

Egyváltozós függvények Riemann integrálja (határozott integrál)

Definíció: zárt intervallum beosztása

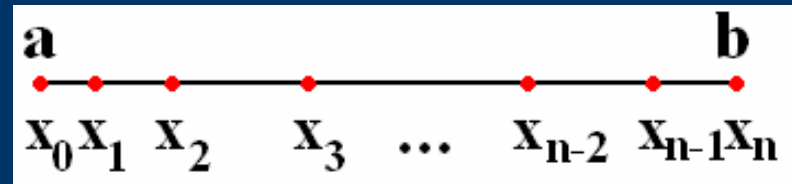
Ha $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, akkor a

$$d = \{ [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n] \}$$

intervallumhalmazt az $[a, b]$ intervallum **beosztásának** nevezzük.

x_0, \dots, x_n : **osztópontok**

d elemei: **részintervallumok**



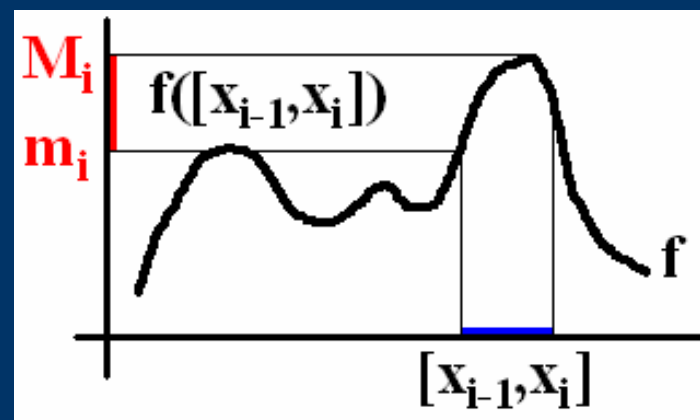
Jelölés

$D[a, b]$: az $[a, b]$ beosztásainak halmaza

Ha $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ korlátos függvény, $\mathbf{d} = \{ [x_{i-1}, x_i] \mid i=1,\dots,n \}$ az $[a,b]$ intervallum egy beosztása, akkor vezessük be a következő jelöléseket ($i=1,\dots,n$) :

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

$$M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$$



Megjegyzés

Amennyiben az f függvény **folytonos** az $[a,b]$ intervallumon, akkor a m_i és a M_i értékek az f -nek az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon felvett legkisebb ill. a legnagyobb értékével egyeznek meg.

Ha csak korlátosságot feltételezünk, akkor a m_i és a M_i értékek nem feltétlenül elemei az f értékkészletének.

Definíció: alsó és felső integrálközelítő összeg

Ha $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ korlátos függvény,

$d = \{ [x_{i-1}, x_i] \mid i=1, \dots, n \}$ az $[a,b]$ egy beosztása, akkor az

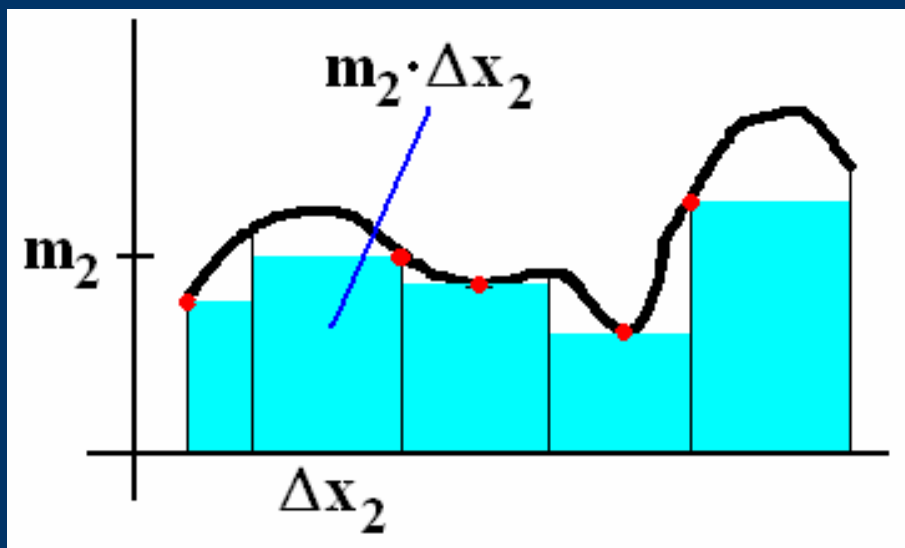
$$s(f, d) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$S(f, d) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

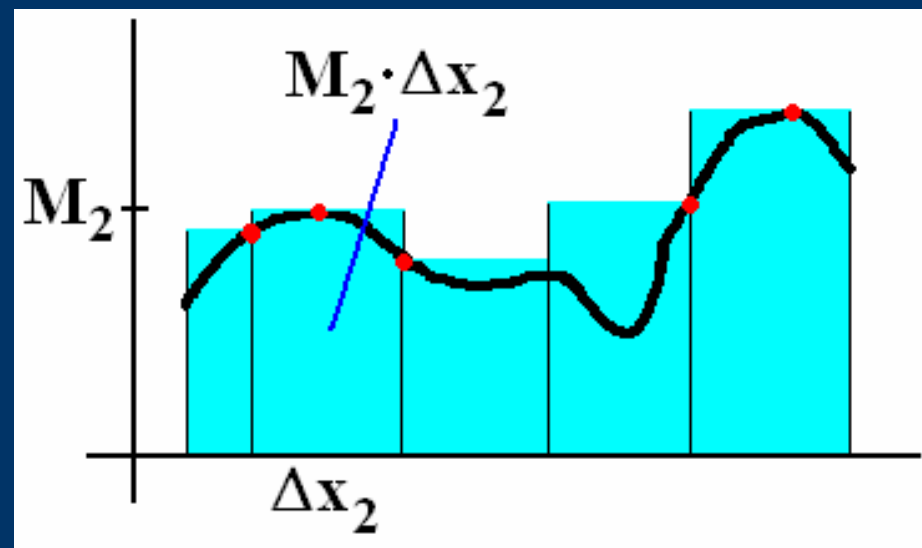
összegeket az f függvény d beosztáshoz tartozó **alsó** ill. **felső integrálközelítő összegének** nevezzük.

Az alsó és a felső integrálközelítő összegek geometriai jelentése

$s(f,d)$



$S(f,d)$



Speciálisan: egy integrálközelítő összeg pozitív függvény esetén téglalapok területeinek összegével egyenlő.

Az alsó és a felső integrálközelítő összegek viszonya

Ha $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, d_1 és d_2 az $[a,b]$ intervallum két tetszőleges beosztása, akkor

$$s(f, d_1) \leq S(f, d_2)$$

vagyis bármely alsó integrálközelítő összegnél bármely felső integrálközelítő összeg nagyobb vagy egyenlő.

Következmény

Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos.

A felső integrálközelítő összegek halmaza alulról korlátos.



az alsó integrálközelítő
összegek halmaza

a felső integrálközelítő
összegek halmaza

Definíció: alsó integrál

Az $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ korlátos függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény **alsó integráljának** nevezzük.

(Ez az érték valós szám az előző következmény miatt.)

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sup_{d \in D[a,b]} s(f, d)$$



Definíció: **felső integrál**

Az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ korlátos függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény **felső integráljának** nevezzük.

