NEM NYOMTATÁSRA!

„Mindent olyan egyszerűvé kell tenni, amennyire csak lehet, de nem egyszerűbbé.”

(Albert Einstein)

A fejezet legfontosabb elemei

- § **Halmaz megadási módjai**
- § **Halmazok közti műveletek (metszet, unió, komplementer, különbség, Descartes szorzat)**
- § **A halmazműveletek tulajdonságai, Boole algebra**
- § **Hatványhalmaz**
- § **Rendezett pár**
- § **R, R^2 és R^3 részhalmazainak ábrázolása**
- § **Halmaz számossága (véges, megszámlálható végtelen és kontinuum számosság)**

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzések

A halmaz, az elem és az eleme fogalmakat nem definiáljuk, ezeket alapfogalmaknak tekintjük.

Egy halmazt adottnak tekintjük, ha bármely „dologról” eldönthető, hogy eleme-e a halmaznak, vagy nem.

Egy halmaz különböző elemei különböző dolgok, azaz egy dolog nem lehet egy halmaznak többszörösen előforduló eleme.

Jelölések

A halmazokat leggyakrabban latin nagybetűvel, az elemeket latin kisbetűvel jelöljük.

halmaz: A,B,… **elem: a,b,…**

„eleme”: $a \in A$ **„nem eleme”: $a \notin A$**

Megjegyzés

A halmazokkal kapcsolatos definíciókban gyakran használjuk az alábbi lejeket:

Logikai műveletek: $\wedge$ **= és** $\vee$ **= vagy** $\neg$ **= nem**

$\Rightarrow$ **= akkor** (következmény)

Definíciók

$\emptyset$: üres halmaz (olyan halmaz, melynek nincs eleme)

$A \subset B$: A részhalmaza B-nek, ha $x \in A \Rightarrow x \in B$

(az A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is)

$A = B$: A egyenlő B-vel, ha $A \subset B \wedge B \subset A$

A „valódi részhalmaza” B-nek, ha $A \subset B \wedge A \neq B$

(az A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is, de a B-nek van olyan eleme, ami nem eleme A-nak)

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Definíciók

A és B diszjunkt, ha $A \cap B = \emptyset$

Halmazrendszer: olyan halmaz, melynek elemei halmazok

Az A halmaz hatványhalmaza: az A összes részhalmazát elemként tartalmazó halmazrendszer.

Jelölés: 2^A

Megjegyzés

Egy n elemű halmaznak (n pozitív egész szám) 2^n különböző részhalmaza van.

A továbbiakban a következő speciális jelölésekkel fogunk utalni a leggyakrabban használt számhalmazokra. (A halmazokat később definiáljuk)

N: a természetes számok halmaza

Z: az egész számok halmaza

Q: a racionális számok halmaza

R: a valós számok halmaza

C: a komplex számok halmaza

Megjegyzés

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \; (\subset \mathbf{C})$$

A fenti halmazok jelölésére szokás használni a következő szimbólumokat is (kézírásban minden esetben ezeket használjuk):

$$\mathbb{N}\;\mathbb{Z}\;\mathbb{Q}\;\mathbb{R}\;\mathbb{C}$$

Halmaz megadható az elemeinek felsorolásával, vagy körülírással.

A körülírás legtöbbször egy ismert H (alap)halmaz egy A részhalmazának megadását jelenti a következő sémák szerint:

$$A = \{\, x \in H \mid x \text{ rendelkezik a } T_1, T_2, \ldots \text{ tulajdonságokkal} \,\}$$

$$A = \{\, x \in H : x \text{ rendelkezik a } T_1, T_2, \ldots \text{ tulajdonságokkal} \,\}$$

Példa

Az elemek felsorolásával: $A = \{ 11,12,13,14,15,16,17,18,19 \}$

Körülírással: $A = \{ x \in \mathbf{N} \mid 11 \le x < 20 \}$

A { } jelpárt lehetőleg csak halmaz megadásakor fogjuk használni

Előfordul, hogy egy halmazt egy függvény értékkészleteként adunk meg.

