

Primitív függvény, határozatlan integrál

Az ebben a részben szereplő függvények mindegyike legyen egy I tetszőleges, pozitív hosszúságú intervallumon értelmezett valós értékű függvény ($I \rightarrow \mathbb{R}$).

Definíció: primitív függvény

Ha

- az $F:I\rightarrow\mathbb{R}$ függvény differenciálható I -n és
- $F'(x) = f(x)$ minden $x\in I$ esetén,

akkor azt mondjuk, hogy az F függvény **primitív függvénye** az $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ függvénynek.

Jelölés

$$F = \int f$$

avagy az f változóját is megjelölve:

$$F(x) = \int f(x) dx, F(t) = \int f(t) dt, F(z) = \int f(z) dz, \text{ stb.}$$

Megjegyzések

Ha az $F:I\rightarrow\mathbb{R}$ függvény primitív függvénye az $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ függvénynek, akkor tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ esetén a

$$G(x) = F(x) + c, \quad x\in I$$

függvény is primitív függvénye f -nek.

Indoklás: $G' = (F+c)' = F' + c' = F' + 0 = f$

Ha az $F:I\rightarrow\mathbb{R}$ és a $G:I\rightarrow\mathbb{R}$ függvények primitív függvényei az $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ függvénynek, akkor létezik olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy

$$G(x) = F(x) + c, \quad x\in I$$

Indoklás: $(F-G)' = F'-G' = f-f = 0 \Rightarrow F-G = c \ (\in\mathbb{R}) \Rightarrow F = G + c$

A fenti két megjegyzés alapján megállapítható, hogy:

Ha egy f függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok primitív függvénye van, de ezek csak egy (additív) konstansban térhetnek el egymástól.

Definíció: **határozatlan integrál**

Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f **határozatlan integráljának** nevezzük.

Példa

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Indoklás: $(\sin x + c)' = \cos x$

Példa

Oldjuk meg az $y'(x) = \cos x$ egyenletet, ahol y egy differenciálható függvény!

$$y(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$c \in \mathbf{R}$$

Néhány elemi függvény határozatlan integrálja

Konstans függvény határozatlan integrálja

$$\int k \, dx = kx + c$$

| f | $\int f$ |
|------------------------------|-----------------|
| $k \quad (k \in \mathbf{R})$ | $k \cdot x + c$ |

Indoklás: $(k \cdot x + c)' = k$

Példa

$$\int 7 \, dx = 7x + c$$

A hatványfüggvények határozatlan integrálja ($n \neq -1$)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

| f | $\int f$ |
|--|---------------------------|
| x^n ($n \in \mathbf{R}, n \neq -1$) | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ |

Indoklás:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)' = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \right)' = \frac{1}{n+1} (n+1) x^n = x^n$$

Példa

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

További példák

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c$$

A hatványfüggvények határozatlan integrálja ($n = -1$)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

| f | $\int f$ |
|---------------|--------------|
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x + c$ |

Az exponenciális függvények határozatlan integrálja

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

| f | $\int f$ |
|-------------------------|-----------------------------|
| a^x | $\frac{a^x}{\ln a} + c$ |
| e^x | $e^x + c$ |

Indoklás:

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + c \right)' = \left(\frac{1}{\ln a} a^x + c \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$$

Példa

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

Néhány további függvény határozatlan integrálja

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = \operatorname{cth} x + c$$

Néhány további függvény határozatlan integrálja

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arth} x + c, \text{ ha } x \in]-1,1[$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arcth} x + c, \text{ ha } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

Tétel

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

„tagonként lehet integrálni”

$$\int a \cdot f = a \cdot \int f \quad a \in \mathbb{R}$$

„a szorzó konstans kiemelhető az integrálból”

Az alapintegrálokra visszavezethető integrálási feladatok

$$\int \frac{7x^5 + 6 \cdot \sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x}} dx = 7 \cdot \int \frac{x^5}{\sqrt[3]{x}} dx + 6 \cdot \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx - 3 \cdot \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx =$$

$$= 7 \cdot \int x^{\frac{14}{3}} dx + 6 \cdot \int x^{\frac{1}{6}} dx - 3 \cdot \int x^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= 7 \cdot \frac{x^{\frac{17}{3}}}{\frac{17}{3}} + 6 \cdot \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = x - \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x$$

