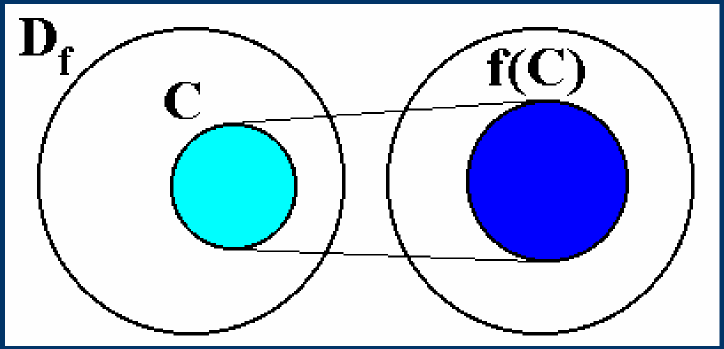
„az f függvénynek a 3 helyen felvett értéke 9”.



Definíció: halmaz képe

Egy $C \subset D_f$ halmaz f szerinti képe az $f|_C$ függvény értékkészlete:

$$f(C) = R_{f|_C}$$

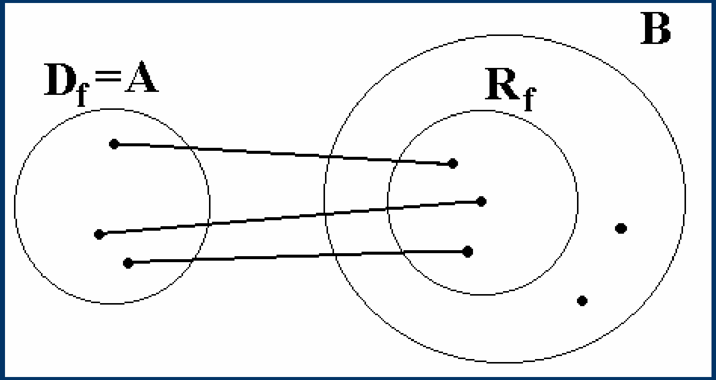


Emlékeztetőül:

$f|_C$ az f-nek C halmazra való leszűkítését jelöli.

Definíció: invertálható függvény

Az $f \subset A \times B$ függvény invertálható (injektív), ha f^{-1} is függvény.

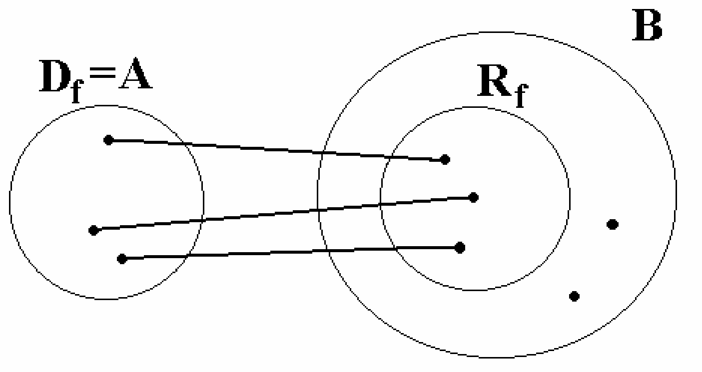


Megjegyzés

Az f-nek, mint relációnak minden esetben létezik inverze, de az általában nem függvény.

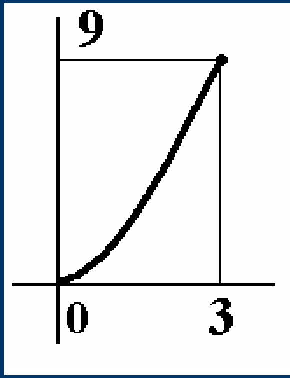
Megjegyzés: az invertálhatóság ekvivalens megfogalmazása

Az $f:A\to B$ függvény pontosan akkor invertálható, ha minden $y\in R_f$ elemhez pontosan egy olyan $x\in D_f$ elem van, melyre $f(x)=y$.