(Ez az érték valós szám az előző következmény miatt.)

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \inf_{d \in D[a,b]} S(f, d)$$



Megjegyzés

A definíciók alapján belátható, hogy



$$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

Definíció: integrál

Ha az $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén

$$\int_a^b f = \int_a^b f$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **integrálható** az $[a,b]$ intervallumon.

Az alsó és a felső integrálok közös értékét az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett **integráljának** nevezzük.



Jelölések

$$\int_a^b f = \int_a^{\underline{b}} f = \int_a^{\overline{b}} f$$

amennyiben a függvény változójára is utalni akarunk:

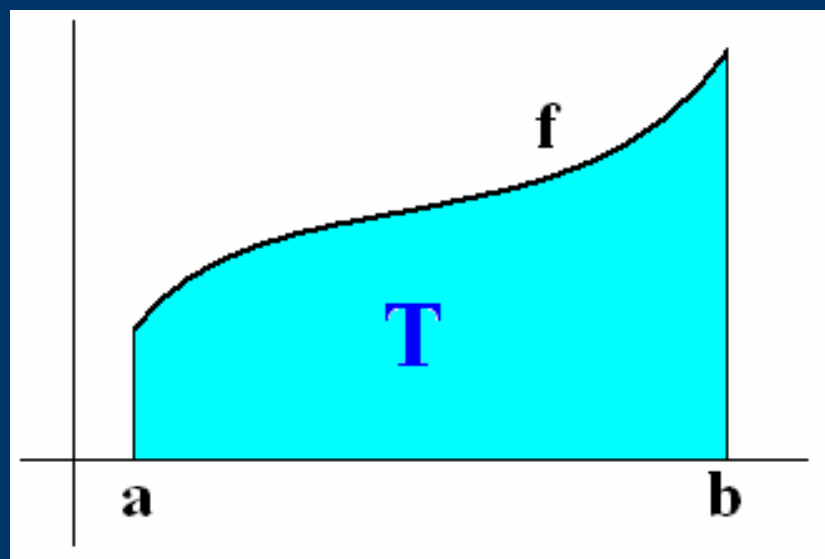
$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^b f(u) du$$

Az integrál geometriai jelentése

Nem negatív integrálható függvény integrálja a **függvény alatti területtel** egyenlő



$$T = \int_a^b f$$

Az integrál néhány előfordulása a fizikában

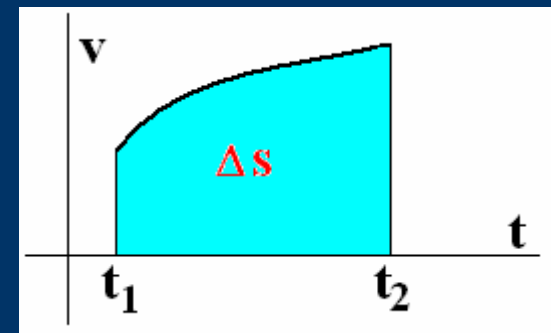
Az elmozdulás kiszámítása a sebesség-idő függvényből:

Állandó nagyságú sebesség esetén:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

Változó nagyságú sebesség esetén:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$



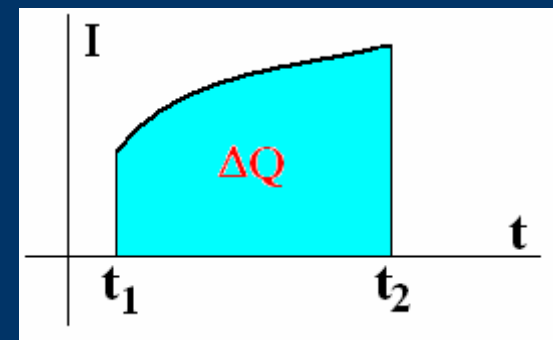
Az átáramlott töltés kiszámítása az áramerősség-idő függvényből:

Állandó nagyságú áramerősség esetén:

$$\Delta Q = I \cdot \Delta t$$

Változó nagyságú áramerősség esetén:

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$$



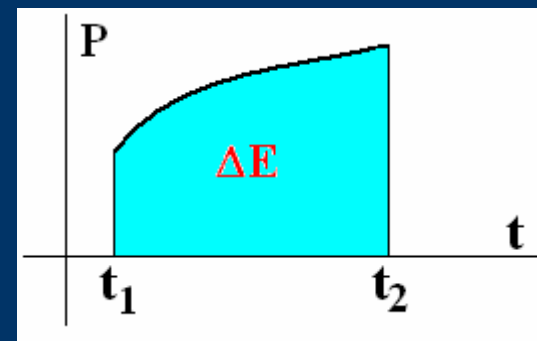
Az energiaváltozás kiszámítása a teljesítmény-idő függvényből:

Állandó nagyságú teljesítmény esetén:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t$$

Változó nagyságú teljesítmény esetén:

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

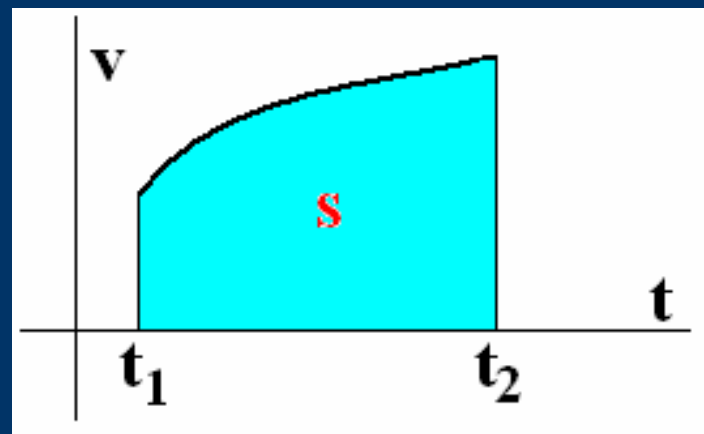


Az integrál néhány fizikai és geometriai alkalmazása

A differenciálszámítás részben láttuk, hogy egy mennyiségnek egy másik mennyiségre vonatkozó változási gyorsasága differenciálással számítható. Ha a változási gyorsaságából akarjuk visszakapni az eredeti mennyiséget, akkor integrálni kell.

Ha például ismert egy egyenes pályán mozgó pont sebessége a $[t_1, t_2]$ időintervallumban, akkor **a pont elmozdulása a $[t_1, t_2]$ időtartam alatt:**

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$



Az integrál fogalmának két kiegészítése

Ha az f függvény értelmezve van az a helyen, akkor f integrálható az $[a,a]$ intervallumon és

$$\int_a^a f = 0$$

Ha $a < b$ és az f függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor

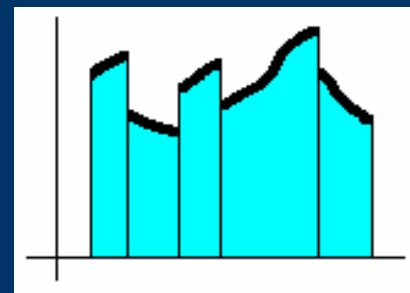
$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

Integrálható függvények

Mivel az alkalmazásokban használt függvények általában folytonosak, vagy szakaszonként folytonosak, igen fontos tény a következő:

Tétel: a Riemann integrálhatóság egy elegendő feltétele

Ha $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ korlátos függvény **szakadási helyeinek halmaza legfeljebb megszámlálható végtelen számosságú**, akkor f integrálható.



