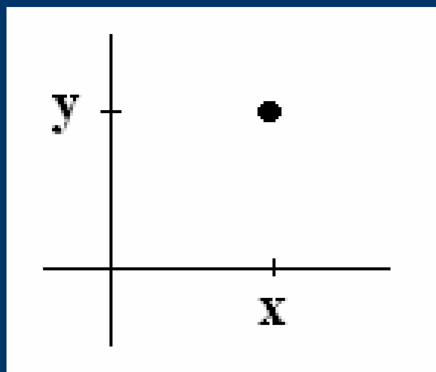
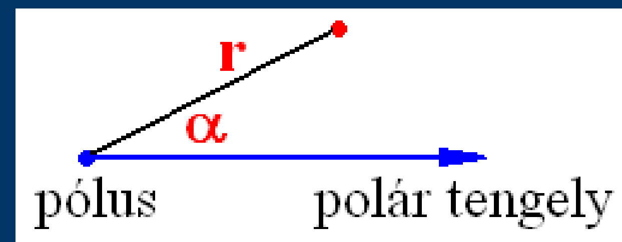
Két gyakran alkalmazott síkbeli koordinátarendszer

Derékszögű (Descartes féle) koordinátarendszer



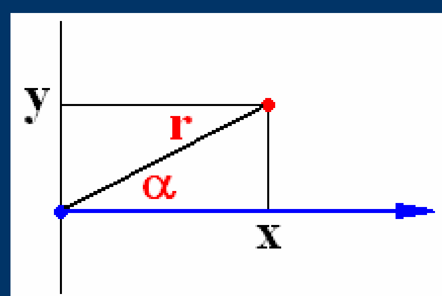
Síkbeli polár koordinátarendszer



Kapcsolat a derékszögű és a polár koordináták között:

$$x = r \cdot \cos\alpha$$

$$y = r \cdot \sin\alpha$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

Síkbeli ponthalmazok (görbék) előállításai

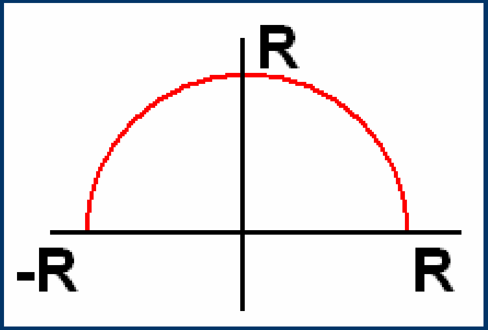
	Explicit (nyílt) előállítás	**Implicit** (burkolt) előállítás
Derékszögű koordinátákkal	$x \to y(x)$ *($R \to R$ függvénnyel való előállítás)* $t \to (\ x(t), y(t)\ )$ *($R \to R^2$ függvénnyel való előállítás, melyet szokás „paraméteres” előállításnak is nevezni)*	$f\ (\ x, y(x)\ ) = 0$
Síkbeli polár koordinátákkal	$\varphi \to r(\varphi)$ $t \to (\ r(t), \varphi(t)\ )$	$f\ (\ \varphi, r(\varphi)\ ) = 0$

Példa: origó középpontú, R sugarú kör előállításai

Explicit (nyílt) előállítás derékszögű koordinátarendszerben
R→R típusú függvénnyel

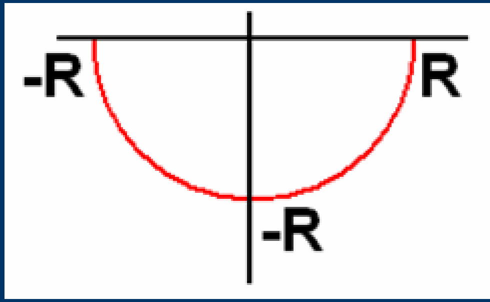
$$y(x)=\sqrt{R^2-x^2}, \quad x\in[-R,R]$$

(„felső" félkör)



$$y(x)=-\sqrt{R^2-x^2}, \quad x\in[-R,R]$$

(„alsó" félkör)

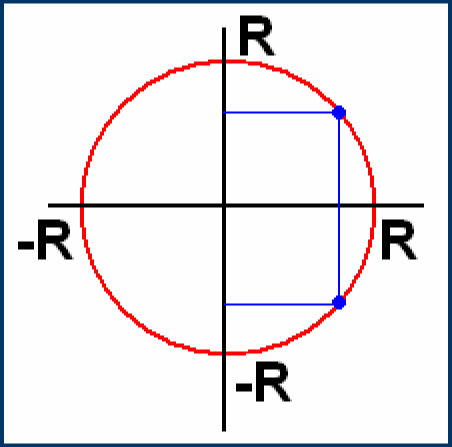


NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: origó középpontú, R sugarú kör előállításai