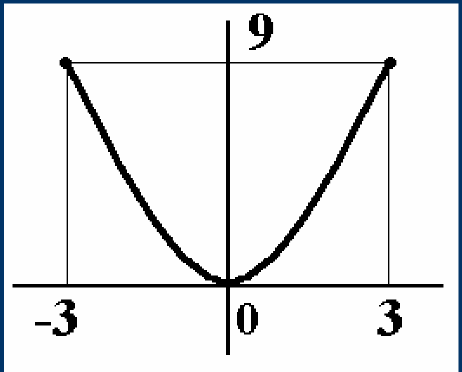


Példa

Az $f(x)=x^2$, $x\in[0,3]$ függvény invertálható.



Az $f(x)=x^2$, $x\in[-3,3]$ függvény nem invertálható.

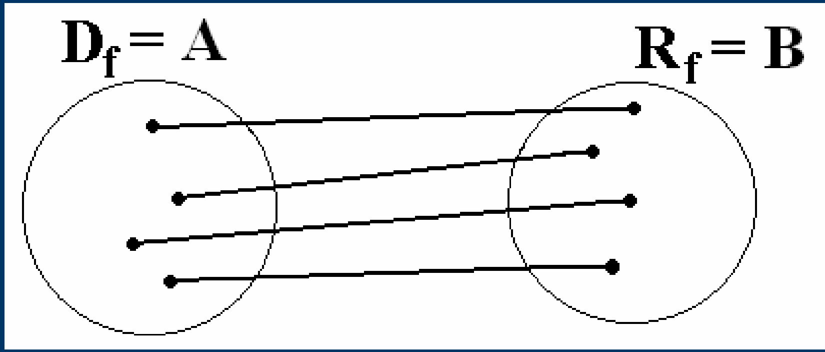


NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: kölcsönösen egyértelmű leképezés

Az $f:A \rightarrow B$ függvény kölcsönösen egyértelmű leképezés (bijekció) az A és a B halmazok között, ha

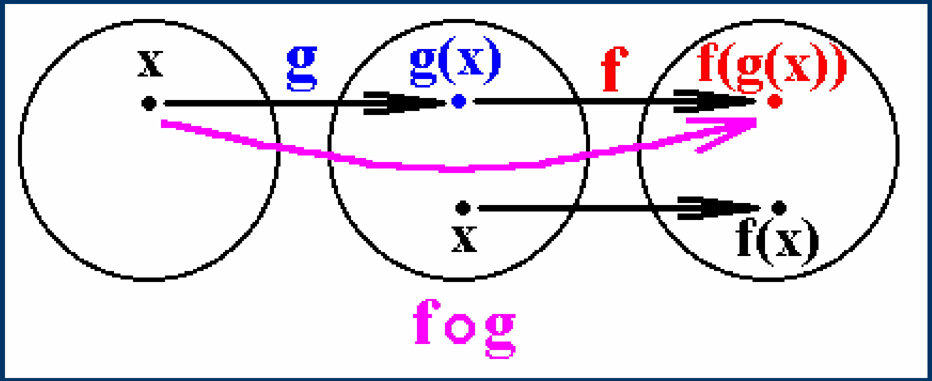
- **$B = R_f$** ***(f szürjektív)***
- **f invertálható** ***(f injektív)***



NEM NYOMTATÁSRA!