Speciálisan: az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos függvények ill. a véges sok szakadási helyel rendelkező korlátos függvények mind integrálhatók.

Az integrál néhány tulajdonsága

Tétel: összegfüggvény integrálja

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ függvények integrálhatóak, akkor az $f+g$ függvény is integrálható és

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Tétel: függvény konstansszorosának integrálja

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ függvény integrálható és $c\in\mathbf{R}$, akkor a $c\cdot f$ függvény is integrálható és

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f$$

Tétel: szorzatfüggvény integrálhatósága

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ függvények integrálhatók, akkor az $f\cdot g$ függvény is integrálható.

Tétel: függvény abszolút értékének integrálhatósága

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ függvény integrálható, akkor az $|f|$ függvény is integrálható és

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

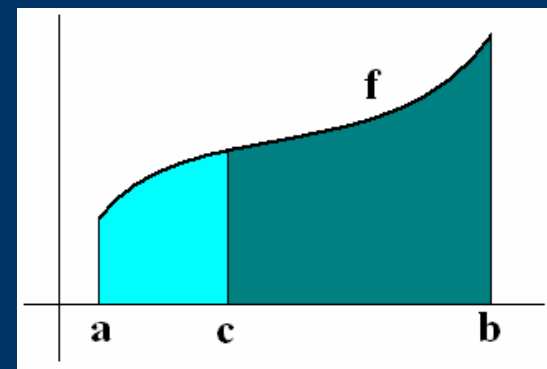
Tétel: hányadosfüggvény integrálhatósága

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ függvények integrálhatók, $0 < c \in \mathbf{R}$ és $g(x) \geq c$, ha $x \in [a,b]$, akkor az f/g függvény is integrálható.

Tétel: az integrál additivitása

Ha $c \in [a, b]$ és az $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény integrálható az $[a, c]$ és a $[c, b]$ intervallumokon, akkor integrálható az $[a, b]$ intervallumon is és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$



Az állítás általánosítható arra az esetre is, amikor az $[a, b]$ intervallum véges sok páronként diszjunkt intervallum uniójaként áll elő.

Tétel

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ függvény integrálható, akkor integrálható bármely $[c,d] \subseteq [a,b]$ részintervallumon is.

Tétel: az integrál monotonitása

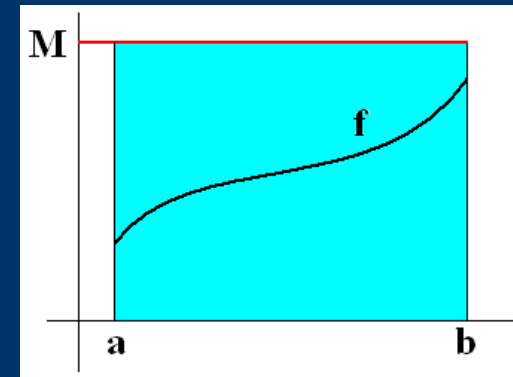
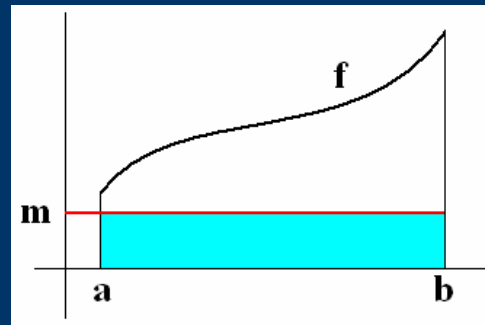
Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ függvények integrálhatók, és $f(x) \leq g(x)$, ha $x \in [a,b]$, akkor

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Tétel: közéérték tétel

Ha az $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható, $m, M \in \mathbb{R}$ és $m \leq f(x) \leq M$, ha $x \in [a,b]$, akkor

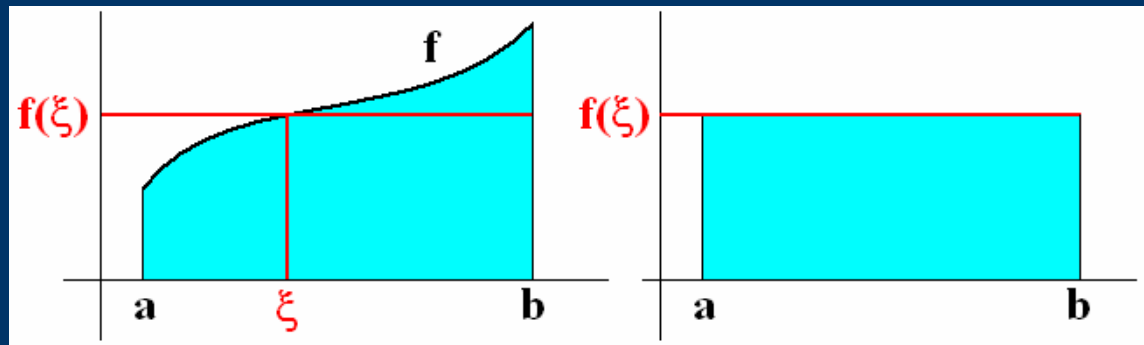
$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$



Következmény

Ha az $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonos**, akkor létezik olyan $\xi \in]a,b[$, melyre

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

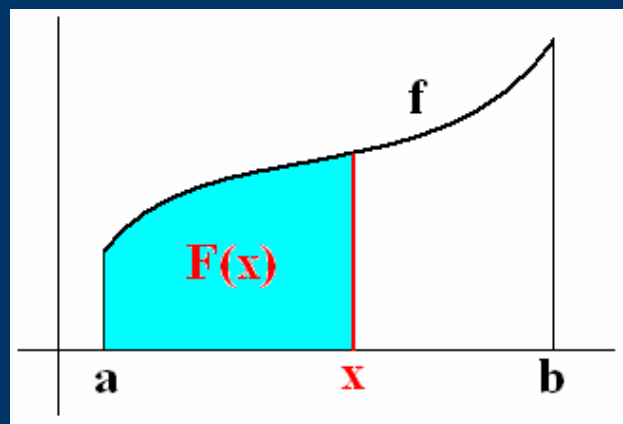


Definíció: **integrálfüggvény**

Ha az $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható, akkor az

$$F(x) = \int_a^x f \quad , \quad x \in [a, b]$$

függvényt az f **integrálfüggvény**ének nevezzük.



Tétel: integrálfüggvény tulajdonságai

Legyen az $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ függvény integrálható, és legyen F a f integrálfüggvénye. Ekkor

- F folytonos
- ha f folytonos egy $x_0\in[a,b]$ helyen, akkor az F differenciálható x_0 -ban és $F'(x_0) = f(x_0)$.

