NEM NYOMTATÁSRA!

Lineáris algebra

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: mátrix

Legyen m és n pozitív egész szám. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

táblázatot m×n típusú mártixnak nevezzük, és azt mondjuk, hogy A-nak m sora és n oszlopa van.

a_{ij} az A mátrix i-edeik sorának j-edik eleme

Jelölések

Azt, hogy az A mátrix az a_{ij} elemekből áll (i=1,…m, j=1,…,n) így jelöljük:

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

Az m×n típusú mátrixok halmazának jelölése:

$$M_{m\times n}$$

Az m=n esetben speciálisan használjuk a rövidebb

$$M_n \ (=M_{n\times n})$$

jelölést is.

NEM NYOMTATÁSRA!

Elnevezések

Az n×n típusú mátrixok neve:
n-edrendű kvadratikus (vagy négyzetes) mátrix

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Az 1×n típusú mátrixokat szokás sorvektornak, vagy sormátrixnak nevezni

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

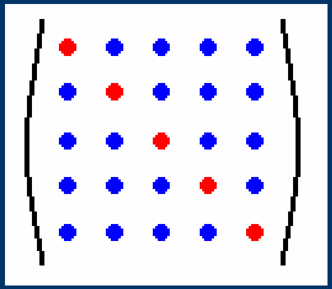
Az n×1 típusú mátrixokat szokás oszlopvektornak, vagy oszlopmátrixnak nevezni.

$$\begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Definíciók

Nullmátrix: minden eleme 0

Fődiagonális (főátló):
az (a_{ij}) n-edrendű kvadratikus mátrix fődiagonálisát az $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemek alkotják



n-edrendű egységmátrix: az az n-edrendű kvadratikus mátrix, melyben a fődiagonális minden eleme 1, a többi elem 0.
Jelölése: E_n

Pl. a harmadrendű egységmátrix:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definíció: mátrixok egyenlősége

Az $(a_{ij}) \in M_{m\times n}$ és a $(b_{ij}) \in M_{m\times n}$ mátrixok egyenlők, ha

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots n$$

Műveletek mátrixokkal

Definíció: összeadás

Az $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ és a $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$ mátrixok összege

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m\times n}$$

Példa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Azonos típusú mátrixok adhatók össze.

Az összeadás tulajdonságai

$A + B = B + A$ $\qquad A,B \in M_{m\times n}$

$(A + B) + C = A + (B + C)$ $\qquad A,B,C \in M_{m\times n}$

$A + O = A$ $\qquad A \in M_{m\times n}$

ahol O az m×n típusú nullmátrixot jelöli.

(A nullmátrix az összeadás egységeleme.)

Minden mátrixnak létezik additív inverze azaz: minden $A \in M_{m\times n}$ mátrixhoz létezik olyan $B \in M_{m\times n}$, melyre

$$A + B = O$$

(Nyilvánvaló, hogy ha $A = (a_{ij})$, akkor az additív inverze: $B = (-a_{ij})$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$)).

Definíció: szorzás számmal

$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$, $\lambda \in$ R. Az A mátrix λ-szorosa:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \in M_{m\times n}$$

Példa

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 21 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

A számmal való szorzás tulajdonságai

$(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ A \in M_{m \times n}$

$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ A \in M_{m \times n}$

$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ $\quad \lambda \in \mathbf{R},\ A \in M_{m \times n}$

$1 \cdot A = A$ $\quad A \in M_{m \times n}$

Definíció: mátrixok szorzása

Az $A = (a_{ij}) \in M_{m\times k}$ és a $B = (b_{ij}) \in M_{k\times n}$ mátrixok szorzata az

$$A \bullet B = (c_{ij}) \in M_{m\times n}$$

mátrix, ahol

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}$$

Megjegyzés

Egy m×k és egy k×n típusú mátrix szorzata egy m×n típusú mátrix.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A \cdot B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & & 2 & 0 & 4 & -1 \\ & & & 0 & 5 & 1 & 2 \\ & & & 3 & -2 & 0 & -1 \\ \hline 3 & 5 & 1 & 9 & 23 & 17 & 6 \\ -3 & 0 & 4 & 6 & -8 & -12 & -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 23 & 17 & 6 \\ 6 & -8 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A szorzás tulajdonságai

$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$ $\quad A \in M_{m\times k},\ B \in M_{k\times n},\ C \in M_{n\times s}$

$(A + B) \bullet C = A \bullet C + B \bullet C$ $\quad A, B \in M_{m\times k},\ C \in M_{k\times n}$

$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$ $\quad A \in M_{m\times k},\ B, C \in M_{k\times n}$

Ha $A \in M_n$ kvadratikus mátrix, akkor

$$A \bullet E_n = E_n \bullet A = A$$

vagyis E_n a szorzás egységeleme az n-edrendű kvadratikus mátrixok halmazán.

Általában $A \bullet B \neq B \bullet A$

Definíció: transzponálás

Az $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}$ mátrix transzponáltja az a $B=(b_{ij})\in M_{n\times m}$ mátrix, melyre

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots m$$

Jelölés: $B = A^T$

Megjegyzés

Egy $m\times n$ típusú mátrix transzponáltja egy $n\times m$ típusú mátrix.

Példa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Definíció: szimmetrikus mátrix

Az $A \in M_n$ mátrix szimmetrikus, ha $A = A^T$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 7 & 5 & 10 \\ -4 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Definíció: háromszög mátrix

Egy kvadratikus mátrix felső háromszög mátrix, ha a főátló alatt minden elem 0.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Egy kvadratikus mátrix alsó háromszög mátrix, ha a főátló felett minden elem 0.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Definíció: invertálható mátrix

Az $A \in M_n$ kvadratikus mátrixot invertálhatónak nevezzük, ha létezik olyan $B \in M_n$ mátrix, melyre

$$A \bullet B = B \bullet A = E_n$$

A B mátrixot az A (multiplikatív) inverzének nevezzük.

Jelölés: $B = A^{-1}$

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determináns

Minden kvadratikus mátrixhoz hozzárendelünk egy valós számot, a mátrix determinánsát.

Másodrendű mátrixok determinánsa

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Példa

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 6\cdot 7 - 4\cdot 3 = 30$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Harmadrendű mátrix determinánsa

Sarrus szabály

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = +2\cdot 3\cdot(-2) + 4\cdot 1\cdot 5 + (-1)\cdot 0\cdot 1 -$$

$$-5\cdot 3\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 2 - (-2)\cdot 0\cdot 4 = -12 + 20 + 0 + 15 - 2 - 0 = 21$$

Harmadrendű mátrixok determinánsa

Sor / oszlop szerinti kifejtés

Példa: első sor szerinti kifejtés

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 4\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

+	-	+
-	+	-
+	-	+

$$= +\ 2\cdot(-7) - 4\cdot(-5) + (-1)\cdot(-15) = 21$$

Harmadrendű mátrixok determinánsa

Sor / oszlop szerinti kifejtés

Példa: második oszlop szerinti kifejtés

$$\det\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix} = -4\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$$

+	-	+
-	+	-
+	-	+

= - 4·(-5) + 3·1 - 1·2 = 21

Magasabb rendű mátrixok determinánsa sor / oszlop szerinti kifejtéssel

Az előbbiekben a harmadrendű mátrixok determinánsának kiszámítására bemutatott eljárás a „sor / oszlop szerinti kifejtés" módszer alkalmazása a harmadrendű esetre.

Az általános módszer tetszőleges rendű kvadratikus mátrixok determinánsának kiszámítására alkalmazható: általában egy n-edrendű mátrix determinánsának kiszámítása a visszavezethető n darab (n-1)-edrendű mátrix determinánsának kiszámítására.

Definíció: elemhez tartozó aldeterminâns

Az $A = (a_{ij}) \in M_n$ n-edrendű kvadratikus mátrix a_{ij} eleméhez tartozó D_{ij} aldeterminánsán az i-edik sor és a j-edik oszlop „törlésével” előálló (n-1)-edrendű mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ – szeresét értjük.