Implicit (burkolt) előállítás derékszögű koordinátarendszerben

$$x^2 + y(x)^2 = R^2$$

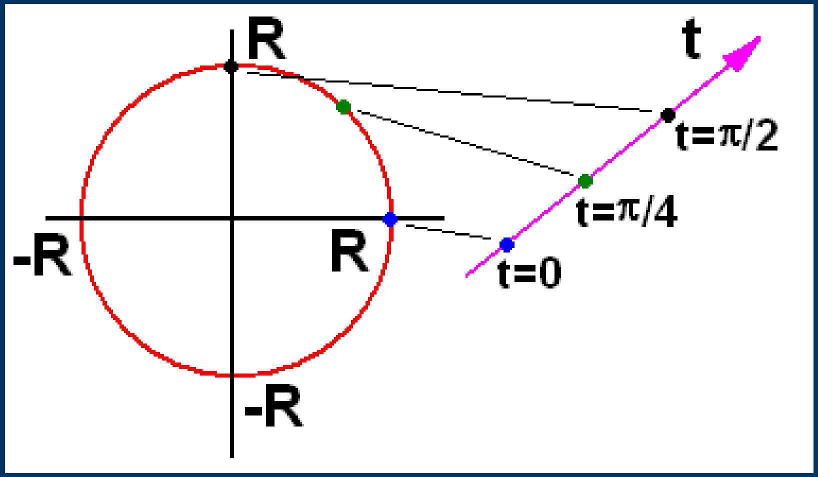


NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: origó középpontú, R sugarú kör előállításai

Explicit (nyílt) előállítás derékszögű koordinátarendszerben $R \to R^2$ típusú függvénnyel *(„paraméteres előállítás”)*

$$t \to (R \cdot \cos t, R \cdot \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$$



avagy:

$$x(t) = R \cdot \cos t$$
$$y(t) = R \cdot \sin t$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

$$0 \to (R \cdot \cos 0, R \cdot \sin 0) = (R, 0)$$

$$\frac{\pi}{4} \to \left(R \cdot \cos\frac{\pi}{4}, R \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}} \right)$$

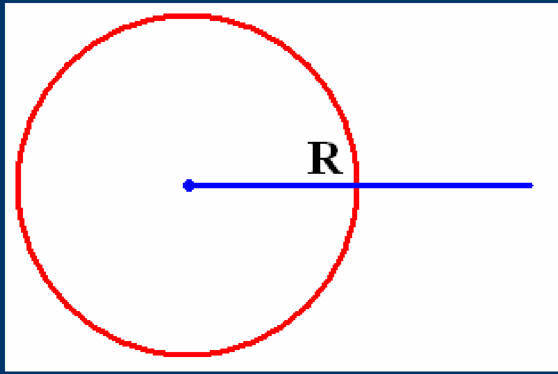
$$\frac{\pi}{2} \to \left(R \cdot \cos\frac{\pi}{2}, R \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right) = (0, R)$$

Példa: origó középpontú, R sugarú kör előállításai

Explicit (nyílt) előállítás polár koordinátarendszerben
R→R típusú függvénnyel

$$r(\varphi) = R,\ \varphi \in [0,2\pi]$$

(konstans függvény)



Implicit előállítás polár koordinátarendszerben

$$r(\varphi) - R = 0,\ \varphi \in [0,2\pi]$$

Példa: origó középpontú, R sugarú kör előállításai

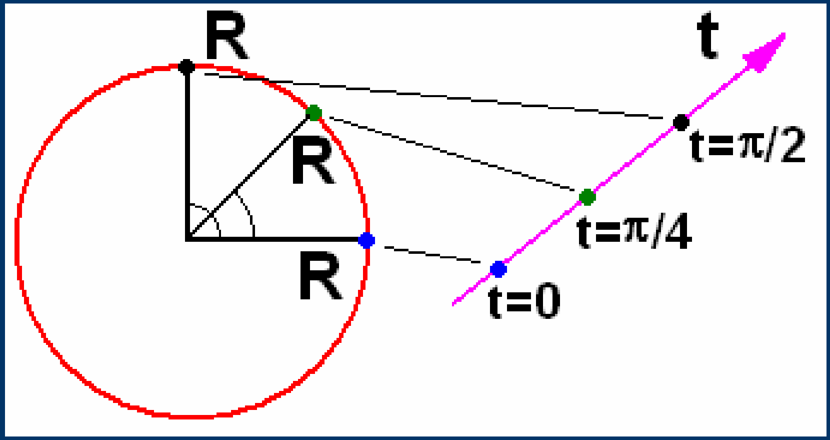
Explicit (nyílt) előállítás polár koordinátarendszerben
$R \to R^2$ típusú függvénnyel *(„paraméteres előállítás”)*

$$t \to (R,t), \quad t \in [0,2\pi]$$

avagy:

$$r(t) = R$$
$$\varphi(t) = t$$

$$t \in [0,2\pi]$$



$$0 \to (R,0) \qquad \frac{\pi}{4} \to \left(R, \frac{\pi}{4}\right) \qquad \frac{\pi}{2} \to \left(R, \frac{\pi}{2}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