Az integrálfüggvény igen fontos az alábbi következmény miatt:

Következmény

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

Az integrál kiszámítása

Tétel: **Newton-Leibniz formula**

Ha az $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ és az $F:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre fennáll, hogy

- f integrálható
- F folytonos az $[a,b]$ intervallumon
- F differenciálható az $]a,b[$ intervallumon
- $F'(x) = f(x)$, ha $x \in]a,b[$

akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

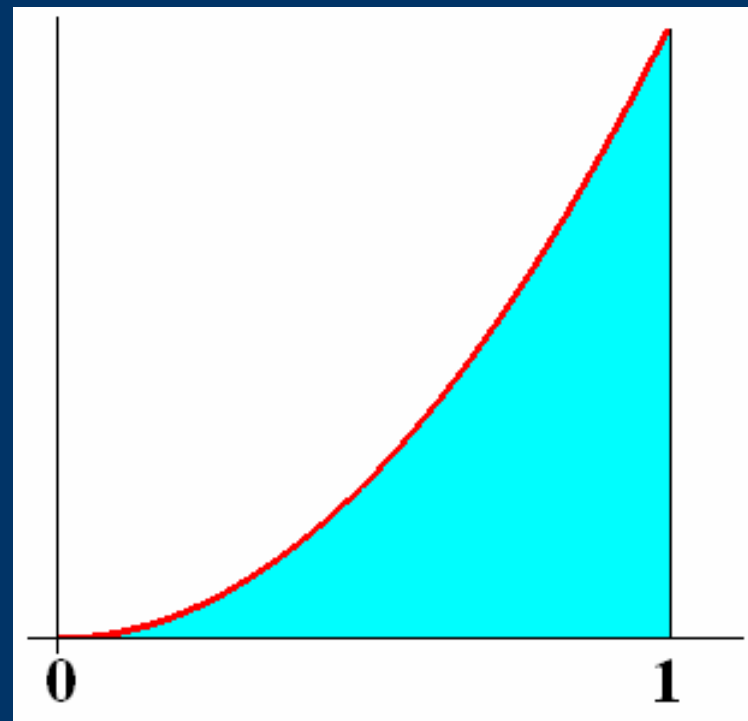
Példa

$$\int_0^1 x^2 dx = ?$$

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$



Példa

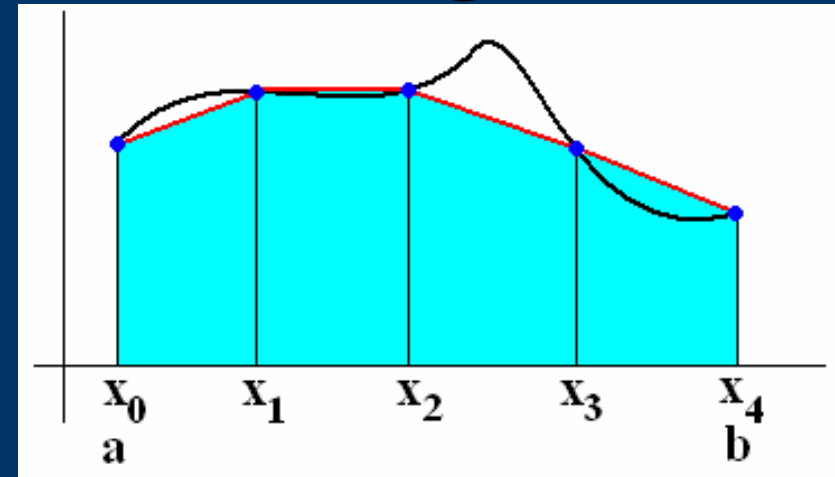
Egy harmonikus rezgést végző pont sebessége az idő függvényében:
 $v(t) = 5\cos(2t+3)$.

Mennyi a pont elmozdulása a $[4,5]$ időintervallumban?

$$s = \int_4^5 5 \cos(2t + 3) dt = \frac{5}{2} \cdot [\sin(2t + 3)]_4^5 = 3,55$$

Az integrál közelítő
kiszámítása

Trapéz formula



Az $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény esetén osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot az x_0, x_1, \dots, x_n osztópontokkal n db egyenlő hosszúságú intervallumra és kössük össze az osztópontokhoz tartozó függvénypontokat egyenes szakaszokkal. Az f integrálját a töröttvonal integráljával közelítve a következő formula adódik:

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

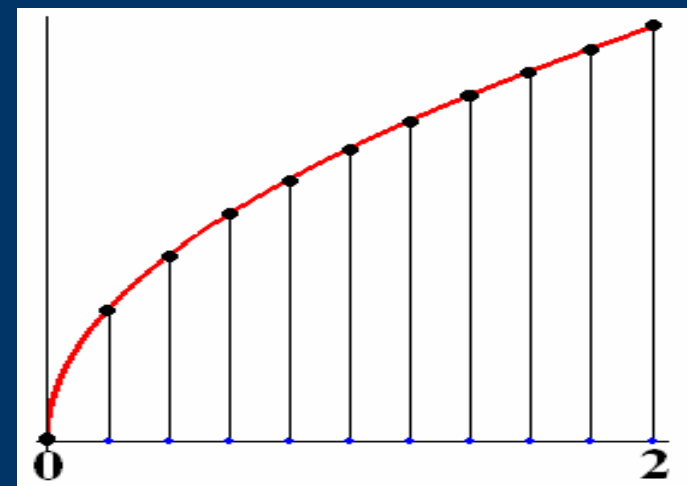
Példa

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx \approx \frac{2}{10} \left(0 + \sqrt{0,2} + \sqrt{0,4} + \sqrt{0,6} + \sqrt{0,8} + \sqrt{1} + \sqrt{1,2} + \sqrt{1,4} + \sqrt{1,6} + \sqrt{1,8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx \approx 1,8682$$

A pontos érték kiszámítása a Newton-Leibniz formulával:

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1,8856$$



n=10

Megjegyzés: a közelítés pontossága

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható és a második derivált függvénye korlátos az $[a,b]$ intervallumon, vagyis van olyan K szám, melyre $|f''(x)|\leq K$, ha $x\in[a,b]$, akkor az f integráljának **trapéz formulával számított közelítő értéke és az integrál pontos értéke közötti eltérés legfeljebb**

$$\frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

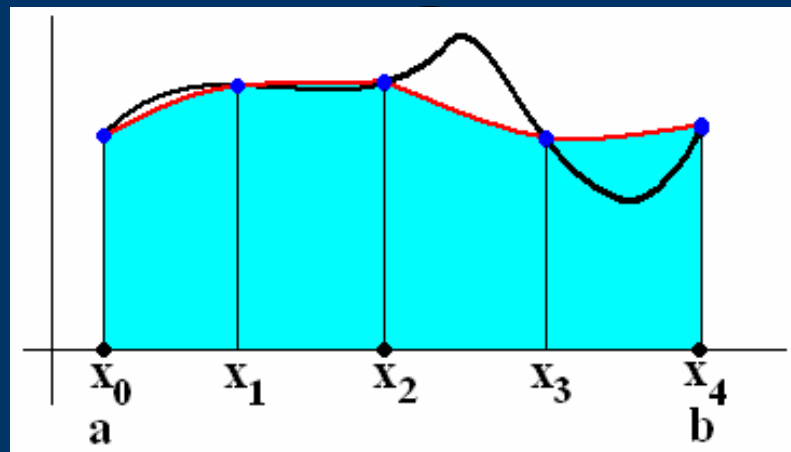
Ez azt jelenti, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő függvények esetén az osztópontok számának növelésével az eltérés tetszőlegesen kicsivé tehető, illetve az eltérés nagysága az előbbi formulával becsülhető.

Az integrál közelítő kiszámítása

Simpson formula

Az $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ integrálható függvény esetén osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot az x_0, x_1, \dots, x_{2n} osztópontokkal $2n$ db egyenlő hosszúságú intervallumra. Illesszünk az (x_0, x_1, x_2) , (x_2, x_3, x_4) , stb. osztópont-hármasokhoz tartozó függvénypontokra parabolaíveket. Közelítsük az f integrálját e paraboladarabok integráljainak összegével.