Megjegyzés

A fenti definícióban szereplő, az a_{ij} elemhez tartozó, előjelként is felfogható $(-1)^{i+j}$ érték *(+1, vagy –1)*, azonos a harmadrendű determináns kiszámításánál használt táblázatban lévő előjellel:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

Példa: elemhez tartozó aldetermináns

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Sor / oszlop szerinti kifejtés

Egy kvadratikus mátrix determinánsa kiszámítható úgy, hogy egy sor vagy oszlop elemeit rendre megszorozzuk az elemekhez tartozó aldeterminánsokkal és a kapott szorzatokat összeadjuk.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: első oszlop szerinti kifejtés

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix}6 & 7 & 8\\ 10 & 11 & 12\\ 14 & 15 & 16\end{pmatrix}+5\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 10 & 11 & 12\\ 14 & 15 & 16\end{pmatrix}+$$

$$+9\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ 14 & 15 & 16\end{pmatrix}+13\cdot(-1)^{4+1}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ 10 & 11 & 12\end{pmatrix}$$

Megjegyzés

A determináns kiszámítására további, a fentieknél hatékonyabb módszerek állnak rendelkezésre, például:

- **háromszög alakra hozás**
- **sor / oszlop szerinti kifejtés kombinálása a determináns értékét nem változtató átalakításokkal**

Ezeket a módszereket később mutatjuk be

A determináns néhány tulajdonsága

Tétel

Ha az A márixban egy sor egyenlő a többi sor egy lineáris kombinációjával, akkor det A = 0

Speciálisan:

- **Ha A-ban van csupa 0-ból álló sor, akkor det A = 0**
- **Ha A-ban két sor megegyezik, akkor det A= 0**

Tétel

A determináns értéke nem változik, ha egy sorhoz hozzáadjuk a többi sor valamely lineáris kombinációját.

Speciálisan: a determináns értéke nem változik, ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát.

Példa

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 2+2\cdot(-1) & -5+2\cdot 7 & 3+2\cdot(-4) \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Mátrix determinánsának értéke (-1)-szeresére változik, ha a mátrix két sorát felcseréljük.

Példa

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tétel

$$\det A = \det A^T$$

Következmény

A determináns előbb felsorolt tulajdonságai érvényben maradnak, ha sor helyett oszlopot mondunk.

Tétel

Háromszög mátrix determinánsa egyenlő a főátlóban lévő elemek szorzatával.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$$

Megjegyzés: háromszög alakra hozás

Oszlopok (sorok) számszorosainak más oszlopokhoz (sorokhoz) való hozzáadásával, valamint oszlopok (sorok) cseréjével bármely kvadratikus mátrix háromszög alakra „hozható”.

Példa

1. lépés: (2. sor) – 3 × (1. sor) és (3. sor) + 4 × (1. sor)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 10 \\ -4 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix} =$$

2. lépés: (3. sor) + 3 × (2. sor)

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot 46 = -184$$

Megjegyzés

A háromszög alakra hozás végigvitele helyett célszerűbb lehet a következő: ha egy oszlopban (sorban) már csak egy elem különbözik 0-tól, akkor fejtsük ki a determinánst ezen oszlop (sor) szerint. Ezzel az eljárással lépésenként eggyel csökkenthető a kiszámítandó determináns rendje:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 10 \\ -4 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -4 & 13 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4 \cdot 7 - 12 \cdot 13) = -184$$

Tétel: szorzási szabály a determinánsokra

Ha A és B azonos rendű kvadratikus mátrixok, akkor

$$\det(A \bullet B) = \det A \cdot \det B$$

Tétel: a determináns és az invertálhatóság összefüggése

Egy A kvadratikus mátrix invertálható $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

NEM NYOMTATÁSRA!

Mátrix invertálása determinánsokkal

Tétel

Kvadratikus mátrix inverzét megkapjuk, ha képezzük a mátrix elemeihez tartozó aldeterminánsok mátrixának transzponáltját, és azt megszorozzuk a mátrix determinánsának reciprokával:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$$

Emlékeztető: Az $A = (a_{ij}) \in M_n$ n-edrendű kvadratikus mátrix a_{ij} eleméhez tartozó D_{ij} aldeterminánsán az i-edik sor és a j-edik oszlop „törlésével" előálló (n-1)-edrendű mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ – szeresét értjük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad \det A=\det\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}=2$$

$$D_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=1\qquad D_{12}=(-1)^{1+2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=-1\qquad D_{13}=(-1)^{1+3}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=1$$

$$D_{21}=(-1)^{2+1}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=1\qquad D_{22}=(-1)^{2+2}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=1\qquad D_{22}=(-1)^{2+3}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=-1$$

$$D_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=-3\qquad D_{32}=(-1)^{3+2}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=1\qquad D_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-3\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Lineáris terek

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: lineáris tér

Egy X halmazt lineáris térnek (vagy vektortérnek) nevezzünk, ha adott két művelet

összeadás

$$+ : X \times X \to X$$

számmal való szorzás

$$\bullet : R \times X \to X$$

melyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

Ha $x , y \in X$ és $\lambda , \mu \in R$, akkor

• $x + y = y + x$	(kommutativitás)
• $x + (y + z) = (x + y) + z$	(asszociativitás)
• $x + \underline{0} = x$	(additív egység létezése)
• $x + (-x) = \underline{0}$	(additív inverz létezése)
• $1 \cdot x = x$	
• $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$	
• $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$	(disztributivitás)

Példák lineáris térre

- **szabad vektorok**
- **helyzetvektorok**
- **m×n típusú mátrixok**
- $\mathbf{R}^n$
- **f:[0,1]→R függvények**
- **(a_n):N→R valós számsorozatok**

Egy lineáris tér elemeit vektoroknak nevezzük.

A vektor elnevezést itt általánosabb értelemben használjuk, mint a geometriai vagy fizikai értelemben vett vektoroknál.

Definíció: vektorrendszer

Az X lineáris tér elemeinek egy { a_1 , a_2 , … , a_n } halmazát vektorrendszernek nevezzük.

Definíció: lineáris kombináció

Az X lineáris térben az a_1, a_2, … , a_n ∈ X vektorok x_1, x_2, … , x_n ∈ R számokkal képzett lineáris kombinációja:

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n \in X$$

Definíció: lineáris kifejezhetőség

A b∈X vektor lineárisan kifejezhető az {a_1,a_2,…,a_n} vektorrendszer elemeivel, ha léteznek olyan x_1 , x_2 , … , x_n ∈ R együtthatók, hogy

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n$$

Megjegyzés

A lineáris kifejezhetőség problémája R^n-ben lineáris egyenletrendszerre vezet.

Egy példa R^3-ban:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kifejezhető-e a b vektor az $\{a_1,a_2,a_3\}$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A kérdés átfogalmazása: Vannak-e olyan x_1, x_2, x_3 számok, hogy

$$\mathbf{b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3},$$

azaz:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 9 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}$$

Definíció: lineáris függetlenség

Az $\{ a_1 , a_2 , \ldots , a_n \} \subset X$ vektorrendszert lineárisan független, ha a

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = 0$$

$(x_1,x_2,\ldots,x_n \in R)$ egyenlőségből következik, hogy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Ha egy vektorrendszer nem független, akkor (lineárisan) függőnek nevezzük.

Tétel: a lineáris függetlenség ekvivalens fogalma

Az $\{ a_1 , a_2 , \dots , a_n \} \subset X$ vektorrendszer (lineárisan) független $\Leftrightarrow$ a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a vektorrendszer többi vektorának lineáris kombinációjaként.

Megjegyzések

1. **Független vektorrendszer bármely részrendszere független.**
2. **Független vektorrendszer nem tartalmazhatja a nullvektort.**

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A függetlenség vizsgálata R^n-ben homogén lineáris egyenletrendszerre vezet.

Egy példa R^3-ban:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektorrendszer független-e?

Az { a_1 , a_2 , a_3 } vektorrendszer pontosan akkor független lineárisan, ha az

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenlőségből következik, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, vagyis az

$$\begin{array}{llll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = 0 \end{array}$$

egyenletrendszernek csak az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ún. triviális megoldása van.

Definíció: vektorrendszer lineáris burka

Az X lineáris tér $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ vektorrendszer lineáris burka az A-beli vektorokból képezhető összes lineáris kombináció halmaza.

Jelölés: $[A] = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$

Definíció: bázis

Az X lineáris tér B vektorrendszerét bázisnak nevezzük, ha

- **B független**
- **$[B] = X$**

Definíció: véges dimenziós lineáris tér

Egy lineáris tér véges dimenziós, ha van véges elemszámú bázisa.