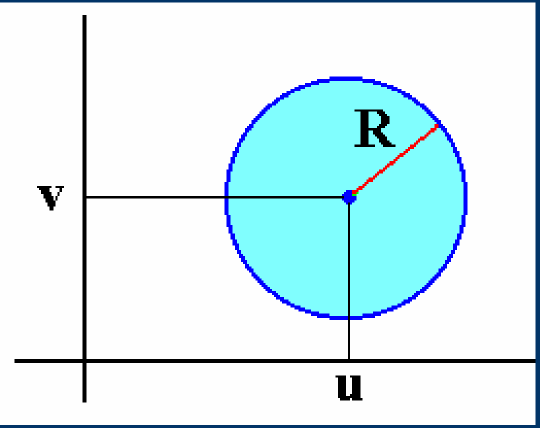
Példa: (u,v) középpontú, R sugarú kör

Explicit („paraméteres”) előállítás derékszögű koordinátarendszerben:

$$x(t) = u + R \cdot \cos t$$

$$y(t) = v + R \cdot \sin t$$

$$t \in [0, 2\pi]$$



Implicit előállítás derékszögű koordinátarendszerben:

$$(x - u)^2 + (y(x) - v)^2 = R^2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

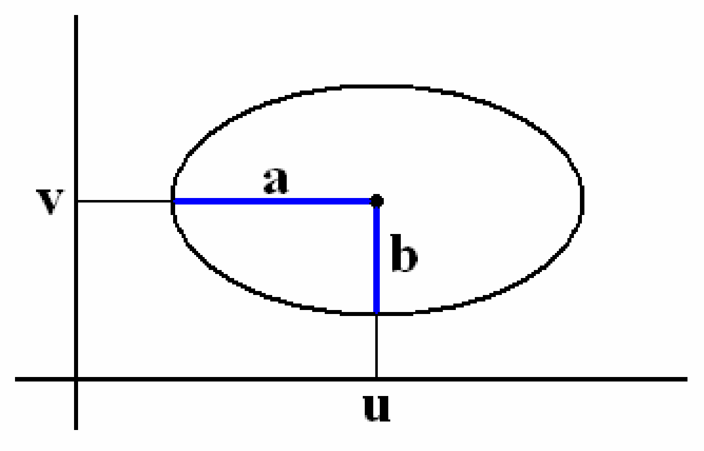
Példa: (u,v) középpontú, a és b féltengelyű ellipszis

„Paraméteres”, explicit előállítás derékszögű koordinátarendszerben:

$$x(t) = u + a \cdot \cos t$$

$$y(t) = v + b \cdot \sin t$$

$$t \in [0, 2\pi]$$



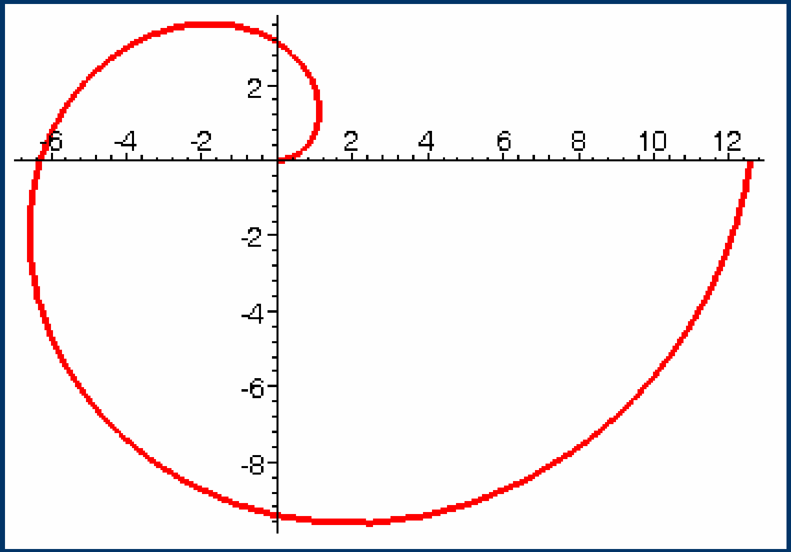
Implicit előállítás derékszögű koordinátarendszerben:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Példa: archimedeszi spirális