Ezzel az eljárással az f integráljára az alábbi közelítő formulát kapjuk:



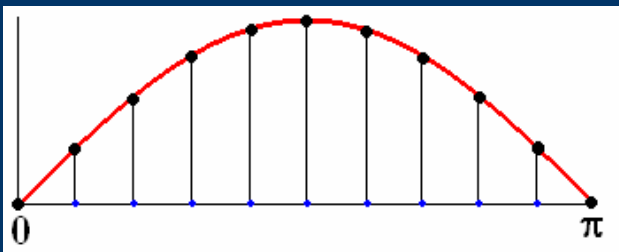
$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6n} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots$$

$$\dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

Példa

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{6 \cdot 5} (\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{2\pi}{10} + 4 \sin \frac{3\pi}{10} + 2 \sin \frac{4\pi}{10} + 4 \sin \frac{5\pi}{10} +$$

$$+ 2 \sin \frac{6\pi}{10} + 4 \sin \frac{7\pi}{10} + 2 \sin \frac{8\pi}{10} + 4 \sin \frac{9\pi}{10} + \sin \pi) \approx 2,0001$$



$$2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

A pontos érték kiszámítása a Newton- Leibniz formulával:

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

Megjegyzés: a közelítés pontossága

Ha az $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ függvény négyszer differenciálható és a negyedik derivált függvény korlátos az $[a,b]$ intervallumon, vagyis van olyan K szám, melyre $|f^{(4)}(x)|\leq K$, ha $x\in[a,b]$, akkor az f integráljának **Simpson formulával számított közelítő értéke és az integrál pontos értéke közötti eltérés legfeljebb**

$$\frac{K(b-a)^5}{2880n^4}$$

Ez azt jelenti, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő függvények esetén az osztópontok számának növelésével az eltérés tetszőlegesen kicsivé tehető, illetve az eltérés nagysága az előbbi formulával becsülhető. Nagy n esetén a Simpson formula jobb közelítést ad a trapéz formulánál.

Az integrál néhány geometriai alkalmazása

Terület

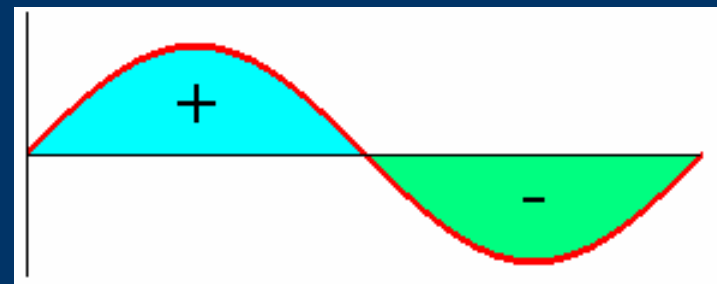
Az integrál az **előjeles függvény alatti területet** adja.

Például a \sin függvény integrálja a $[0, 2\pi]$ intervallumon 0, mert a $[0, \pi]$ intervallumon az integrál **2**, a $[\pi, 2\pi]$ intervallumon pedig **-2**:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -2$$

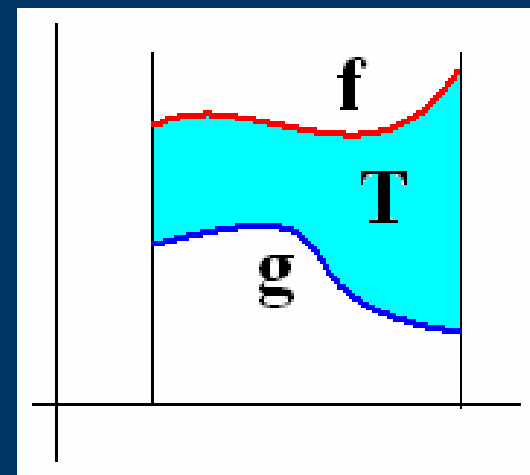
$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$



Két függvény közti terület

Ha a $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ integrálható függvényekre fennáll, hogy $f(x) \geq g(x)$, ha $x\in[a,b]$, akkor az két függvény által közrefogott síkrész területe:

$$T = \int_a^b (f - g)$$



Példa

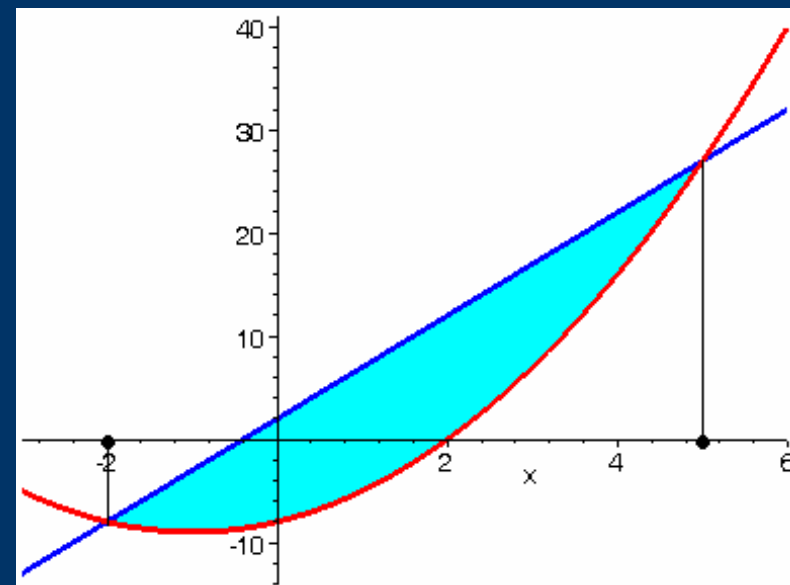
Számítsuk ki az $f(x)=x^2+2x-8$ és a $g(x)=5x+2$ függvények által közrefogott síkrész területét!

A metszéspontok meghatározása:

$$x^2+2x-8 = 5x+2$$

$$a = -2, b = 5$$

$$T = \int_a^b (f - g)$$



$$T = \int_{-2}^5 \left((5x + 2) - (x^2 + 2x - 8) \right) dx = \int_{-2}^5 (-x^2 + 3x + 10) dx = \frac{343}{6}$$

Forgástest térfogata

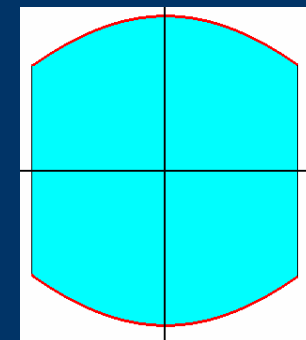
Egy $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ nemnegatív, folytonos függvény grafjának a „vízszintes” tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2$$