Tétel

Egy véges dimenziós lineáris tér bármely bázisának elemszáma egyenlő.

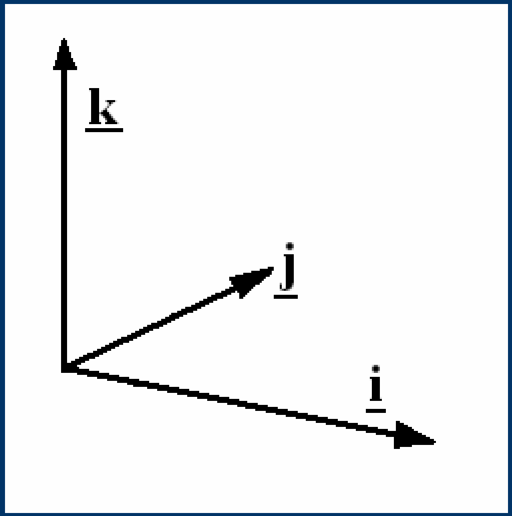
Definíció: dimenzió

Egy bázisban lévő vektorok számát a lineáris tér dimenziójának nevezzük.

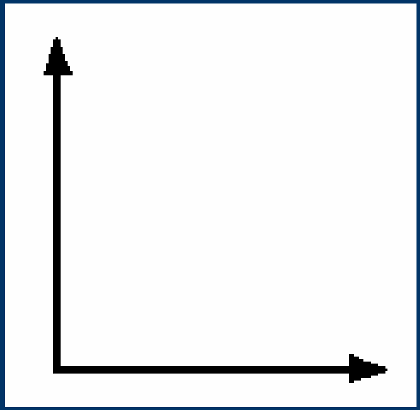
A nullvektorból álló egyelemű {0} lineáris tér dimenziója 0.

Példa

A (geometriai) térbeli helyzetvektorok lineáris tere háromdimenziós.



A (geometriai) síkbeli helyzetvektorok lineáris tere kétdimenziós.



Az $\mathbf{R}^n$ lineáris tér n dimenziós, mivel az

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló (n elemű) vektorrendszer bázis.

Neve: természetes bázis

Speciálisan: az R^3 lineáris térbeli természetes bázis:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Indoklás:

Az $\{e_1, e_2, e_3\}$ vektor rendszer független, továbbá $[e_1, e_2, e_3] = R^3$ ui.:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Egy n dimenziós lineáris térben bármely n elemű független vektorrendszer bázis, és bármely legalább n+1 elemű vektorrendszer függő.

Tétel

Ha B az X lineáris tér egy bázisa, akkor bármely X-beli b vektor egyértelműen előáll a B-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

Ezt a b vektor adott bázisbeli előállításának nevezzük.

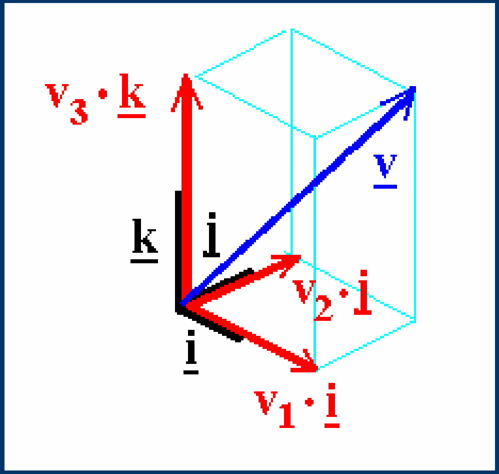
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: koordináták

Ha $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ az X lineáris tér egy bázisa, akkor egy b vektor

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n$$

bázis előállításában szereplő $x_1, x_2, \ldots, x_n$ együtthatókat a b vektor B bázisbeli koordinátáinak nevezzük.



$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$$

Példa

$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ **koordinátái a** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ **bázisban:**

3 , 2 , -1 **ugyanis:**

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Míg a $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ **természetes bázisban: -1, 9, 0, ugyanis**

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Egy vektor koordinátái függnek a bázistól.

Definíció: vektorrendszer rangja

Egy X lineáris tér egy A vektorrendszerének rangján az A maximális elemszámú független részrendszerének elemszámát értjük.

Definíció: mátrix rangja

A mátrix rangja az oszlopvektoraiból képzett vektorrendszer rangja.

Tétel

Egy n-edrendű kvadratikus A mátrix rangja n

$$\Leftrightarrow \ \det A \neq 0$$

Következmény

R^n egy n elemű vektorrendszere akkor és csak akkor bázisa R^n-nek, ha a vektorrendszer elemeiből képzett kvadratikus mátrix determinánsa nem 0.

Példa

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

bázis R^3-ban, mert

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 14 \neq 0$$

Lineáris egyenletrendszerek

Az

$$\begin{array}{llllllll}
\text{I.} & a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 + & \ldots & +a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
\text{II.} & a_{21}\cdot x_1 & +a_{22}\cdot x_2 + & \ldots & +a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
 & & \vdots & & & & \\
\text{m.} & a_{m1}\cdot x_1 & +a_{m2}\cdot x_2 + & \ldots & +a_{mn}\cdot x_n & = & b_m
\end{array}$$

egyenletekből álló rendszert – ahol $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ adottak, és keresendő az összes olyan $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in \mathbf{R}^n$ szám n-es, melyre az egyenlőségek teljesülnek – n ismeretlenes, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Elnevezések

a_{ij} : az egyenletrendszer együtthatói

b_i : konstansok

x_i : ismeretlenek

Az egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Definíció: lineáris e.r. vektoros és mátrixos alakja

A kibővített mátrix oszlopvektorait jelölje:

$$\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n, b},$$

az ismeretlenekből álló oszlopvektor legyen x

Ezekkel a jelölésekkel az egyenletrendszer

vektoros alakja:

$$\mathbf{x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = b}$$

mátrixos alakja:

$$\mathbf{A \cdot x = b}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\begin{array}{lllll} \text{I.} & x_1 & -x_2 & +2x_3 & = -1 \\ \text{II.} & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = 9 \\ \text{III.} & -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 0 \end{array}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ezekkel az egyenletrendszer vektoros illetve mátrixos alakja:

$$\boxed{\mathbf{x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = b}} \qquad \boxed{\mathbf{A \cdot x = b}}$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Két szükséges és elegendő feltétel lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére

Tétel

Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha a b vektor lineárisan kifejezhető $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorrendszer elemeivel.

Tétel

Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha az e.r. alapmátrixának és a kibővített mátrixának rangja egyenlő

Definíció: homogén és inhomogén e.r.

Ha

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0,$$

akkor az egyenletrendszert homogének nevezzük, különben inhomogén.

Definíció: triviális megoldás

Világos, hogy a homogén e.r.-nek

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

megoldása. Ezt triviális megoldásnak nevezzük.

A lineáris egyenletrendszereket a megoldások száma alapján az alábbiak szerint osztályozzuk:

az egyenletrendszer

- **ellentmondásos, ha nincs megoldása**
- **határozott, ha pontosan egy megoldása van**
- **határozatlan, ha több (végtelen sok) megoldása van**

Példa ellentmondásos egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ \text{II.} & 4x_1 + 6x_2 = 7 \end{array}$$

Az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Példa határozott egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ \text{II.} & 4x_1 - x_2 = 10 \end{array}$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $(x_1, x_2) = (3,2)$

Példa határozatlan egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 5 \\ \text{II.} & x_1 - x_2 + 4\,x_3 = -1 \end{array}$$

Az egyenletrendszernek minden olyan (x_1,x_2,x_3) számhármas megoldása, melyre

$x_3 \in \mathbf{R}$ tetszőleges, $x_1 = 2 - 3 \cdot x_3$, $x_2 = 3 + x_3$

Például: ha $x_3 = 2$, akkor $x_1 = -4$, $x_2 = 5$, vagyis

$(x_1,x_2,x_3) = (-4 , 5, 2)$ egy megoldás.

Definíció: egyenletrendszer függetlensége

Egy egyenletrendszer független (az egyenletrendszer egyenletei függetlenek), ha az alapmátrixának rangja egyenlő az egyenletek számával.

Megjegyzés

Egy egyenletrendszerben annyi független egyenlet van, amennyi az alapmátrixának rangja.