Parciális módszer

Tétel

Ha

- az $f:I \rightarrow \mathbf{R}$ és $g:I \rightarrow \mathbf{R}$ függvények differenciálhatók és
 - létezik az $\int (f \cdot g')$ primitív függvény,
- akkor létezik az $\int (f' \cdot g)$ primitív függvény is és

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

Indoklás: a szorzatfüggvények differenciálási szabálya alapján:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \Rightarrow \int (f \cdot g)' = \int (f' \cdot g) + \int (f \cdot g') \Rightarrow \\ f \cdot g &= \int (f' \cdot g) + \int (f \cdot g') \Rightarrow \int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')\end{aligned}$$

Parciális módszerrel integrálható függvények I.

$$\int P(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin(cx + d), \cos(cx + d) \\ \operatorname{sh}(cx + d), \operatorname{ch}(cx + d) \\ a^{cx+d} \end{array} \right\}$$

g **f'**

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

P: polinom

$a, c, d \in \mathbf{R}$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

Példa

$$\int (x^2 + 3x + 1) \cdot e^{2x} dx = ?$$

Példák

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x \, dx =$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

A következő példában másodfokú polinom szerepel, ezért ott kétszer kell alkalmazni a parciális módszer formuláját.

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

$$\int (x^2 + 3x + 1) \cdot e^{2x} dx = (x^2 + 3x + 1) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int (2x + 3) \cdot e^{2x} dx =$$

első alkalmazás:

$$g(x) = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

második alkalmazás:

$$g(x) = 2x + 3 \Rightarrow g'(x) = 2$$

$$f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$= (x^2 + 3x + 1) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left((2x + 3) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int e^{2x} dx \right) =$$

$$= (x^2 + 3x + 1) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - (2x + 3) \cdot \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} + c = (x^2 + 2x) \cdot \frac{e^{2x}}{4} + c$$

Parciális módszerrel integrálható függvények II.

$$\int P(x) \left\{ \begin{array}{l} \arcsin(cx + d), \arccos(cx + d) \\ \operatorname{arctg}(cx + d), \operatorname{arcctg}(cx + d) \\ \operatorname{arsh}(cx + d), \operatorname{arch}(cx + d) \\ \operatorname{arth}(cx + d), \operatorname{arcth}(cx + d) \\ \log_a(cx + d) \end{array} \right\} dx$$

f'
 g

P: polinom
 $a, c, d \in \mathbb{R}$
 $(a > 0, a \neq 1)$

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

Példa

$$\int (x^3 + 3x^2 + 3) \cdot \ln x \, dx = ?$$

Példa

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

$$\int (x^3 + 4x^2 + 3) \cdot \ln x \, dx = \left(\frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} + 3x \right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} + 3x \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = x^3 + 4x^2 + 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} + 3x$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} + 3x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{4} + 4 \frac{x^2}{3} + 3 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} + 3x \right) \ln x - \left(\frac{x^4}{16} + 4 \frac{x^3}{9} + 3x \right) + c$$

Speciális eset

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

$$\int \left\{ \begin{array}{l} \arcsin(cx + d), \arccos(cx + d), \operatorname{arctg}(cx + d), \operatorname{arcctg}(cx + d) \\ \operatorname{arsh}(cx + d), \operatorname{arch}(cx + d), \operatorname{arth}(cx + d), \operatorname{arcth}(cx + d) \\ \log_a(cx + d) \end{array} \right\}$$

Ha a polinom „hiányzik”, akkor a konstans 1 függvényt vesszük g-nek.

Példa

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

Parciális módszerrel integrálható függvények III.

$$\int a^{kx+m} \cdot \begin{cases} \sin(cx + d) \\ \cos(cx + d) \end{cases} dx$$

$$a, c, d \in \mathbf{R} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \begin{cases} \sin(c_1 x + d_1) \\ \cos(c_1 x + d_1) \\ \operatorname{sh}(c_1 x + d_1) \\ \operatorname{ch}(c_1 x + d_1) \end{cases} \cdot \begin{cases} \sin(c_2 x + d_2) \\ \cos(c_2 x + d_2) \\ \operatorname{sh}(c_2 x + d_2) \\ \operatorname{ch}(c_2 x + d_2) \end{cases} dx$$

Ezekben az esetekben a parciális módszer kétszeri alkalmazásával lehet eredményre jutni:

A jelölés az első lépésben nem kötött, de a másodikban igen: ha egy függvényt az első lépésben pl. g -vel jelöltük, akkor az új integrálban a belőle származtatott (g') függvényt kell a második lépésben is g -nek nevezni.