Például a páros számok halmaza az $x \to 2x$ függvény értékkészlete, amennyiben az értelmezési tartomány az egész számok halmaza:

$$\{\, 2x \mid x \in \mathbf{Z} \,\}$$

vagy

$$\{\, 2x : x \in \mathbf{Z} \,\}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíciók: műveletek halmazokkal

Legyen $H \neq \emptyset$, $A, B, C \subset H$.

unió $A \cup B = \{\, x \in H \mid (x \in A) \vee (x \in B) \,\}$

metszet $A \cap B = \{\, x \in H \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \,\}$

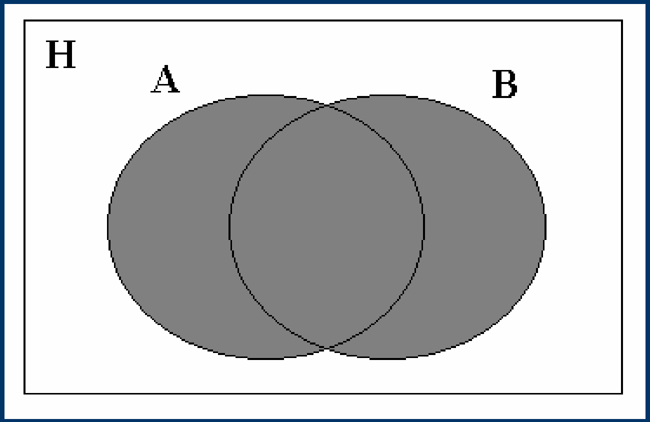
komplementer $\overline{A} = C_H A = \{x \in H \mid \neg(x \in A)\}$

különbség $A \setminus B = \{\, x \in H \mid (x \in A) \wedge (\neg(x \in B)) \,\}$

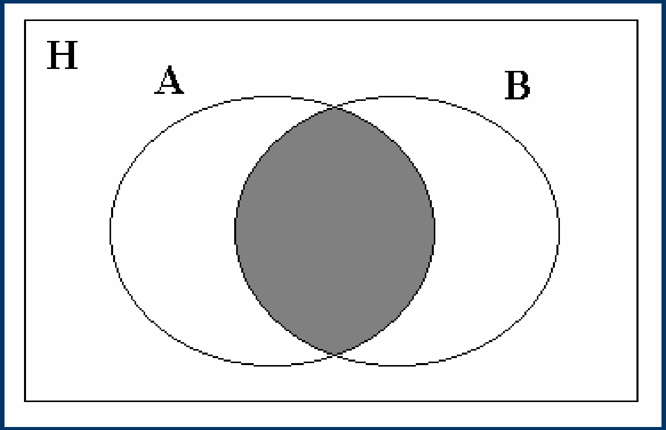
NEM NYOMTATÁSRA!