Definíció: redukált rendszer

Ha egy egyenletrendszer alapmátrixának rangja r, akkor az egyenletek közül kiválasztandó r db úgy, hogy a belőlük álló egyenletrendszer független. (A kiválasztás általában nem egyértelmű). Egy ilyen részrendszert az eredeti egyenletrendszer redukált rendszerének nevezzük.

Megjegyzés

Független egyenletrendszer saját magának redukált rendszere.

Tétel

Redukált egyenletrendszer esetén az egyenletek és az ismeretlenek számának viszonya meghatározza a megoldások számát: ha a redukált rendszer n ismeretlent és r egyenletet tartalmaz, akkor:

r = n esetén a redukált rendszer határozott

r < n esetén a redukált rendszer határozatlan

Megjegyzés

Az előző tétel csak redukált rendszerre igaz. Tetszőleges egyenletrendszer esetén a határozottsághoz általában, nem elegendő, hogy az egyenletek és az ismeretlenek száma egyenlő legyen.

Megjegyzés

Egy egyenletrendszer megoldáshalmazát lényegében a redukált rendszere határozza meg, ui.:

ha az egyenletrendszer nem ellentmondásos, akkor az egyenletrendszer megoldásai pontosan a redukált rendszerének megoldásai.

Elemi bázistranszformáció

Definíció: bázistranszformáció

Ismeretes, hogy egy vektortérben egy vektornak a tér különböző bázisaira vonatkozó koordinátái különbözőek.

Bázistranszformáción azt az eljárást értjük, mely során egy vektor egy B_1 bázisbeli koordinátáiból meghatározzuk egy másik B_2 bázisbeli koordinátáit.

Definíció: elemi bázistranszformáció

A bázistranszformációt eleminek nevezzük, ha a B_1 és a B_2 bázisok pontosan egy vektorban különböznek.

Tétel

Legyen $B_1 = \{ f_1, f_2, \dots, f_m \}$ $\mathbf{R}^m$ egy bázisa, $u, a \in \mathbf{R}^m$ és

$$u = u_1 \cdot f_1 + u_2 \cdot f_2 + \dots + u_m \cdot f_m$$

$$a = a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + \dots + a_m \cdot f_m$$

Ha $u_i \neq 0$ valamely i-re, akkor az f_i vektornak az u vektorral való kicserélésével adódó

$$B_2 = \{ f_1, \dots, f_{i-1}, u, f_{i+1}, \dots, f_m \}$$

vektorrendszer szintén bázis.

Hajtsuk végre az a vektor koordinátáira vonatkozóan a $B_1 \to B_2$ elemi bázistranszformációt, azaz határozzuk meg az a vektor koordinátáit a B_2 bázisban!

Az u vektor előállításából:

$$f_i = \frac{1}{u_i}u - \frac{u_1}{u_i}f_1 - \ldots - \frac{u_{i-1}}{u_i}f_{i-1} - \frac{u_{i+1}}{u_i}f_{i+1} - \ldots - \frac{u_m}{u_i}f_m$$

Ezt behelyettesítve az a vektor előállításába megkapjuk az a vektor B_2 bázisbeli keresett koordinátáit:

$$a = \left(a_1 - \frac{a_i}{u_i}u_1\right)f_1 + \ldots + \left(a_{i-1} - \frac{a_i}{u_i}u_{i-1}\right)f_{i-1} + \frac{a_i}{u_i}u + \left(a_{i+1} - \frac{a_i}{u_i}u_{i+1}\right)f_{i+1} + \ldots + \left(a_m - \frac{a_i}{u_i}u_m\right)f_m$$

Az elemi bázistranszformáció sémája

	u	a
f_1	u_1	a_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_i	u_i	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_m	u_m	a_m
f_1	0	$a_1 - \delta \cdot u_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_{i-1}	0	$a_{i-1} - \delta \cdot u_{i-1}$
u	1	$\delta = a_i / u_i$
f_{i+1}	0	$a_{i+1} - \delta \cdot u_{i+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_m	0	$a_m - \delta \cdot u_m$

Az eredeti bázis: (rows $f_1 \ldots f_m$, upper block)

Az új bázis: (lower block)

u_i : generáló elem

Az új vektor sora

Lineáris egyenletrendszer megoldása elemi bázistranszformációval

Mivel minden lineáris egyenletrendszer egy lineáris kifejezhetőségi problémával egyenértékű (gondoljunk az egyenletrendszer vektoros alakjára), a megoldásban lineáris algebrai eszközöket alkalmazhatunk.

Az $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása annyit jelent, mint meghatározni az összes olyan $(x_1, x_2, .., x_n)$ szám n-es, melyekkel a b vektor előáll az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Ezt a feladatot az alábbiakban bázistranszformációval oldjuk meg.

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásait megkaphatjuk az alábbi eljárással:

Induljunk ki $\mathbf{R}^m$ természetes bázisából.

Elemi bázistranszformációk sorával vigyük be a bázisba az $a_1,a_2,\ldots,a_n$ vektorok közül annyit, amennyi lehetséges *(az $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ vektorrendszer elemei közül pontosan annyi vihető be a bázisba, amennyi az alapmátrix rangja, azaz ahány független egyenlet van)*, és kövessük nyomon az $a_1,a_2,\ldots,a_n$ és a b vektorok koordinátáinak alakulását.

Az elemi bázistranszformációk sora akkor ér véget, ha nem tudunk több vektort a bázisba bevinni – ez a számolás során onnan vehető észre, hogy nincs több választható generáló elem.

A b vektor új bázisbeli koordinátáiból kiolvasható az egyenletrendszer megoldása.

NEM NYOMTATÁSRA!

Határozott e.r. megoldása

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad - x_2 \quad + 2x_3 &= -1 \\
2x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 &= 9 \\
-x_1 \quad + 2x_2 \quad + x_3 &= 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow
$$

		x_1 a_1	x_2 a_2	x_3 a_3	b	
	e_1	1	-1	2	-1	
	e_2	2	1	-1	9	
	e_3	-1	2	1	0	
	a_1	1	-1	2	-1	δ
	e_2	0	3	-5	11	
	e_3	0	1	3	-1	
	a_1	1	0	1/3	8/3	
	a_2	0	1	-5/3	11/3	δ
	e_3	0	0	14/3	-14/3	
x_1	a_1	1	0	0	3	
x_2	a_2	0	1	0	2	
x_3	a_3	0	0	1	-1	δ

$$
\Leftarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 2 \\
x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

TATÁSRA!

Határozatlan e.r. megoldása

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\
2x_1 & & +x_3 & -2x_4 & & = & 2 \\
 & +x_2 & -x_3 & & +2x_5 & = & -1 \\
3x_1 & & +x_3 & -3x_4 & +3x_5 & = & 2 \\
2x_1 & +x_2 & & -2x_4 & +2x_5 & = & 1
\end{array}
$$

	x_1 a_1	x_2 a_2	x_3 a_3	x_4 a_4	x_5 a_5	b	
e_1	1	-1	1	-1	1	1	
e_2	2	0	1	-2	0	2	
e_3	0	1	-1	0	2	-1	
e_4	3	0	1	-3	3	2	
e_5	2	1	0	-2	2	1	
a_1	1	-1	1	-1	1	1	δ
e_2	0	2	-1	0	-2	0	
e_3	0	1	-1	0	2	-1	
e_4	0	3	-2	0	0	-1	
e_5	0	3	-2	0	0	-1	
a_1	1	0	0	-1	3	0	
e_2	0	0	1	0	-6	2	
a_2	0	1	-1	0	2	-1	δ
e_4	0	0	1	0	-6	2	
e_5	0	0	1	0	-6	2	
a_1	1	0	0	-1	3	0	
a_3	0	0	1	0	-6	2	δ
a_2	0	1	0	0	-4	1	
e_4	0	0	0	0	0	0	
e_5	0	0	0	0	0	0	

- **Hagyjuk el a csak 0-t tartalmazó sorokat**
- **Cseréljük meg az oszlopok sorrendjét úgy, hogy a bal oldali oszlopok egységmátrixot alkossanak**

$\Leftarrow$

		x_1 a_1	x_2 a_2	x_3 a_3	x_4 a_4	x_5 a_5	b
x_1	a_1	1	0	0	-1	3	0
x_2	a_2	0	1	0	0	-4	1
x_3	a_3	0	0	1	0	-6	2

NEM NYOMTATÁSRA!