A második lépés után a keresett integrálra egyenlet adódik, ebből az integrál kifejezhető.

Példa

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \cos x \, dx = \\ &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \sin x - 4 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx \end{aligned}$$

első alkalmazás:

második alkalmazás:

$$g(x) = e^{2x} \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

$$g(x) = e^{2x} \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \sin x - 4 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx$$

$$5 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = e^{2x} \cdot (-\cos x + 2 \sin x) + c$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = 0,2 \cdot e^{2x} \cdot (-\cos x + 2 \sin x) + c$$

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Ha

- a $g:I \rightarrow J$ függvény differenciálható és
- létezik az $f:J \rightarrow \mathbf{R}$ függvény $\int f$ primitív függvénye, akkor létezik az $\int (f \circ g) \cdot g'$ primitív függvény is és

$$\int (f \circ g) \cdot g' = (\int f) \circ g$$

avagy az $F = \int f$ függvény bevezetésével:

$$\int f(g) \cdot g' = F(g)$$

Megjegyzések

1. A helyettesítéses integrálás tétele az összetett függvények differenciálási szabályának következménye:

$$(F(g))' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$$

így

$$\int f(g) \cdot g' = F(g), \quad \text{ahol } F = \int f$$

2. A formula két (formailag különböző) módszert alapoz meg:

Az $\int f(g) \cdot g' = F(g)$ formula közvetlen alkalmazása

Példa

$$\int \cos(x^3) \cdot 3x^2 dx = ?$$

Az $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$ jelölésekkel a feladat $\int f(g) \cdot g'$ alakú.

A formula szerint a számolás lényegi része az $F = \int f$ primitív függvény meghatározása:

$$f(t) = \cos t \Rightarrow F(t) = \sin t$$

$$\int \cos(x^3) \cdot 3x^2 dx = \sin(x^3) + c$$

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a formulának megfelelő feladatok esetén az integrál kiszámítása lényegében a F függvény meghatározását jelenti. A g belső függvényt csak „be kell másolni” a megfelelő helyre.

Ezt megfigyelhetjük az alábbi példákat tanulmányozva.

A fenti gondolatmenet alkalmazását jól megfigyelhetjük az alábbi példákat tanulmányozva:

$$\int \cos(x^3) \cdot 3x^2 dx = \sin(x^3) + c$$

$$f(t) = \cos t \Rightarrow F(t) = \sin t$$

$$\int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \sin(\ln x) + c$$

$$\int \cos(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sin(\operatorname{tg} x) + c$$

$$\int \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sin(\sqrt{x}) + c$$

A fenti feladatok mindegyikének azonos a megoldási sémája, mivel a külső függvény (cos) ugyanaz:

$$\int \cos(g) \cdot g' = \sin(g) + c$$

A séma magyarázata:

$$(\sin g)' = \cos(g) \cdot g'$$

A sémák az összetett függvények deriválásának sémájából vezethetők le:

| $f(g)$ | $f'(g) \cdot g'$ | $f(g)$ | $f'(g) \cdot g'$ |
|---------------------------|------------------------------------|--------------------------|--|
| $g^n \ (n \neq -1)$ | $n \cdot g^{n-1} \cdot g'$ | \sqrt{g} | $\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot g'$ |
| a^g | $a^g \cdot \ln a \cdot g'$ | $\log_a g$ | $\frac{1}{g \cdot \ln a} \cdot g'$ |
| e^g | $e^g \cdot g'$ | $\ln g$ | $\frac{1}{g} \cdot g'$ |
| $\sin g$ | $\cos g \cdot g'$ | $\operatorname{sh} g$ | $\operatorname{ch} g \cdot g'$ |
| $\cos g$ | $-\sin g \cdot g'$ | $\operatorname{ch} g$ | $\operatorname{sh} g \cdot g'$ |
| $\operatorname{tg} g$ | $\frac{1}{\cos^2 g} \cdot g'$ | $\operatorname{th} g$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 g} \cdot g'$ |
| $\operatorname{ctg} g$ | $\frac{-1}{\sin^2 g} \cdot g'$ | $\operatorname{cth} g$ | $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 g} \cdot g'$ |
| $\arcsin g$ | $\frac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$ | $\operatorname{arsh} g$ | $\frac{1}{\sqrt{g^2+1}} \cdot g'$ |
| $\arccos g$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$ | $\operatorname{arch} g$ | $\frac{1}{\sqrt{g^2-1}} \cdot g'$ |
| $\operatorname{arctg} g$ | $\frac{1}{1+g^2} \cdot g'$ | $\operatorname{arth} g$ | $\frac{1}{1-g^2} \cdot g'$ |
| $\operatorname{arcctg} g$ | $-\frac{1}{1+g^2} \cdot g'$ | $\operatorname{arcth} g$ | $\frac{1}{1-g^2} \cdot g'$ |