Halmazok ábrázolása, Venn-diagram

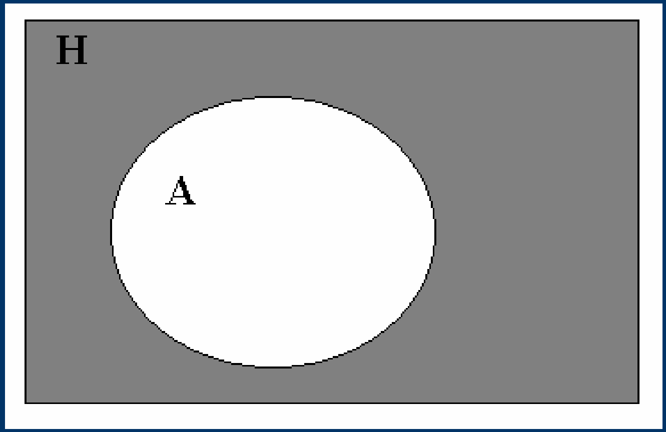
$A \cup B$



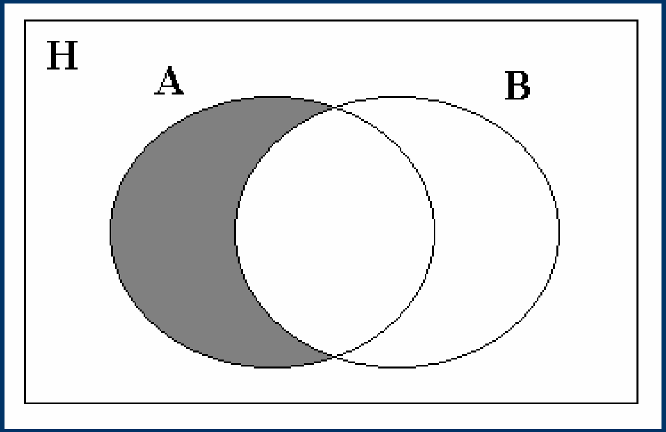
$A \cap B$



$C_H A$



$A \setminus B$



NEM NYOMTATÁSRA!

A halmazműveletek alapvető tulajdonságai, Boole algebra

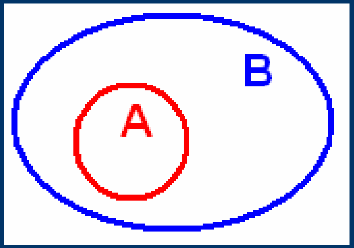
Egy H alaphalmaz tetszőleges A, B és C részhalmazaira fennáll az alábbi 19 tulajdonság. Ez úgy is megfogalmazható, hogy egy halmaz hatványhalmaza Boole algebrát alkot az unió-, a metszet- és a komplementer képzés műveletekre nézve:

$\cap$	$\cup$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap H = A$	$A \cup H = H$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \cup \overline{A} = H$
$\overline{H} = \emptyset$ $\quad \overline{\emptyset} = H$	$\overline{\overline{A}} = A$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

NEM NYOMTATÁSRA!

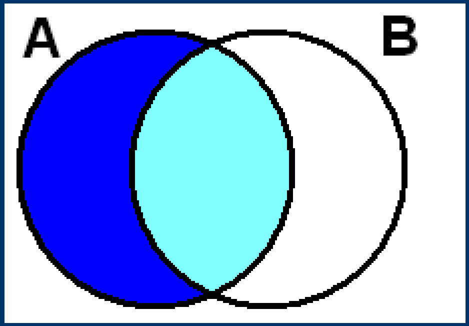
Fennáll továbbá, hogy ha $A \subset B$, akkor

$A \cap B = A$ illetve $A \cup B = B$

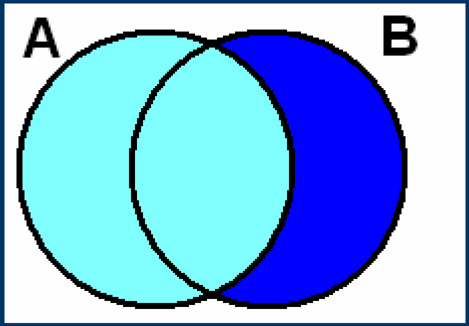


Speciálisan:

$$A \cup (A \cap B) = A$$



$$A \cap (A \cup B) = A$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Az ítéletkalkulusban az „és” ($\wedge$), „vagy” ($\vee$), „nem” ($\neg$) logikai műveletek szintén Boole algebrát alkotnak: ha p, q és r ítéletek, azaz olyan állítások, melyekhez egyértelműen hozzárendelhető az igaz (i), vagy a hamis (h) logikai érték, akkor fennállnak az alábbi tulajdonságok:

$$p \wedge p = p \qquad p \vee p = p$$

$$p \wedge i = p \qquad p \vee i = i$$

$$p \wedge h = h \qquad p \vee h = p$$

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r \qquad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge \neg p = h \qquad p \vee \neg p = i$$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg i = h \qquad \neg h = i \qquad \neg(\neg p) = p$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés: igazságtáblázat

A logikai kifejezésekhez (logikai függvényekhez) igazságtáblázat készíthető, mely a „bemeneti” adatok lehetséges igazságértékeihez hozzárendeli a „kimenet” igazságértékét.