A megoldás előállítása:

$$x_k = d - D \cdot x_{sz}$$

Kötött változók:

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Szabad változók:

$$x_{sz} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

x_{sz}

		x_1 a_1	x_2 a_2	x_3 a_3	x_4 a_4	x_5 a_5	b
x_1	a_1	1	0	0	-1	3	0
x_2	a_2	0	1	0	0	-4	1
x_3	a_3	0	0	1	0	-6	2

x_k

d

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_{sz} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x_k = d - D \cdot x_{sz}}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 - 3x_5 \\ 1 + 4x_5 \\ 2 + 6x_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_1 = x_4 - 3x_5} \qquad \mathbf{x_2 = 1 + 4x_5} \qquad \mathbf{x_3 = 2 + 6x_5}$$

Mátrix invertálása bázistranszformáció alkalmazásával

Korábban már definiáltuk a mátrix inverzének fogalmát:

Az $A^{-1} \in M_n$ mátrixot az $A \in M_n$ mátrix inverzének nevezzük, ha

$$A \bullet A^{-1} = E_n$$

Ha az A^{-1} mátrix oszlopvektorai:

$$d_1, d_2, \dots , d_n$$

akkor az $A \bullet A^{-1} = E_n$ egyenlet ekvivalens az alábbi n darab egyenletrendszerrel, melyekben az alapmátrixok megegyeznek, így az egyenletrendszerek csak a jobb oldalukban különböznek:

$$A \bullet d_1 = e_1 , A \bullet d_2 = e_2 , \dots , A \bullet d_n = e_n$$

Így az A^{-1} mátrix meghatározható a fenti egyenletek szimultán megoldásával.

Lineáris algebra

OMTATÁSRA!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

	a_1	a_2	a_2	e_1	e_2	e_3
e_1	2	2	4	1	0	0
e_2	4	4	7	0	1	0
e_3	-2	-1	-4	0	0	1
a_1	1	1	2	1/2	0	0
e_2	0	0	-1	-2	1	0
e_3	0	1	0	1	0	1
a_1	1	0	2	-1/2	0	-1
e_2	0	0	-1	-2	1	0
a_2	0	1	0	1	0	1
a_1	1	0	0	-9/2	2	-1
a_3	0	0	1	2	-1	0
a_2	0	1	0	1	0	1
a_1	1	0	0	-9/2	2	-1
a_2	0	1	0	1	0	1
a_3	0	0	1	2	-1	0

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9/2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

További módszerek határozott lineáris egyenletrendszerek megoldására

Cramer szabály

Inverzmátrix módszer

Cramer szabály

Példa

$$\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 6 \\ -2x_1 & & +2x_3 & = & -18 \\ & x_2 & -x_3 & = & 8 \end{array}$$

$$D = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6$$

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -18 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -24$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -2 & -18 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} = -18$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -2 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 30$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-24}{-6} = 4 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-18}{-6} = 3 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{30}{-6} = -5$$

Inverz mátrix módszer

Ha az $A \bullet x = b$ egyenletrendszer esetén az alapmátrix invertálható, azaz $\det(A) \neq 0$, akkor az egyenletrendszer egyetlen megoldása előáll a következő formában:

$$x = A^{-1} \bullet b$$

Példa

$$\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 6 \\ -2x_1 & & +2x_3 & = & -18 \\ & x_2 & -x_3 & = & 8 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 1 \\ \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 2 \\ \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 6 \\ & & & -18 \\ & & & 8 \\ \hline \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 1 & 4 \\ \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 2 & 3 \\ \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 1 & -5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 1 \\ \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 2 \\ \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lineáris függvények

Definíció

Legyen X és Y lineáris tér. Az f:X→Y függvényt lineárisnak nevezzük, ha additív és homogén, azaz

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad x_1, x_2 \in X$$

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x) \qquad x \in X,\ c \in \mathbf{R}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: lineáris függvény mátrixa

Legyen X n dimenziós, Y m dimenziós lineáris tér,

$\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ az X egy bázisa,

$\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ az Y egy bázisa,

f: X→Y lineáris függvény

Ha $f(e_i) = a_{i1} \cdot u_1 + a_{i2} \cdot u_2 + \ldots + a_{im} \cdot u_m$ (i=1,…,n), akkor az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrixot az f lineáris függvény mátrixának nevezzük.

Megjegyzések

1. **Lineáris függvény mátrixa függ a lineáris terek bázisainak megválasztásától.**
2. **A bázisokat rögzítve az f függvény egyértelműen meghatározza az A mátrixot, és az A mátrix is egyértelműen meghatározza az f függvényt**

Tétel

Ha $A \in M_{m \times n}$ az $f: R^n \rightarrow R^m$ lineáris függvény mátrixa, akkor

$$f(x) = A \cdot x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

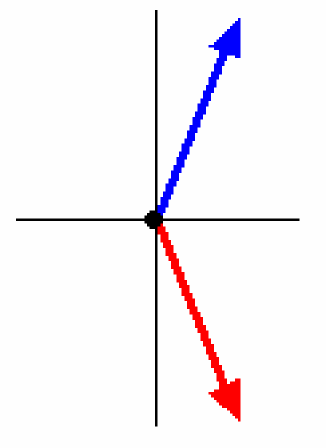
Példa: síkbeli lineáris transzformációk

Az „x” tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$



A mátrix meghatározása:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

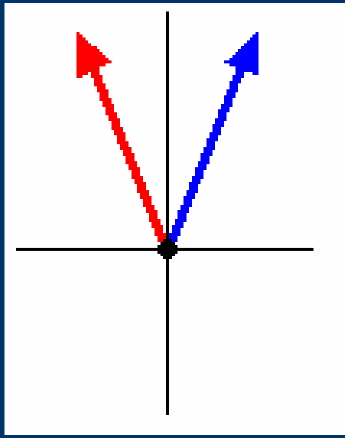
Példa: síkbeli lineáris transzformációk

Az „y” tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



A mátrix meghatározása:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

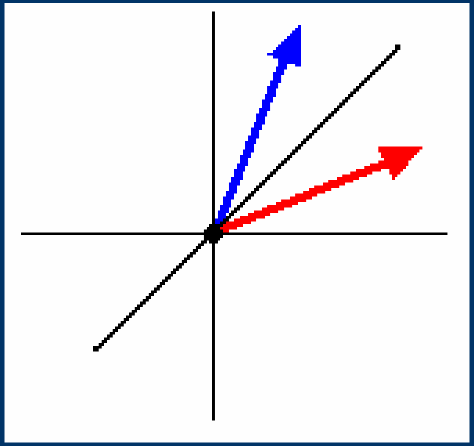
Példa: síkbeli lineáris transzformációk

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Az „y=x” egyenesre vonatkozó tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

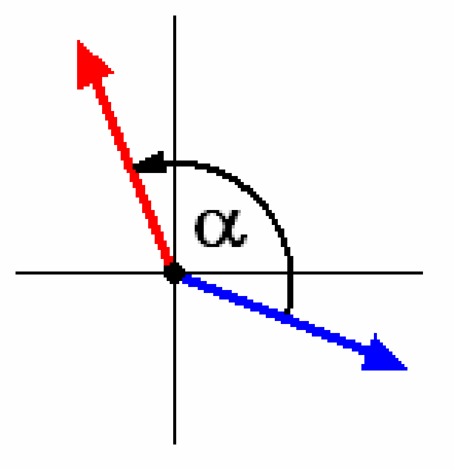


A mátrix meghatározása:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Példa: síkbeli lineáris transzformációk

Az origó körüli α szögű forgatás mátrixa:



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cdot\cos\alpha + y\cdot(-\sin\alpha) \\ x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

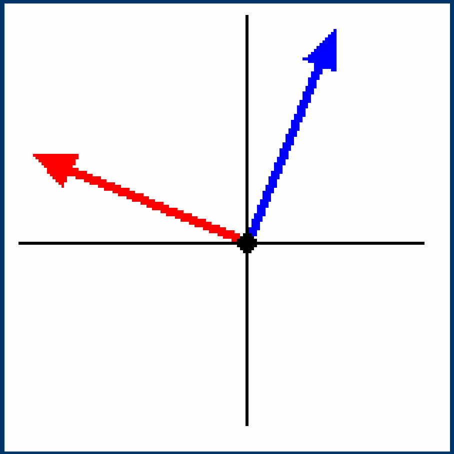
Példa: síkbeli lineáris transzformációk

Az origó körüli 90º-os forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$



A mátrix meghatározása:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineáris függvények sajátértékei, sajátvektorai