(lásd a differenciálszámítás című részt)

Néhány integrálási séma:

$$\left(\frac{g^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot g^n \cdot g' = g^n \cdot g'$$

($n \neq -1$)



$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

$$(\ln(g))' = \frac{1}{g} \cdot g' = \frac{g'}{g}$$



$$\int \frac{1}{g} g' = \int \frac{g'}{g} = \ln|g| + c$$

$$(e^g)' = e^g \cdot g'$$



$$\int e^g \cdot g' = e^g + c$$

$$(\sin(g))' = \cos(g) \cdot g'$$



$$\int \cos(g) \cdot g' = \sin(g) + c$$

$$(\arctg(g))' = \frac{1}{1+g^2} \cdot g'$$



$$\int \frac{1}{1+g^2} \cdot g' = \arctg(g) + c$$

A többi séma hasonlóan kapható.

Példa

$$\int x^3 \cdot \frac{1}{1+x^8} dx = ?$$

Először célszerűen átalakítjuk a feladatot:

$$\int x^3 \cdot \frac{1}{1+x^8} dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \cdot \frac{1}{1+(x^4)^2} dx$$

Itt azt kell észrevenni, hogy az

$$\int \frac{1}{1+g^2} \cdot g' = \operatorname{arctg}(g) + c$$

séma alkalmazható:

$$\frac{1}{4} \int 4x^3 \cdot \frac{1}{1+(x^4)^2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x^4) + c$$

Példa

$$\int \cos x \cdot \sin^3 x \, dx = ?$$

Itt azt kell észrevenni, hogy az

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

séma alkalmazható:

$$\int \cos x \cdot \sin^3 x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

Példa

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

Séma:

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n = -\frac{1}{2}$$



$$\int g^{\frac{-1}{2}} \cdot g' = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x) \cdot (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

Példa

$$\int \frac{2e^{5x}}{\sqrt[3]{8-3e^{5x}}} dx = ?$$

$$n = -\frac{1}{3}$$

Séma:

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$



$$\int g^{\frac{-1}{3}} \cdot g' = \frac{g^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \frac{2e^{5x}}{\sqrt[3]{8-3e^{5x}}} dx = \frac{2}{-15} \int -15e^{5x} (8-3e^{5x})^{\frac{-1}{3}} dx =$$

$$= \frac{2}{-15} \cdot \frac{(8-3e^{5x})^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

Példa

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = ?$$

Séma:

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n = -\frac{1}{3}$$



$$\int g^5 \cdot g' = \frac{g^6}{6} + c$$

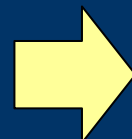
$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^5 dx = \frac{(\ln x)^6}{6} + c$$

Példa

$$\int \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} dx = ?$$

Séma:

$$\int \frac{g'}{g} = \ln|g| + c$$



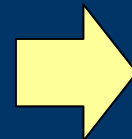
$$\int \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} dx = \ln|\operatorname{sh}x| + c$$

Példa

$$\int e^{x^2} \cdot 2x dx = e^{x^2} + c$$

Séma:

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c$$



$$\int e^{x^2} \cdot 2x dx = e^{x^2} + c$$

Az $\int f(g) \cdot g' = F(g)$ formula speciális esete

Ha a belső függvény lineáris, azaz

$$g(x) = ax+b,$$

akkor a formula szerint:

$$\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + c$$

Magyarázat:

$$\left(\frac{F(a \cdot x + b)}{a} + c \right)' = \frac{1}{a} F'(a \cdot x + b) \cdot a = f(a \cdot x + b)$$

A formula jelentősége abban áll, hogy ha az f függvény primitív függvénye ismert, akkor az $x \rightarrow f(ax+b)$ típusú függvényeket is nehézség nélkül tudjuk integrálni.