Példa

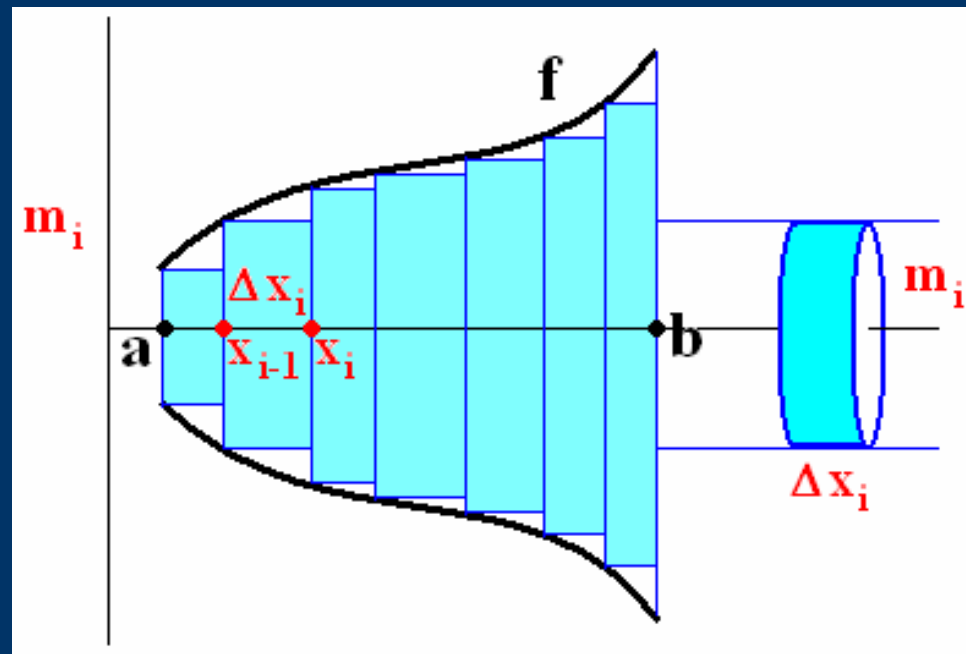
$$f(x) = \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx = \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)$$



Indoklás: a térfogat közelíthető a hengerek térfogatának összegével:

$$V \approx \sum_{i=1}^n m_i^2 \cdot \pi \cdot \Delta x_i$$



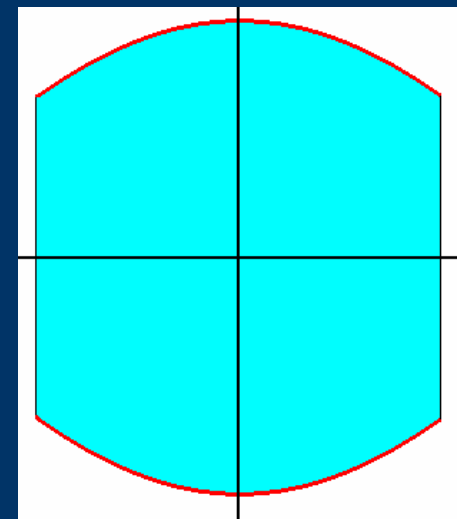
Mivel ez az összeg egyben az $x \rightarrow \pi \cdot f^2$ függvény **alsó integrálközelítő összege** az $[a, b]$ intervallumon, az integrál konstrukciójának figyelembe vételével, elfogadhatjuk, hogy a térfogat pontos értéke az integrállal egyenlő:

$$V = \pi \int_a^b f^2$$

Forgástest palástjának felszíne

Egy $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ nemnegatív, folytonosan differenciálható függvény gráfjának a „vízszintes” tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának felszíne:

$$F = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + f'^2}$$



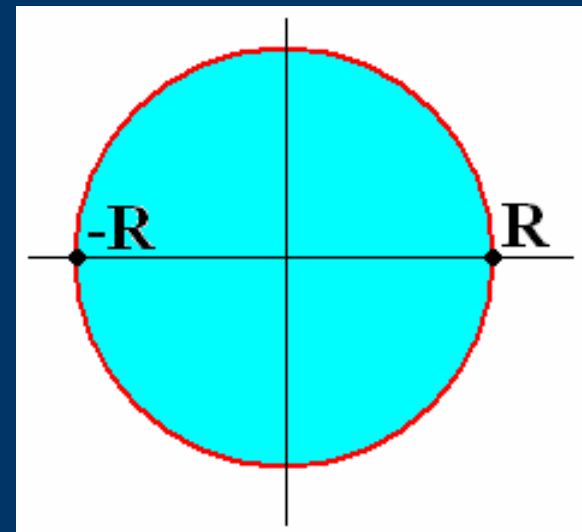
Példa: gömb felszíne

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R]$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$F = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R R dx = 4R^2 \pi$$



Ívhossz

Egy $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény gráfjának ívhossza:

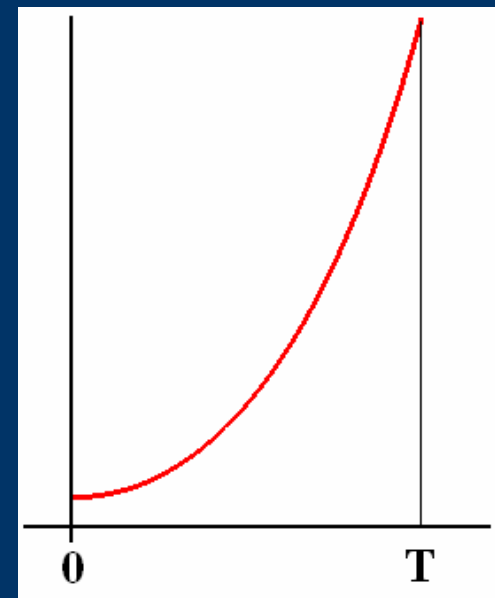
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$$

Példa

$$f(x) = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0, T]$$

$$f'(x) = \operatorname{sh} x$$

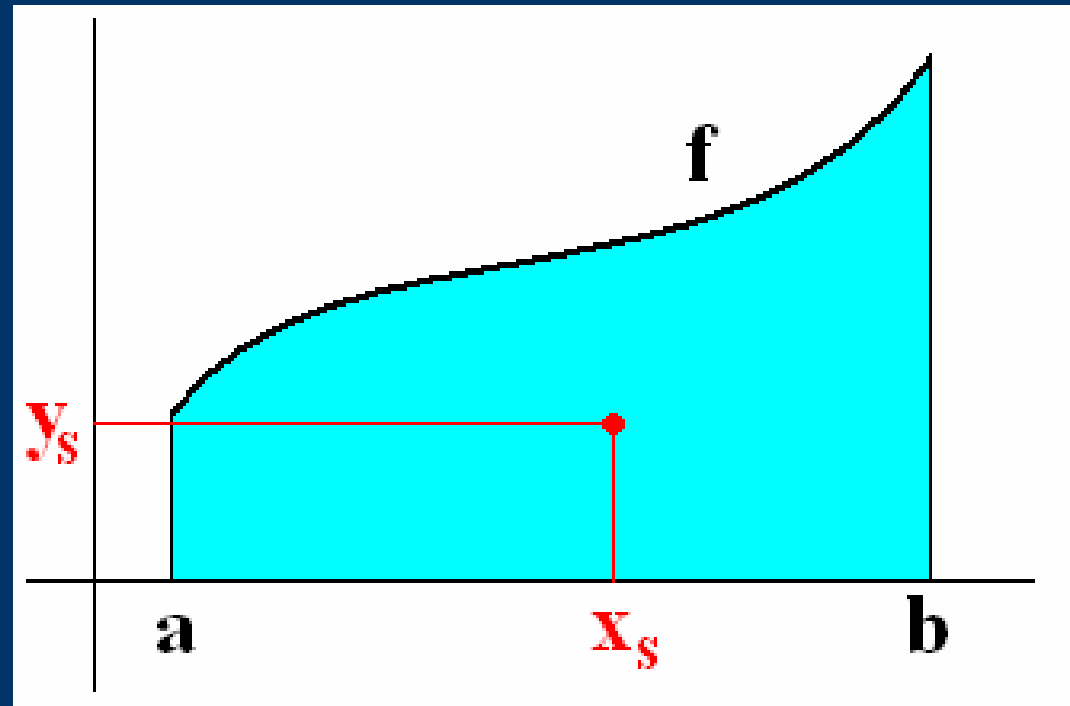
$$L = \int_0^T \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^T \operatorname{ch} x dx = \left[\operatorname{sh} x \right]_0^T = \operatorname{sh} T$$