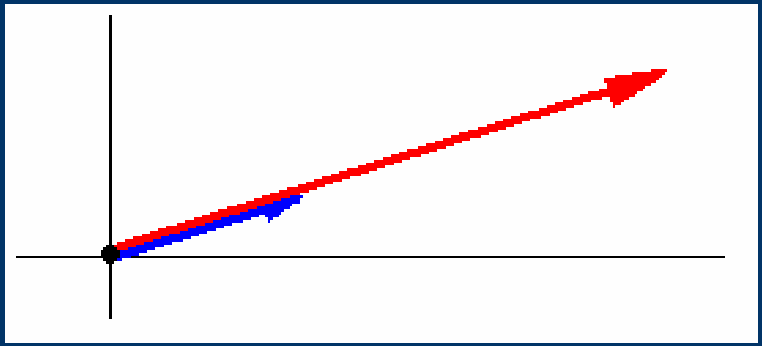
Definíció

Legyen X lineáris tér, $f:X\to X$ lineáris függvény.

Egy $v\in X$, $v\neq 0$ vektort az f függvény sajátvektorának nevezzük, ha létezik olyan $\lambda\in R$, hogy

$$f(v)=\lambda\cdot v$$

λ-t az f sajátértékének nevezzük, és azt mondjuk, hogy a v vektor a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor.



Megjegyzés

Ha az f lineáris függvénynek van sajátértéke, akkor ahhoz végtelen sok sajátvektor tartozik:

Ha a v vektor sajátvektor, akkor minden a v-vel párhuzamos vektorok ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektor.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: karakterisztikus polinom

Legyen X n dimenziós lineáris tér, $f:X \to X$ lineáris függvény, továbbá A legyen az f egy adott bázisra vonatkozóan. Ekkor a

$$P(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A)$$

(n-edfokú, 1 főegyütthatós) polinomot az f karakterisztikus polinomjának nevezzük.

Tétel: a sajátértékek meghatározása

Az $f:X \rightarrow X$ lineáris függvény sajátértékei f karakterisztikus polinomjának zérushelyei.

$$P(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A) = 0$$

Tétel: a sajátvektorok meghatározása

A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat a

$$(\lambda \cdot E - A) \cdot x = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Az egyenletrendszer, minden esetben határozatlan.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Keressük meg annak a lineáris függvénynek sajátértékeit, melynek mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

det(λ·E–A) = 0

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 3 & -5 \\ 2 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$

A sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

A $\lambda = -2$ sajátérték esetén a $(\lambda \cdot E - A) \cdot x = 0$ egyenlet:

$$-2 \cdot E - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

így a

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -4x_1 & & &= 0 \\ -x_1 & -5x_2 & -5x_3 &= 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = -x_3\ ,\ x_3 \in \mathrm{R}\ \text{tetszőleges}$$

Így a λ=-2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \ :\ t \in R,\ t \neq 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ -2t \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}$$

A $\lambda = 2$ sajátérték esetén a $(\lambda \cdot E - A) \cdot x = 0$ egyenlet:

$$2 \cdot E - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

így a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrcl} -x_1 & -x_2 & -5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszert kell megoldani.

NEM NYOMTATÁSRA!

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -\frac{8}{3} \cdot x_3 \qquad x_1 = -\frac{7}{3} \cdot x_3 \qquad x_3 \in \mathrm{R} \text{ tetszőleges}$$

Így a λ=2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\left\{ \begin{pmatrix} (-8/3)\cdot t \\ (-7/3)\cdot t \\ t \end{pmatrix} : \ t \in \mathrm{R},\ t \neq 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-8/3)\cdot t \\ (-7/3)\cdot t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-16/3)\cdot t \\ (-14/3)\cdot t \\ 2t \end{pmatrix} = 2\cdot \begin{pmatrix} (-8/3)\cdot t \\ (-7/3)\cdot t \\ 2t \end{pmatrix}$$

A $\lambda = 4$ sajátérték esetén a $(\lambda \cdot E - A) \cdot x = 0$ egyenlet:

$$4 \cdot E - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

így a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 2x_1 & & & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & = 0 \end{array}$$

egyenletrendszert kell megoldani.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 5x_3\ ,\ x_3 \in \mathrm{R}\ \text{tetszőleges}$$

Így a λ=-2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5t \\ t \end{pmatrix} \ :\ t \in \mathrm{R},\ t \neq 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20t \\ 4t \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5t \\ t \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Sajátérték, sajátvektor szimmetrikus mátrix esetén

Tétel

Ha egy n változós lineáris függvény mátrixa szimmetrikus, akkor a lineáris függvénynek van n db páronként merőleges sajátvektora.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \Downarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \Downarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \Downarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

A sajátvektorokat normálva ortonormált bázist kapunk.

NEM NYOMTATÁSRA!

Bázistranszformáció

1. bázis: $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ $\longrightarrow$ **2. bázis:** $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$

Definíció: a bázistranszformáció mátrixa

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow \\ \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \underline{c}_3 \end{array}$$

$$\underline{c}_1 = t_{11} \cdot \underline{b}_1 + t_{21} \cdot \underline{b}_2 + t_{31} \cdot \underline{b}_3$$

$$\underline{c}_2 = t_{12} \cdot \underline{b}_1 + t_{22} \cdot \underline{b}_2 + t_{32} \cdot \underline{b}_3$$

$$\underline{c}_3 = t_{13} \cdot \underline{b}_1 + t_{23} \cdot \underline{b}_2 + t_{33} \cdot \underline{b}_3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Koordinátatranszformáció

1. bázis: $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ → **2. bázis:** $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$

$$\underline{v} = \beta_1 \cdot \underline{b}_1 + \beta_2 \cdot \underline{b}_2 + \beta_3 \cdot \underline{b}_3$$

$$\underline{v} = \gamma_1 \cdot \underline{c}_1 + \gamma_2 \cdot \underline{c}_2 + \gamma_3 \cdot \underline{c}_3$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Indoklás:

$$\underline{v} = \gamma_1 \cdot \underline{c}_1 + \gamma_2 \cdot \underline{c}_2 + \gamma_3 \cdot \underline{c}_3 =$$

$$= \gamma_1 \cdot (t_{11} \cdot \underline{b}_1 + t_{21} \cdot \underline{b}_2 + t_{31} \cdot \underline{b}_3) + \gamma_2 \cdot (t_{12} \cdot \underline{b}_1 + t_{22} \cdot \underline{b}_2 + t_{32} \cdot \underline{b}_3) + \gamma_3 \cdot (t_{13} \cdot \underline{b}_1 + t_{23} \cdot \underline{b}_2 + t_{33} \cdot \underline{b}_3) =$$

$$= (\gamma_1 \cdot t_{11} + \gamma_2 \cdot t_{12} + \gamma_3 \cdot t_{13}) \cdot \underline{b}_1 + (\gamma_1 \cdot t_{21} + \gamma_2 \cdot t_{22} + \gamma_3 \cdot t_{23}) \cdot \underline{b}_2 + (\gamma_1 \cdot t_{31} + \gamma_2 \cdot t_{32} + \gamma_3 \cdot t_{33}) \cdot \underline{b}_3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Lineáris függvény mátrixának transzformációja

1. bázis: $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$

2. bázis: $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$

$$\underline{v} = \beta_1 \cdot \underline{b}_1 + \beta_2 \cdot \underline{b}_2 + \beta_3 \cdot \underline{b}_3$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \gamma_1 \cdot \underline{c}_1 + \gamma_2 \cdot \underline{c}_2 + \gamma_3 \cdot \underline{c}_3$$

Lineáris függvény

$$\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{pmatrix} = L^B \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Bázistrf.