Példák

$$\int \cos(3x + 2) dx = \frac{\sin(3x + 2)}{3} + c$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

$$\int \frac{1}{7x + 3} dx = \frac{\ln|7x + 3|}{7} + c$$

Változóhelyettesítés

Tekintsük újra az összetett függvények differenciálási szabályából származtatott $\int (f \circ g) \cdot g' = (\int f) \circ g$ formulát!

Ha a g függvény a korábban megadott tulajdonságok mellett még invertálható is, akkor a formula két oldalán lévő függvényeknek képezzük a kompozíciós szorzatát a g inverzével. Így egy újabb formulához jutunk, melynek alkalmazását változóhelyettesítésként fogjuk emlegetni:

$$\int (f \circ g) \cdot g' = (\int f) \circ g \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\int (f \circ g) \cdot g') \circ g^{-1} = \int f}$$

avagy a másik jelölési módból kiindulva:

$$\int f(g) \cdot g' = F(g) \Rightarrow (\int f(g) \cdot g') \circ g^{-1} = F, \quad \text{ahol } F = \int f$$

Megjegyzés

Az így kapott formula lényege, hogy az $\int f$ integrál kiszámításához az $\int (f \circ g) \cdot g'$ primitív függvényt kell meghatározni, majd ennek a g inverzével való kompozíciós szorzata adja a keresett primitív függvényt.

A változóhelyettesítés elnevezés arra utal, hogy az integrálandó $f(x)$ függvény x változóját „helyettesítjük” egy megfelelően megválasztott $x=g(t)$ függvénnyel annak reményében, hogy az $\int f(x) dx$ integrálnál könnyebben meg tudjuk határozni az $\int (f(g(t)) \cdot g'(t)) dt$ integrált.

$$\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1}$$

avagy:

$$\int f(x) dx = \left(\int (f(g(t)) \cdot g'(t)) \right) \circ g^{-1}(x)$$

Példa

$$\int f(x) dx = \left(\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\int \cos(3x + 2) dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \sin t + c = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x + 2) + c$$

$$t = 3x + 2, \quad x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}, \quad dx = \frac{1}{3}dt$$

A könnyebb áttekinthetőség érdekében a számolásokban a fenti egyszerűsített jelöléseket szokás használni. A formulával való összevetéshez tekintsük az alábbi magyarázatot:

$$x = g(t) = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} \Rightarrow g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$$

Példa

$$\int f(x) dx = \left(\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt{x} dx &= \int \sin t \cdot 2t dt = 2 \sin t - 2t \cos t + c = \\ &= 2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$t = \sqrt{x}, \quad x = t^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad dx = 2t dt$$

Megjegyzés

Az $\int (t \cdot \sin t) dt$ integrált parciális módszerrel lehet meghatározni. Ezt meg is tettük parciális módszert leíró résznél (lásd ott).

Példa

$$\int f(x) dx = \left(\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 2e^x} dx = \int \frac{1}{t^2 - 2t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2(t-2)} dt = \dots$$

$$t = e^x, \quad x = \ln t,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$dx = \frac{1}{t} dt$$

Megjegyzés

Az kapott integrál kiszámítási módját lásd a racionális törtfüggvények integrálása című résznél.

Példa

$$\int f(x) dx = \left(\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx = \int \frac{t^2}{t^3 + 1} \cdot 4t^3 dt = 4 \cdot \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = \dots$$

$$t = \sqrt[4]{x}, \quad x = t^4, \quad \frac{dx}{dt} = 4t^3, \quad dx = 4t^3 dt$$

Megjegyzés

Az kapott integrál kiszámítási módját lásd a racionális törtfüggvények integrálása című résznél.

Változóhelyettesítés Néhány speciális helyettesítés

Az „ $x = \sin t$ ” helyettesítés alkalmazása

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{2t + \sin 2t}{4} + c =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx/dt = \cos t, dx = \cos t dt$$

$$= \frac{2 \arcsin x + \sin(2 \arcsin x)}{4} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

Megjegyzések

1. A számolásban felhasználtuk a $\sin(2x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ azonosságot az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}\sin(2 \arcsin x) &= 2 \cdot \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) = \\ &= 2 \cdot x \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = 2 \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

2. A $\cos^2 x$ függvény integrálásával kapcsolatban lásd az $x \rightarrow \sin^n x$, $x \rightarrow \cos^n x$, $x \rightarrow \operatorname{sh}^n x$, $x \rightarrow \operatorname{ch}^n x$ alakú függvények integrálása című részt!