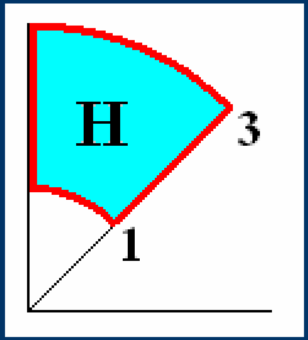
$$\mathbf{r}(\varphi) = a\cdot\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$\mathbf{r}(\varphi) = 2\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi]$$



Példa

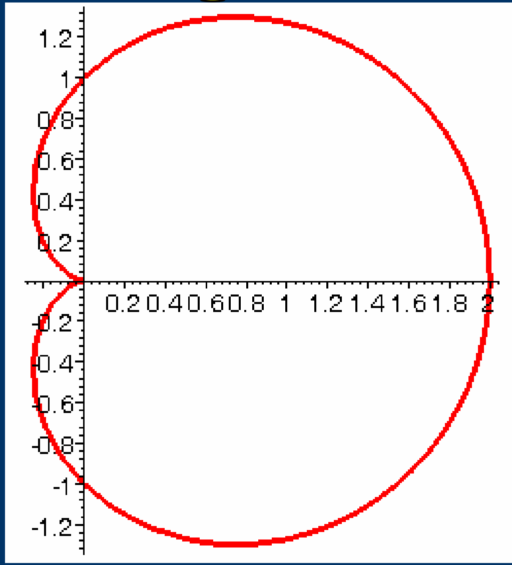
$$\mathbf{H} = \{\ (\mathbf{r},\varphi)\ |\ \mathbf{1} \le \mathbf{r} \le \mathbf{3}\ ,\ \pi/\mathbf{4} \le \varphi \le \pi/\mathbf{2}\ \}$$



Példa: szívgörbe (kardioid)

$$r(\varphi)=a\cdot(1+\cos\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$r(\varphi)=1+\cos\varphi,\quad \varphi\in[0,2\pi]$$



Példa: ciklois

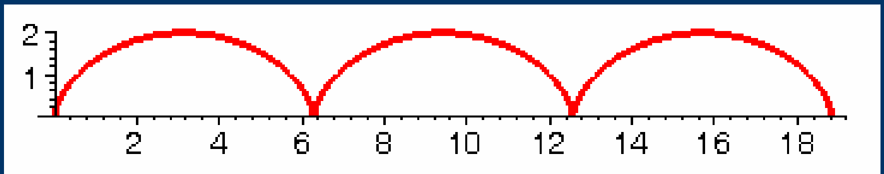
$$x(t) = a\cdot(t-b\cdot\sin t)$$
$$y(t) = a\cdot(1-b\cdot\cos t)$$