Síkmező súlypontja

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$



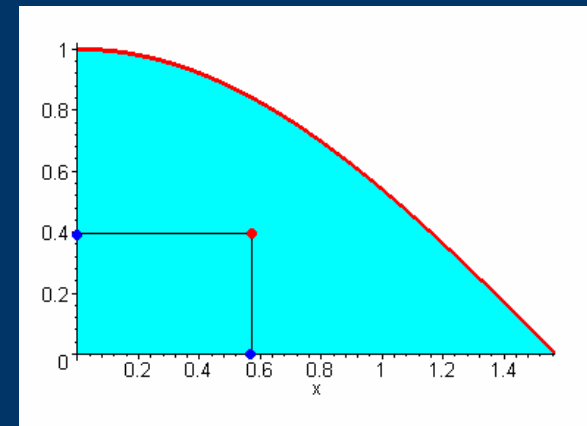
Példa

$$f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

$$\int_a^b x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \cdot \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

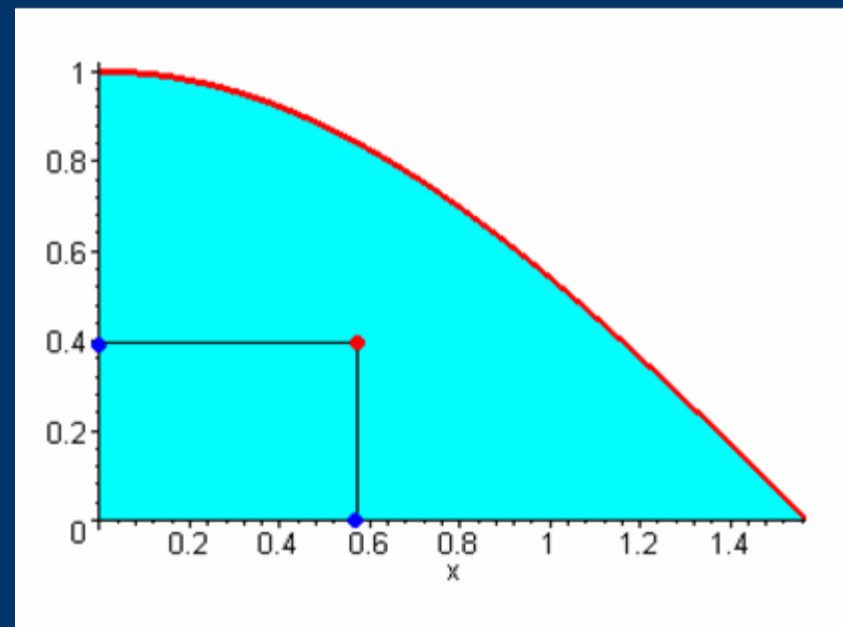


$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$x_s = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,57$$

$$y_s = \frac{\pi}{8} = 0,39$$



első és másodrendű nyomaték

Improprius integrálok

(nem korlátos függvény integrálja, integrál nem korlátos intervallumon)

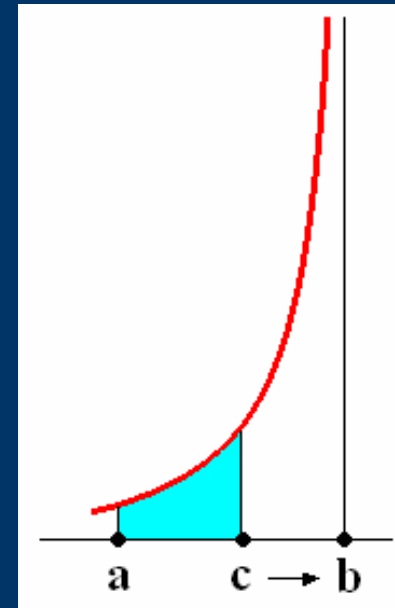
Definíció: **improprius integrál**

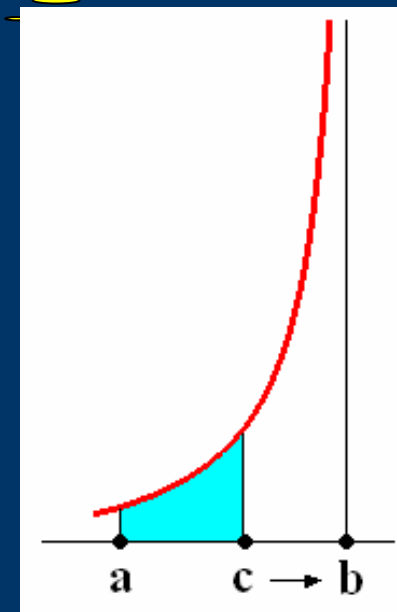
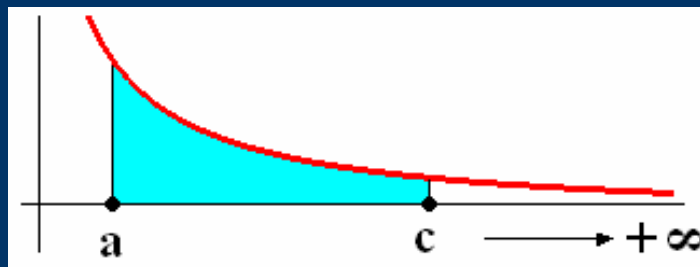
„probléma a jobb oldali végpontban”

Ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ vagy $b = +\infty$ és $a < b$, továbbá az $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden $c \in [a, b[$ esetén integrálható az $[a, c]$ intervallumon, akkor az f függvény $[a, b[$ intervallumon vett **improprius integrálján** a

$$\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f = \int_a^b f$$

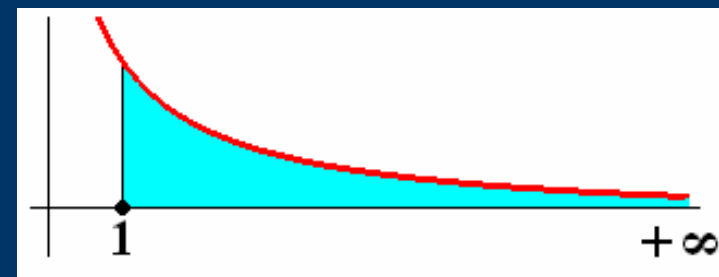
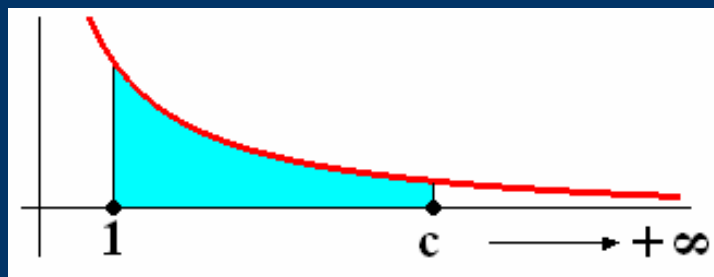
határértéket értjük, amennyiben létezik.