3. Az $x=\sin t$ helyettesítéssel általában érdemes próbálkozni, ha a függvény formulája valamilyen formában tartalmazza a következő kifejezést:

$$\sqrt{1 - x^2}$$

Példa

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$x = \sin t, t = \arcsin x, dx/dt = \cos t, dx = \cos t dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{1}{8} \int (1-\cos 4t) dt =$$

$$\frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32} + c = \frac{\arcsin x}{8} - \frac{\sin(4 \arcsin x)}{32} + c =$$

$$= \frac{\arcsin x}{8} - \frac{x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}{8} + c$$

Változóhelyettesítés Néhány speciális helyettesítés

Az „ $x = \operatorname{ch} t$ ” helyettesítés alkalmazása

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \cdot \operatorname{sh} t dt = \int \operatorname{sh}^2 t dt = \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt = \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} - \frac{t}{2} + c =$$

$$x = \operatorname{ch} t, t = \operatorname{arch} x, dx/dt = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{sh} t dt$$

$$= \frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{arch} x)}{4} - \frac{\operatorname{arch} x}{2} + c = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{\operatorname{arch} x}{2} + c$$

Megjegyzések

1. A számolásban felhasználtuk a $\text{sh}(2x)=2 \cdot \text{sh}x \cdot \text{ch}x$ azonosságot az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}\text{sh}(2\text{arch } x) &= 2 \cdot \text{sh}(\text{arch } x) \cdot \text{ch}(\text{arch } x) = \\ &= 2 \cdot \sqrt{\text{ch}^2(\text{arch } x) - 1} \cdot x = 2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

2. Az sh^2x függvény integrálásával kapcsolatban lásd az $x \rightarrow \sin^n x$, $x \rightarrow \cos^n x$, $x \rightarrow \text{sh}^n x$, $x \rightarrow \text{ch}^n x$ alakú függvények integrálása című részt!

3. Az $x=\text{cht}$ helyettesítéssel általában érdemes próbálkozni, ha a függvény formulája valamilyen formában tartalmazza a következő kifejezést:

$$\sqrt{x^2 - 1}$$

Változóhelyettesítés Néhány speciális helyettesítés

Az „ $x = \text{sh } t$ ” helyettesítés alkalmazása

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \sqrt{\text{sh}^2 t + 1} \text{cht} dt = \int \text{ch}^2 t dt = \dots$$

$$x = \text{sh } t, t = \text{arsh } x, dx/dt = \text{ch } t, dx = \text{ch } t dt$$

Megjegyzések

1. A $\operatorname{ch}^2 x$ függvény integrálásával kapcsolatban lásd az $x \rightarrow \sin^n x$, $x \rightarrow \cos^n x$, $x \rightarrow \operatorname{sh}^n x$, $x \rightarrow \operatorname{ch}^n x$ alakú függvények integrálása című részt!
2. Az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel általában érdemes próbálkozni, ha a függvény formulája valamilyen formában tartalmazza a következő kifejezést:

$$\sqrt{x^2 + 1}$$

$x \rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c}$ típusú függvények integrálása

Az ilyen alakú függvények integrálása visszavezethető az előző három eset valamelyikére úgy, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzetet alakítunk ki:

Példa

$$\int \sqrt{x^2 - 6x - 7} \, dx = \int \sqrt{(x - 3)^2 - 16} \, dx = 4 \cdot \int \sqrt{\left(\frac{x - 3}{4}\right)^2 - 1} \, dx = 16 \cdot \int \sqrt{t^2 - 1} \, dt$$

$$t = \frac{x - 3}{4}$$

Példa

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} \, dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4} \, dx = 2 \cdot \int \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} \, dx = 4 \cdot \int \sqrt{t^2 + 1} \, dt$$

$$t = \frac{x+1}{2}$$

Példa

$$\int \sqrt{-x^2 + 10x + 11} \, dx = \int \sqrt{36 - (x-5)^2} \, dx = 6 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x-5}{6}\right)^2} \, dx = 6 \cdot \int \sqrt{1 - t^2} \, dt$$

$$t = \frac{x-5}{6}$$

Változóhelyettesítés Néhány speciális helyettesítés

A trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása a

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t$$

helyettesítéssel visszavezethető a racionális törtfüggvények integrálására.