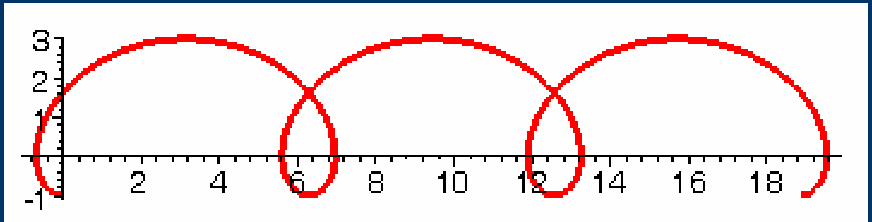
$$x(t) = t-\sin t$$
$$y(t) = 1-\cos t$$

$t\in[0,6\pi]$

$$x(t) = t-2\sin t$$
$$y(t) = 1-2\cos t$$

$t\in[0,6\pi]$

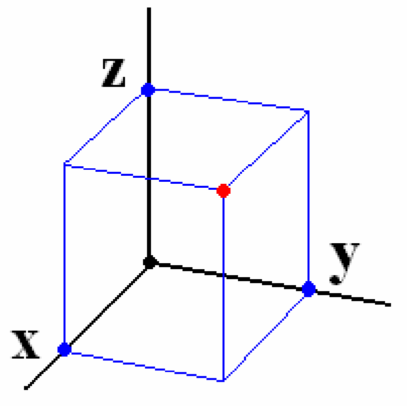




Néhány térbeli koordinátarendszer

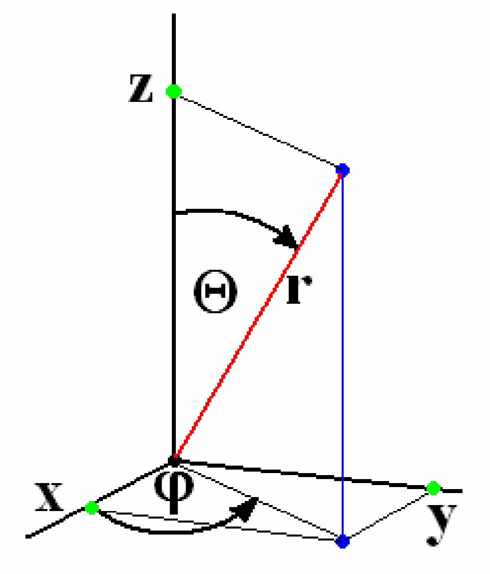
Derékszögű (Descartes féle) koordinátarendszer

x, y, z



Térbeli (gömbi) polár koordinátarendszer

r, φ, Θ



Kapcsolat a derékszögű és a polár koordináták között:

$$x = r \cdot \sin\Theta \cdot \cos\varphi$$

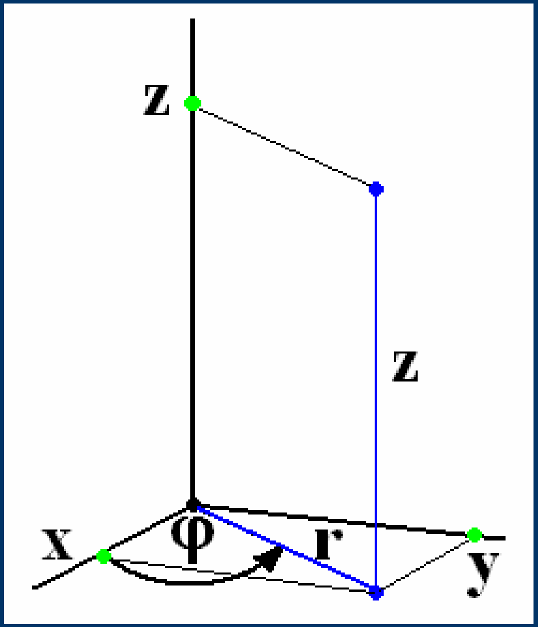
$$y = r \cdot \sin\Theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\Theta$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Henger koordinátarendszer

r, φ, z



Kapcsolat a derékszögű és a henger koordináták között:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$z = z$$

Térgörbék előállításai

	Explicit (nyílt) előállítás
Derékszögű koordinátákkal	$t \to (x(t) , y(t) , z(t))$
Gömbi polár koordinátákkal	$t\to (r(t), \varphi(t), \Theta(t))$
Henger koordinátákkal	$t\to (r(t), \varphi(t), z(t))$

(mindhárom esetben $R\to R^3$ függvénnyel való előállításról van szó, melyet szokás „paraméteres” előállításnak is nevezni)

Megjegyzés

Térgörbék előállíthatók még két felület metszeteként is.

NEM NYOMTATÁSRA!

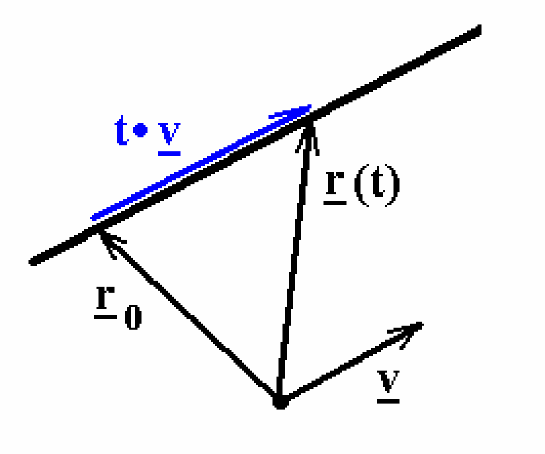
Példa: egyenes előállítása derékszögű koordinátarendszerben

Az $\underline{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő, $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ irányvektorú egyenes előállítása:

$$t \rightarrow (x_0+v_1 \cdot t\ ,\ y_0+v_2 \cdot t\ ,\ z_0+v_3 \cdot t),\quad t \in R$$

avagy:

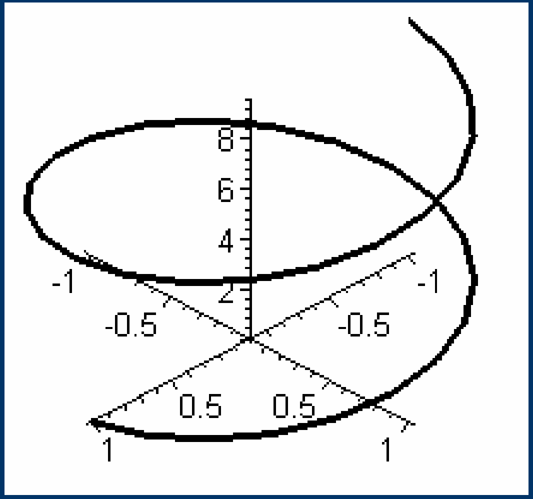
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_1 \cdot t \\ y(t) &= y_0 + v_2 \cdot t \qquad t \in R \\ z(t) &= z_0 + v_3 \cdot t \end{aligned}$$



Példa

Az $$\begin{aligned} r(t) &= R \\ \varphi(t) &= t \\ z(t) &= t \end{aligned}$$ röviden $t \to (R, t, t)$ függvény a henger

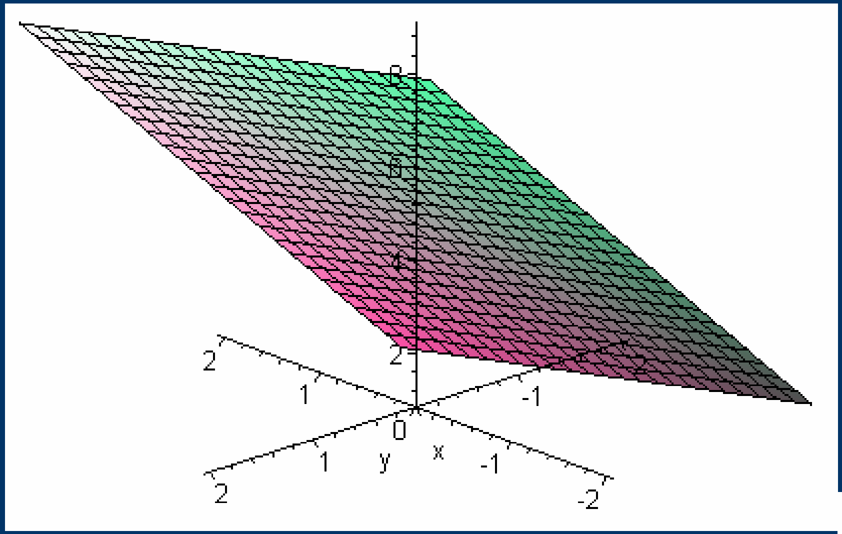
koordinátarendszerben egy térbeli spirálist ad, melynek (konstans) R a „sugara”, 1 radián a „forgási sebessége” és 1 az „emelkedési sebessége”:



Felületek előállításai

	Explicit (nyílt) előállítás	**Implicit** (burkolt) előállítás
Derékszögű koordinátákkal	$(x,y) \to z(x,y)$ *($R^2 \to R$ függvénnyel való előállítás)*	$f(x,y,z) = 0$
	$(u,v) \to (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ *($R^2 \to R^3$ függvénnyel való előállítás, melyet szokás „paraméteres” előállításnak is nevezni)*	
Gömbi polár koordinátákkal	$(\varphi,\Theta) \to r(\varphi,\Theta)$	$f(r,\varphi,\Theta) = 0$
	$(u,v) \to (r(u,v), \varphi(u,v), \Theta(u,v))$	

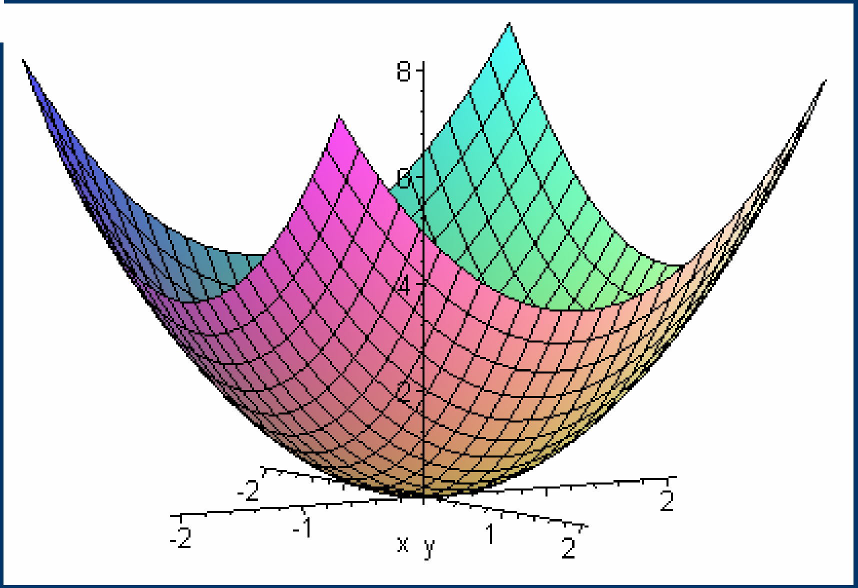
Példa: sík előállítása derékszögű koordinátarendszerben $R^2 \to R$ függvénnyel