Függvények kompozíciója (összetett függvény)

$g : D_g \to R_g$ $\qquad$ $f : D_f\,(=R_g) \to R_f$



$$f \circ g\,(x) = f\,(\,g(x)\,)\,,\quad x \in D_g$$

g : belső függvény

f : külső függvény

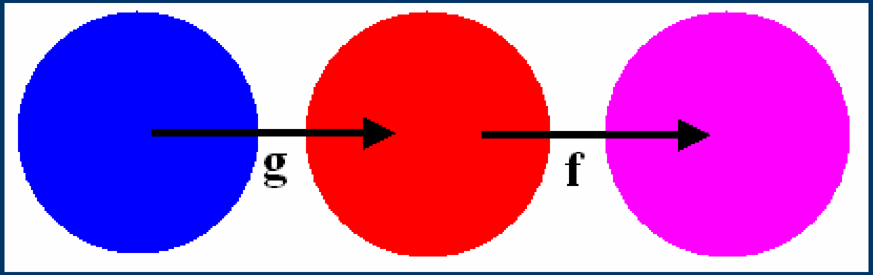
NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$g(x) = x^2 + 5x, \quad D_g = [0,2], R_g = [0,14]$

$f(x) = \sin x, \quad D_f = [0,14], R_f = [-1,1]$

$x \to x^2 + 5x \to \sin(x^2 + 5x)$



$f \circ g(x) = \sin(x^2 + 5x)$

$D_{fog} = [0,2], R_{fog} = [-1,1]$

Megjegyzések

Az $f \circ g$ függvényt szokás az f és a g függvények kompozíciójának, vagy kompozíciós szorzatának nevezni.

A kompozíciós szorzás nem kommutatív művelet: általában $f \circ g \neq g \circ f$.

Az előző példában:

$$f(x) = \sin x$$
$$g(x) = x^2 + 5x$$

$$f \circ g\,(x) = \sin(x^2 + 5x)$$

$$g \circ f\,(x) = (\sin x)^2 + 5 \cdot \sin x$$

Példa: többszörösen összetett függvény

$$F(x)=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\lg\frac{x}{2}\right)}$$

Az F függvény négy függvényből képzett összetett függvény:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$g(x)=\operatorname{tg} x$$

$$h(x)=\lg x$$

$$k(x)=\frac{x}{2}$$

$$f\circ g\circ h\circ k(x)=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\lg\frac{x}{2}\right)}$$

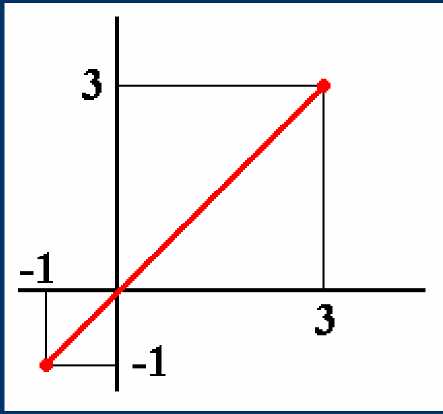
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: identikus függvény

Az $x \to x$, $x \in A$ függvényt az A halmaz **identikus függvényének** nevezzük. Jelölés: id_A

Példa

A [-1,3] halmaz identikus függvénye:



Megjegyzés

Az identikus függvény a kompozíciós szorzás egységeleme: tetszőleges f függvény esetén

$$f \circ id = f \quad \text{és} \quad id \circ f = f$$

Megjegyzés: az invertálhatóság megfogalmazása az identikus függvénnyel

Az $f:D_f \rightarrow R_f$ függvény pontosan akkor invertálható, ha van olyan $g : R_f \rightarrow D_f$ függvény, melyre

$$fog = id \quad \text{és} \quad gof = id\ ,$$

azaz

$$fog\,(x) = x\ ,\ x \in D_g = R_f$$

és

$$gof\,(x) = x\ ,\quad x \in D_f = R_g.$$

Ekkor g-t az f inverzének nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

$f(x) = x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f \circ f^{-1}(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ $x \in R$

$f^{-1} \circ f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$ $x \in R$

$f(x) = 2^x$ $f^{-1}(x) = \log_2 x$

$f \circ f^{-1}(x) = 2^{\log_2 x} = x$ $x \in R, x > 0$

$f^{-1} \circ f(x) = \log_2(2^x) = x$ $x \in R$