A helyettesítés végrehajtása során az alábbi egyenlőségeket kell alkalmazni:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

Magyarázat:

$$\sin x = \sin(2 \cdot \operatorname{arctg} t) = 2 \cdot \sin(\operatorname{arctg} t) \cdot \cos(\operatorname{arctg} t) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \cos(2 \cdot \operatorname{arctg} t) = \cos^2(\operatorname{arctg} t) - \sin^2(\operatorname{arctg} t) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}} \right)^2 - \left(\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}} \right)^2 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Példák

$$\int \frac{4}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{4}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 8 \cdot \int \frac{1}{1+2t-t^2} dt$$

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx = \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+2t+t^2}{2t} dt$$

Néhány speciális helyettesítés

A hiperbolikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása a

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \operatorname{arth} t$$

helyettesítéssel visszavezethető a racionális törtfüggvények integrálására az alábbiak felhasználásával:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t^2}$$

A racionális törtfüggvények integrálása

Tétel

Minden racionális törtfüggvény felbontható egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegére, melyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{M(x)}{Q(x)}$$

*Elvégezve a $P:Q$ polinomosztást, a H polinom az osztás **hányadosaként**, az M polinom az osztás **maradékaként** adódik.*

Megjegyzés

Az előző tétel szerint egy racionális törtfüggvény integrálása visszavezethető egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény integrálására, melyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma.

Példa

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 2x + 7}{x^2 - 2x} = x^2 - 3x + 2 + \frac{2x + 7}{x^2 - 2x}$$

Az osztás végrehajtása:

$$(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 2x + 7) : (x^2 - 2x) = x^2 - 3x - 2$$

$$(-) \quad x^4 - 2x^3$$

$$-3x^3 + 8x^2 - 2x + 7$$

$$(-) \quad -3x^3 + 6x^2$$

$$2x^2 - 2x + 7$$

$$(-) \quad 2x^2 - 4x$$

$$2x + 7$$

Definíció: **parciális törtek**

$$\text{Az } \frac{A}{(x - x_0)^n}$$

és az

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

alakú kifejezéseket, ahol n pozitív egész, $A, B, C \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$ (vagyis az $x^2 + px + q$ másodfokú polinomnak nincs valós gyöke) **parciális törteknek** nevezzük.

Példa

$$\frac{5}{(x - 7)^4}$$

$$\frac{-8x + 13}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Tétel

Minden racionális törtfüggvény, *melyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma* felbontható parciális törtek összegére.

Megjegyzés

Ezt összevetve a korábbiakkal megállapítható, **egy racionális törtfüggvény integrálása visszavezethető egy polinom és parciális törtek integrálására.**

Tehát ha tudjuk integrálni a parciális törteket, akkor (elvileg) tudunk integrálni minden racionális törtfüggvény.

A parciális törtek integrálása

$$\int \frac{A}{x - x_0} dx = A \cdot \ln|x - x_0| + c$$

Példa

$$\int \frac{11}{x - 5} dx = 11 \cdot \ln|x - 5| + c$$

$$\int \frac{A}{(x - x_0)^n} dx = A \frac{(x - x_0)^{-n+1}}{-n + 1} + c$$

 $n > 1$

Példa

$$\int \frac{7}{(x - 2)^4} dx = 7 \frac{(x - 2)^{-3}}{-3} + c$$

A parciális törtek integrálása

Az $\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx$ alakú integrálok közül csak az

$n=1$ esettel foglalkozunk.

Az $n>1$ eset általában igen bonyolult, sok lépéses számolást igényel.