Ha a határérték valós szám, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál **konvergens** (különben azt, hogy **divergens**).

Példa



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{c} + 1 \right) = 1$$

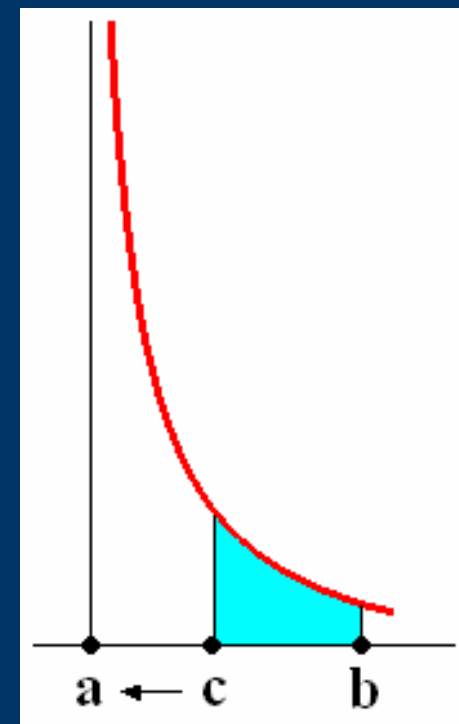
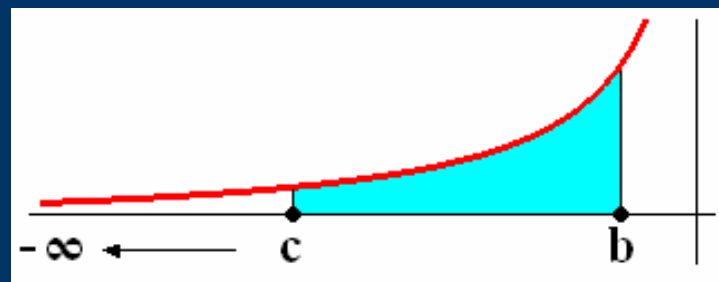
Definíció: **improprius integrál**

„probléma a bal oldali végpontban”

Ha $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ vagy $a = -\infty$ és $a < b$, továbbá az $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden $c \in]a, b]$ esetén integrálható az $[a, c]$ intervallumon, akkor az f függvény $]a, b]$ intervallumon vett **improprius integrálján** a

$$\lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f = \int_a^b f$$

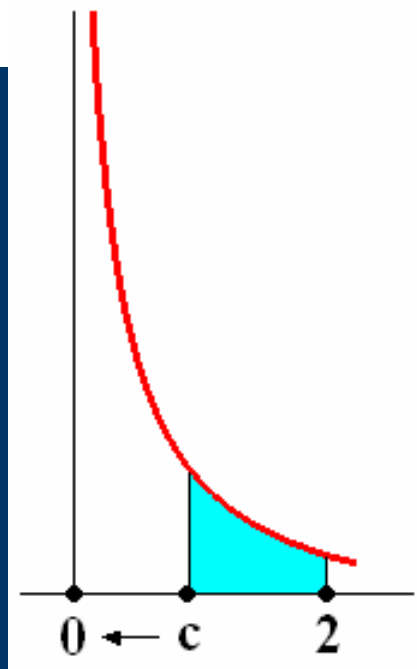
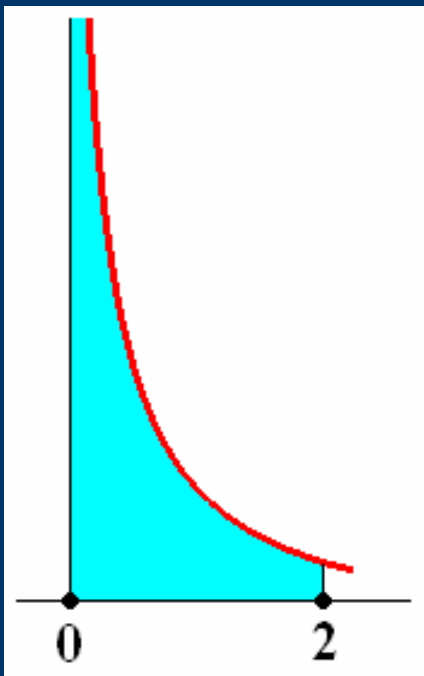
határértéket értjük, amennyiben létezik.



Ha a határérték valós szám, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál **konvergens** (különben azt, hogy **divergens**).

Példa

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0+0} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0+0} \left[2\sqrt{x} \right]_c^2 = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0+0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{c}) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



Definíció: **improprius integrál**

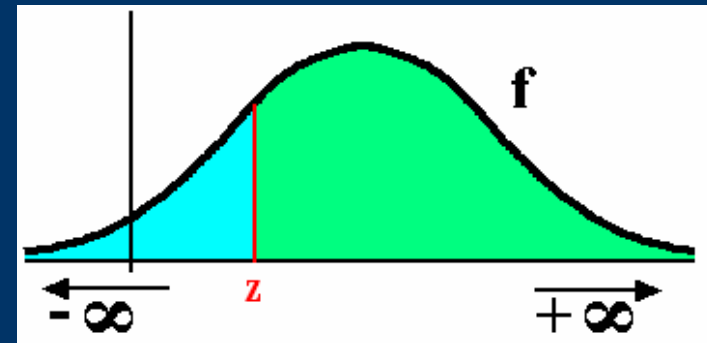
„probléma mindkét végpontban”

Ha $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ és $a < b$, továbbá az $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ függvényre valamely $z \in \mathbf{R}$ esetén léteznek és konvergensek az

$$\int_a^z f \quad \text{és az} \quad \int_z^b f$$

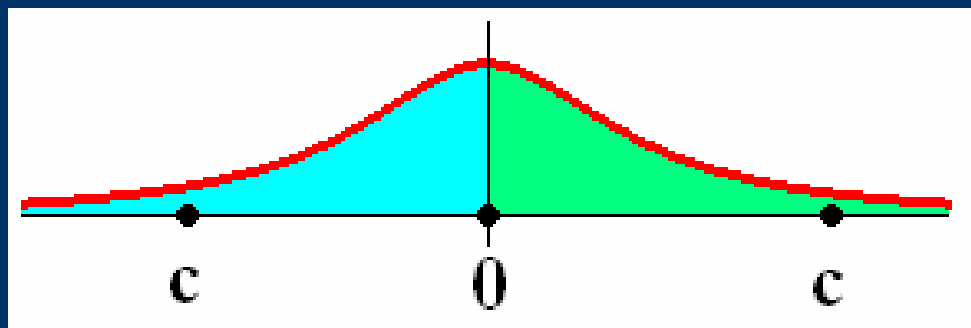
improprius integrálok, akkor az f függvény $]a, b[$ intervallumon vett improprius integrálján az

$$\int_a^z f + \int_z^b f = \int_a^b f$$



összeget értjük.

Példa



$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \\
 &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = \\
 &= \lim_{c \rightarrow -\infty} (-\operatorname{arctg} c) + \lim_{c \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} c = \pi
 \end{aligned}$$