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{pmatrix} = L^C \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Lineáris függvény

$$\underline{v}' = \beta_1' \cdot \underline{b}_1 + \beta_2' \cdot \underline{b}_2 + \beta_3' \cdot \underline{b}_3$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}' = \gamma_1' \cdot \underline{c}_1 + \gamma_2' \cdot \underline{c}_2 + \gamma_3' \cdot \underline{c}_3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = T\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}\beta'_1\\ \beta'_2\\ \beta'_3\end{pmatrix} = T\cdot\begin{pmatrix}\gamma'_1\\ \gamma'_2\\ \gamma'_3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}\beta'_1\\ \beta'_2\\ \beta'_3\end{pmatrix} = L^B\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}\gamma'_1\\ \gamma'_2\\ \gamma'_3\end{pmatrix} = L^C\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$$

$$L^C = T^{-1}\cdot L^B\cdot T$$

Indoklás:

$$T^{-1}\cdot L^B\cdot T\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix} = T^{-1}\cdot L^B\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\beta'_1\\ \beta'_2\\ \beta'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma'_1\\ \gamma'_2\\ \gamma'_3\end{pmatrix}$$

Példa

$$\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

A lineáris függvény mátrixa

$$L^B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & 2\\-1 & -1 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$L^C = T^{-1} \cdot L^B \cdot T = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & 2\\-1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -2 & -3\\0 & 3 & 1\\4 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\underline{v}=6\cdot\underline{b}_1+2\cdot\underline{b}_2+7\cdot\underline{b}_3$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}=4\cdot\underline{c}_1-\gamma_2\cdot\underline{c}_2+3\cdot\underline{c}_3$$

$$\begin{pmatrix}\beta'_1\\\beta'_2\\\beta'_3\end{pmatrix}=L^B\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma'_1\\\gamma'_2\\\gamma'_3\end{pmatrix}=L^C\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\28\\13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\0&3&1\\4&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\0\\28\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'=13\cdot\underline{b}_1+28\cdot\underline{b}_2+13\cdot\underline{b}_3$$

$$\begin{pmatrix}\beta'_1\\\beta'_2\\\beta'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\28\\13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma'_1\\\gamma'_2\\\gamma'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\0\\28\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'=-15\cdot\underline{c}_1+28\cdot\underline{c}_3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{v} = 6 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 7 \cdot \underline{b}_3 \longrightarrow \underline{v} = 4 \cdot \underline{c}_1 - \gamma_2 \cdot \underline{c}_2 + 3 \cdot \underline{c}_3$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \beta'_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \gamma'_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \beta'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \gamma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}' = 13 \cdot \underline{b}_1 + 28 \cdot \underline{b}_2 + 13 \cdot \underline{b}_3 \longrightarrow \underline{v}' = -15 \cdot \underline{c}_1 + 28 \cdot \underline{c}_3$$

Lineáris függvény mátrixa sajátvektorok alkotta bázisban

Tétel

Ha egy lineáris függvény mátrixa szimmetrikus, akkor a sajátvektorokból álló ortonormált bázisban a lineáris függvény mátrixa diagonális, melyben a főátló elemei a sajátértékek.

Példa

Íjuk fel az A mátrixú lineáris függvényt a sajátvektoraiból képzett ortonormált bázisban!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A sajátértékek és az ezekhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorok:

$\lambda_1 = 2$ ⟶ $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0$ ⟶ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3$ ⟶ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

A sajátvektorokból álló ortonormált bázis:

$$\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}$$

$$T=\begin{pmatrix}0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \qquad T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$L^B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow L^C=T^{-1}\cdot L^B\cdot T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Kvadratikus formák

Definíció

Legyen n pozitív egész szám és $K=(k_{ij})$ egy n-edrendű szimmetrikus mátrix. A

$$Q(\underline{x}) = Q(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_i x_j$$

alakú függvényeket kvadratikus formának nevezzük.

A K mátrix a Q kvadratikus forma mátrixa.

A fenti Q kvadratikus forma felírható tömörebb formában is:

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot K \cdot \underline{x}$$

Példa

$$K=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

A K mátrixhoz tartozó (3 változós) kvadratikus függvény:

$$Q(\underline{x})=Q(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}k_{ij}x_ix_j$$

$$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+1x_1\cdot x_2+3x_1\cdot x_3+$$
$$+1x_2\cdot x_1+2x_2^2-2x_2\cdot x_3+$$
$$+3x_3\cdot x_1-2x_3\cdot x_2+4x_3^2=$$
$$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1\cdot x_2+6x_1\cdot x_3-4x_2\cdot x_3$$

$$Q(\underline{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = \underline{x}^T \cdot K \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Kvadratikus függvény mátrixának transzformációja

Ha a lineáris térben bázistranszformációt hajtunk végre, akkor (ahogyan azt a lineáris függvények esetén is láttuk) a kvadratikus formák mátrixa is megváltozik.

Ha az eredeti bázisban a kvadratikus forma mátrixa K, a bázistranszformáció mátrixa T, akkor a kvadratikus forma mátrixa az új bázisban:

$$T^T \cdot K \cdot T$$

1. bázis: $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ $\xrightarrow{T}$ **2. bázis:** $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$

A kvadratikus forma mátrixa:

K	$T^T \cdot K \cdot T$
$Q(\underline{\beta}) = \underline{\beta}^T \cdot K \cdot \underline{\beta}$	$Q(\underline{\gamma}) = \underline{\gamma}^T \cdot (T^T \cdot K \cdot T) \cdot \underline{\gamma}$

Indoklás: $\underline{\beta}^T \cdot K \cdot \underline{\beta} = (T \cdot \underline{\gamma})^T \cdot K \cdot (T \cdot \underline{\gamma}) = (\underline{\gamma}^T \cdot T^T) \cdot K \cdot (T \cdot \underline{\gamma}) = \underline{\gamma}^T \cdot (T^T \cdot K \cdot T) \cdot \underline{\gamma}$

$$\underline{v} = \beta_1 \cdot \underline{b}_1 + \beta_2 \cdot \underline{b}_2 + \beta_3 \cdot \underline{b}_3$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = T \cdot \underline{\gamma}$$

$$\underline{v} = \gamma_1 \cdot \underline{c}_1 + \gamma_2 \cdot \underline{c}_2 + \gamma_3 \cdot \underline{c}_3$$

Tétel

Ha a K szimmetrikus mátrix a Q kvadratikus forma mátrixa egy bázisban, akkor a Q mátrixa a K sajátvektoraiból álló ortonormált bázisban diagonális, ahol a főátlóban a K sajátértékei szerepelnek, továbbá Q a változók négyzeteinek lineáris kombinációjaként áll elő.

Példa

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A K mátrix által generált kvadratikus függvény:

$$Q(\beta_1, \beta_2) = \beta_1^2 + 4\beta_1\beta_2 + \beta_2^2$$

Írjuk fel a Q kvadratikus formát a K sajátvektoraiból álló ortonormált bázisban!

A K sajátértékei és az ezekhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az alkalmazott bázistranszformáció:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

A kvadratikus forma mátrixa az új bázisban:

$$\mathrm{T}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{K}\cdot\mathrm{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Q}(\gamma_1,\gamma_2)=3\gamma_1^2-\gamma_2^2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A β és a γ koordináták közti összefüggés felhasználásával a Q függvény kétféle előállítása közti kapcsolat:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\beta_1 + \beta_2) \end{pmatrix}$$

$$\beta_1^2 + 4 \cdot \beta_1\beta_2 + \beta_2^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\beta_1 + \beta_2) \right)^2 = 3 \cdot \gamma_1^2 - \gamma_2^2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A fenti gondolatmenet alapján belátható, hogy bármely $Q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus forma esetén vannak olyan $L_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris függvények és olyan $c_i:\in \mathbb{R}$ konstansok (i=1,…,n), hogy

$$Q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot L_i^2(x_1,\ldots,x_n)$$

R^n

(az n dimenziós Euklideszi tér)

Ebben a részben az R^n halmaz néhány olyan további tulajdonságát tekintjük át, melyek nem abból erednek, hogy R^n lineáris tér.