$$z(x,y) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot y + c_3$$

Példa: forgási paraboloid

$$z(x,y) = x^2 + y^2$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: sík előállítása derékszögű koordinátarendszerben $R^2 \rightarrow R^3$ függvénnyel

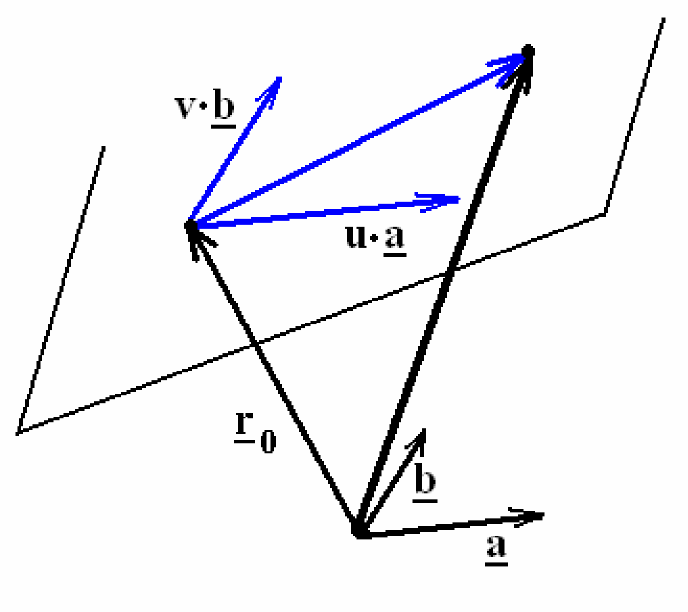
Az $\underline{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő, a $\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ és a $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vektorokkal párhuzamos sík előállítása:

$$(u,v)\rightarrow(x_0+a_1\cdot u+b_1\cdot v,\ y_0+a_2\cdot u+b_2\cdot v,\ z_0+a_3\cdot u+b_3\cdot v),\ (u,v)\in R^2$$

avagy:

$$x(u,v)=x_0+a_1\cdot u+b_1\cdot v$$
$$y(u,v)=y_0+a_2\cdot u+b_2\cdot v$$
$$z(u,v)=z_0+a_3\cdot u+b_3\cdot v$$

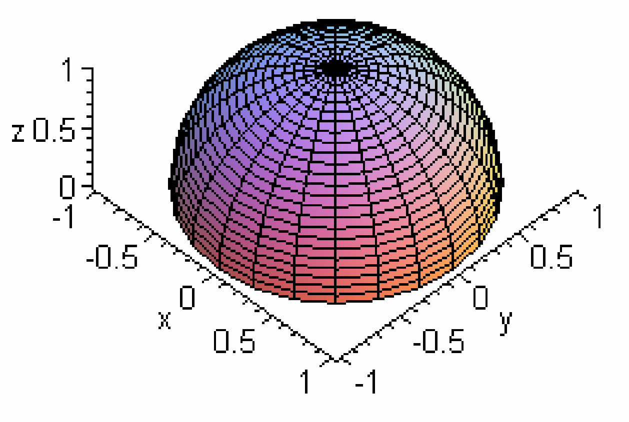
$$(t,s)\in R^2$$

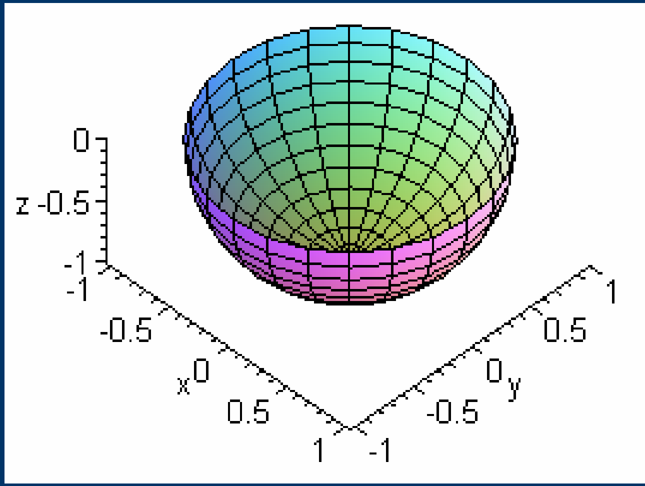


Példa: origó középpontú gömb explicit előállítása derékszögű koordinátarendszerben $R^2 \to R$ függvénnyel

$$z(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \le R^2$$

(a „felső” félgömb)