A számolás sémája:

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \frac{B}{2} \int \frac{\frac{2C}{B} - p}{x^2 + px + q} dx =$$

$$= \frac{B}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{B}{2} \left(\frac{2C}{B} - p \right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx = \frac{4}{4q - p^2} \int \frac{1}{\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{4}{4q - p^2} \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c$$

Példa

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x+13} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx - 18 \int \frac{1}{x^2+6x+13} dx =$$

$$= \frac{5}{2} \ln|x^2+6x+13| - 18 \int \frac{1}{x^2+6x+13} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+6x+13} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1} dx =$$

$$t = \frac{x+3}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2+1} \cdot 2 dt = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2}$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x+13} dx = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x+13| - 9 \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + c$$

Példa

$$\int \frac{5x - 6}{x^2 + 7x + 10} dx = ?$$

Parciális törtekre bontás:

$$\begin{aligned} \frac{5x - 6}{x^2 + 7x + 10} &= \frac{5x - 6}{(x + 2)(x + 5)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 5} = \\ &= \frac{A(x + 5) + B(x + 2)}{(x + 2)(x + 5)} = \frac{x \cdot (A + B) + (5A + 2B)}{(x + 2)(x + 5)} \end{aligned}$$

$$\text{I. } A + B = 5$$

$$\text{II. } 5A + 2B = -6$$

$$\Rightarrow A = -16/3, B = 31/3$$

$$\frac{5x - 6}{x^2 + 7x + 10} = \frac{-16/3}{x + 2} + \frac{31/3}{x + 5} = \frac{-16}{3} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{31}{3} \cdot \frac{1}{x + 5}$$

A kapott törtek integrálása:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 6}{x^2 + 7x + 10} dx &= -\frac{16}{3} \int \frac{1}{x + 2} dx + \frac{31}{3} \int \frac{1}{x + 5} dx = \\ &= -\frac{16}{3} \ln|x + 2| + \frac{31}{3} \ln|x + 5| + c \end{aligned}$$

Példa

$$\int \frac{x}{(x-2)^3} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-2)^3} &= \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} = \\ &= \frac{A + B(x-2) + C(x-2)^2}{(x-2)^3} = \frac{x^2 \cdot C + x \cdot (B - 4C) + (A - 2B + 4C)}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$\text{I. } C = 0$$

$$\text{II. } B - 4C = 1$$

$$\text{II. } A - 2B + 4C = 0$$

$$\Rightarrow A = 2, B = 1, C = 0$$

$$\int \frac{x}{(x-2)^3} dx = 2 \int \frac{1}{(x-2)^3} dx + \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} + c$$

Az $x \rightarrow \sin^n x$, $x \rightarrow \cos^n x$, $x \rightarrow \operatorname{sh}^n x$, $x \rightarrow \operatorname{ch}^n x$
($n \geq 2$) alakú függvények integrálása

Ha n páratlan, akkor a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

azonosságok alkalmazásával az integrálás visszavezethető

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

alakú feladatokra.

Példa

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\begin{aligned} \int \sin^7 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin^6 x \, dx = \int \sin x \cdot (\sin^2 x)^3 \, dx = \\ &= \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)^3 \, dx = \\ &= \int \sin x \cdot (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x) \, dx = \\ &= \int \sin x \, dx - 3 \cdot \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx + 3 \cdot \int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx - \int \cos^6 x \cdot \sin x \, dx = \\ &= \int \sin x \, dx + 3 \cdot \int \cos^2 x \cdot (-\sin x) \, dx - 3 \cdot \int \cos^4 x \cdot (-\sin x) \, dx + \\ &+ \int \cos^6 x \cdot (-\sin x) \, dx = \end{aligned}$$

$$= -\cos x + 3 \cdot \frac{\cos^3 x}{3} - 3 \cdot \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

Ha az n páros, akkor a következő azonosságok (ún. **linearizáló formulák**) valamelyikét kell alkalmazni, melyekkel a kitevő „felezhető”:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

Példa

$$\int \cos^4 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx =$$

Ezek után a kapott tagokat egyedileg kell integrálni attól függően, hogy páros vagy páratlan kitevősek.

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 4x}{4} + c$$

Részletszámítás:

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 4x}{4}$$

Példa: szabadesés (egyenletesen gyorsuló mozgás)

Gyorsulás-idő függvény $a(t) = g$

Sebesség-idő függvény

$$v(t) = \int g \, dt = g \cdot t + c$$

$$v(0) = v_0 \Rightarrow$$

$$v(t) = g \cdot t + v_0$$

Út-idő függvény

$$s(t) = \int (g \cdot t + v_0) \, dt = g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + c$$

$$s(0) = s_0 \Rightarrow$$

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$