R^n-ben lehet beszélni pl. olyan – eredetileg geometriai indíttatású – fogalmakról, mint az elemek nagysága, távolsága, korlátosság, környezet, sorozat határértéke, skaláris szorzat, merőlegesség.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: norma (nagyság)

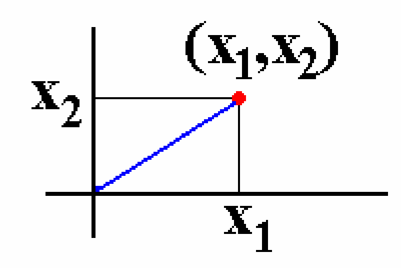
Az $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ elem **normája**:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Speciálisan:

Egy $x = (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ elem normája:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



Egy $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$ elem normája:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a norma tulajdonságai

Minden $x,y \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén fennáll, hogy

- $\| x \| \geq 0$ ($\| x \| = 0 \Leftrightarrow x=0$)
- $\| \lambda \cdot x \| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\| x+y \| \leq \|x\| + \|y\|$

Megjegyzés

Ha egy halmazban értelmezhető az elemek nagysága, akkor beszélhetünk e halmaz részhalmazainak korlátosságáról.

Definíció: R^n részhalmazainak korlátossága

Az $A \subset R^n$ halmaz korlátos, ha van olyan $K \in R$ melyre:

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad \| x \| \le K$$

(vagyis az A-beli elemek nagysága nem nagyobb mint K)

Definíció: R^n-be képező függvények korlátossága

Az $f: A \to R^n$ függvény korlátos, ha az értékkészlete korlátos.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: távolság

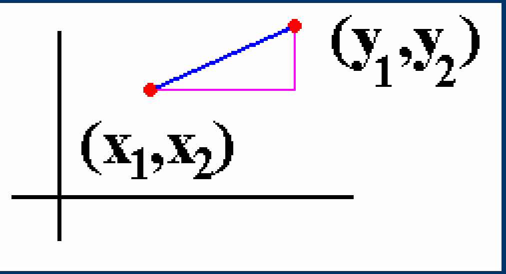
Az $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ és $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R}^n$ elemek távolsága:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Speciálisan:

Az $x = (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ és $y = (y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2$ távolsága:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$



Az $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$ és $y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbf{R}^3$ távolsága:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a távolság tulajdonságai

Tulajdonságok: minden $x,y \in \mathbf{R}^n$ esetén

- $d(x,y) \geq 0$ ($d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$)
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ **(háromszögegyenlőtlenség)**

Megjegyzés

Ha egy halmazban értelmezhető az elemek távolsága, akkor beszélhetünk egy elem környezetéről.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: nyílt környezet

A $P_0 \in \mathbf{R}^n$ pont **r sugarú nyílt környezete** ($r>0$):

$$G(P_0, r) = \{ h \in \mathbf{R}^n \mid d(P_0, h) < r \}$$

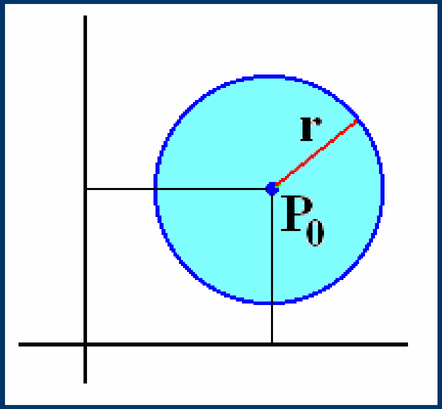
Megjegyzés

A nyílt környezet speciálisan

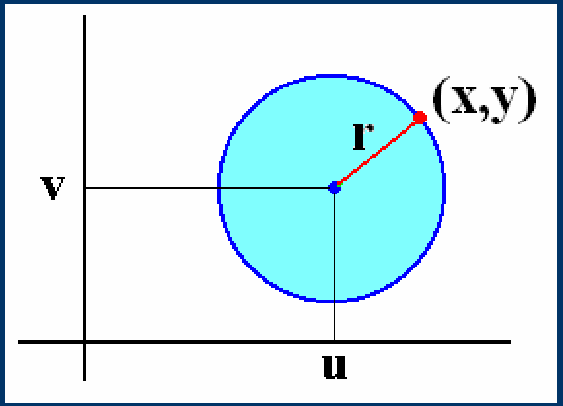
$\mathbf{R}$-ben: $]P_0-r, P_0+r[$ **nyílt intervallum**

$\mathbf{R}^2$-ben: P_0 középpontú, r sugarú **nyílt körlap**

$\mathbf{R}^3$-ban: P_0 középpontú, r sugarú **nyílt gömbtest**



R^2-ben egy elem környezete egy nyílt körlap, így egy R^2-beli $P_0 = (u,v)$ elem r sugarú nyílt környezete felírható az alábbi módon is:

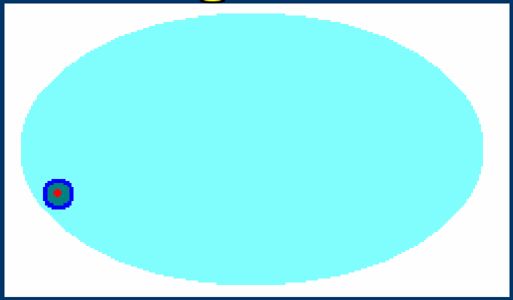


$$G(P,r) = \{ h \in R^2 \mid d(P_0, h) < r \} =$$
$$= \{ (x,y) \in R^2 \mid (x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2 \}$$

A formula hátterében az (u,v) középpontú, r sugarú kör

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

egyenlete áll.



Definíció: belső pont

Egy $P \in A$ pont az $A \subseteq \mathbf{R}^n$ halmaz belső pontja, ha P-nek van olyan nyílt környezete, mely benne van az A halmazban.

Definíció: nyílt halmaz

Egy halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: skaláris szorzás

Az $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ és $\underline{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R}^n$, vektorok skaláris (vagy belső) szorzata:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n \in \mathbf{R}$$

Definíció: merőlegesség

Az $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ és az $\underline{y} \in \mathbf{R}^n$ elemeket **merőleges**nek nevezzük, ha

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$$

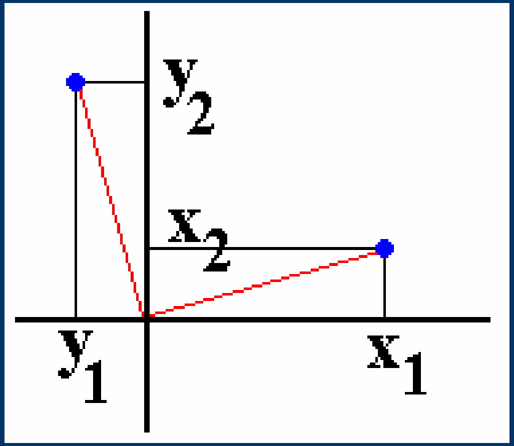
Skaláris szorzás R^2-ben

Az $\underline{x} = (x_1,x_2) \in \mathrm{R}^2$ és $\underline{y} = (y_1,y_2) \in \mathrm{R}^2$ elemek skaláris szorzata:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2$$

Az $x = (x_1,x_2) \in \mathrm{R}^2$ és $y=(y_1,y_2) \in \mathrm{R}^2$ elemek pontosan akkor merőlegesek, ha

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 = 0$$



Skaláris szorzás R^3-ban

Az $\underline{x}=(x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$ és az $\underline{y}=(y_1,y_2,y_3)\in \mathbf{R}^3$ elemek skaláris szorzata:

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Példa

Ha $\underline{x} = (2,5,-1)$, $\underline{y} = (4,-3,7)$, akkor:

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = 2\cdot4 + 5\cdot(-3) + (-1)\cdot7 = -14$$

Példa

Az $\underline{x} = (2,1,-1)$ és az $\underline{y} = (4,-3,5)$ elemek merőlegesek, mert

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = 2\cdot4 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot5 = 0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a skaláris szorzás tulajdonságai

Ha $\underline{x},\underline{y}\in \mathbf{R}^n$, $\lambda\in \mathbf{R}$, akkor

- $\underline{x}\cdot\underline{x}\geq 0$
- $\underline{x}\cdot\underline{x}=0 \Leftrightarrow \underline{x}=\underline{0}$
- $(\underline{x}+\underline{y})\cdot\underline{z}=\underline{x}\cdot\underline{z}+\underline{y}\cdot\underline{z}$
- $(\lambda\underline{x})\cdot\underline{y}=\lambda(\underline{x}\cdot\underline{y})$
- $\underline{x}\cdot\underline{y}=\underline{y}\cdot\underline{x}$