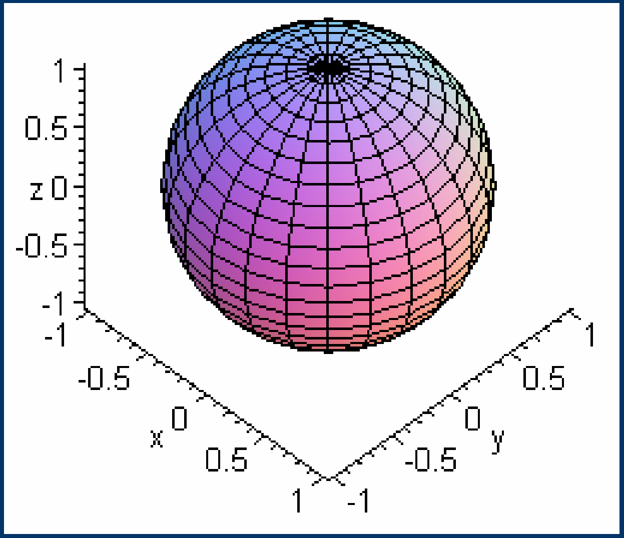


$$z(x,y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \le R^2$$

(az „alsó” félgömb)

Példa: origó középpontú, R sugarú gömb implicit előállítása derékszögű koordinátarendszerben

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



Példa: az (x_0,y_0,z_0) középpontú, R sugarú gömb implicit előállítása derékszögű koordinátarendszerben

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: az (x_0,y_0,z_0) középpontú, R sugarú gömb explicit előállítása derékszögű koordinátarendszerben $R^2 \rightarrow R^3$ függvénnyel

Az $\underline{r}_0$=(x_0,y_0,z_0) középpontú, R sugarú gömb előállítása:

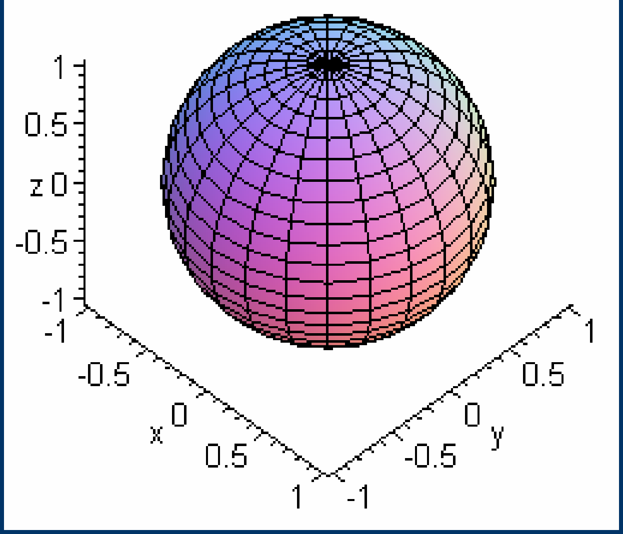
$$(u,v)\rightarrow(x_0+R\cdot\cos u\cdot\sin v,\ y_0+R\cdot\sin u\cdot\sin v,\ z_0+R\cdot\cos v)$$

$$u\in[0,2\pi],\ u\in[0,\pi]$$

avagy:

$$x(u,v)=x_0+R\cdot\cos u\cdot\sin v$$
$$y(u,v)=y_0+R\cdot\sin u\cdot\sin v$$
$$z(u,v)=z_0+R\cdot\cos v$$

$$u\in[0,2\pi],\ u\in[0,\pi]$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: origó középpontú, R sugarú gömb explicit előállítása gömbi polár koordinátarendszerben

$(\varphi,\Theta)\rightarrow r(\varphi,\Theta)$ típusú függvénnyel:

$$r(\varphi,\Theta) = R \qquad \varphi\in[0,2\pi],\ \Theta\in[0,\pi]$$

$(u,v)\rightarrow(r(u,v),\ \varphi(u,v),\ \Theta(u,v))$ típusú függvénnyel:

$$r(u,v) = R$$
$$\varphi(u,v) = u$$
$$\Theta(u,v) = v$$

$$\varphi\in[0,2\pi],\ \Theta\in[0,\pi]$$