Az igazságtáblázattal ellenőrizhető például a logikai kifejezések (függvények) ekvivalenciája.

Példa

„és”

p	q	$p \wedge q$
h	h	h
h	i	h
i	h	h
i	i	i

„vagy”

p	q	$p \vee q$
h	h	h
h	i	i
i	h	i
i	i	i

„nem”

p	$\neg p$
h	i
i	h

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

A $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$ kifejezés igazságtáblázata:

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$
h	h	h	i	h	i	h	h
h	h	i	i	h	i	i	i
h	i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	h	i	i	i
i	h	h	i	i	h	h	i
i	h	i	i	i	h	h	i
i	i	h	h	h	h	h	h
i	i	i	h	h	h	h	h

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: rendezett pár

Az (a,b) szimbólumokat az A és a B halmazok elemeiből képzett rendezett pároknak nevezzük, ha

- **$a \in A$**
- **$b \in B$**
- **$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$**

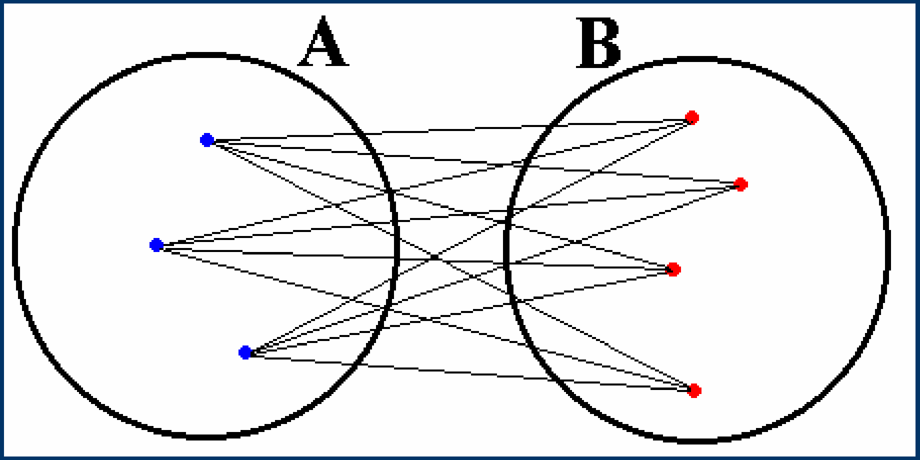
Megjegyzés

Halmazok esetén: $\{ a , b \} = \{ b , a \}$

Definíció: Descartes szorzat

Az A és a B nem üres halmazok Descartes szorzata:

$$A \times B = \{\, (a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B) \,\}$$



A Descartes szorzat elemei párok, tehát más jellegű objektumok, mint az eredeti halmazok elemei.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$A = \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$B = \{ -1, 3, 5 \}$

$$A \times B = \{ (5,-1), (6,-1), (7,-1), (8,-1), (9,-1), (5,3), (6,3), (7,3), (8,3), (9,3), (5,5), (6,5), (7,5), (8,5), (9,5) \}$$

Megjegyzés

Az A halmaz 5 elemű, a B halmaz 3 elemű

$\Rightarrow$ **az $A \times B$ halmaz $5 \cdot 3 = 15$ elemű**

Definíció: rendezett n-es

Az $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ szimbólumokat az $A_1,A_2,\ldots,A_n$ halmazok elemeiből képzett rendezett n-eseknek nevezzük (n pozitív egész szám), ha

- $a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n$
- $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (b_1,b_2,\ldots,b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$

Definíció: több halmaz Descartes szorzata

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$
$$= \{\, (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (a_n \in A_n) \,\}$$

Jelölés

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n$$

$R^2 = R \times R$ a valós számpárok halmaza

$R^3 = R \times R \times R$ a valós számhármasok halmaza

R^n a valós szám n-esek halmaza

A következőkben – a valós számok halmazának intuitív fogalmára építve – az R, R^2 és R^3 halmazok részhalmazainak ábrázolásáról lesz szó.

Az R halmaz axiomatikus felépítésével később foglalkozunk.

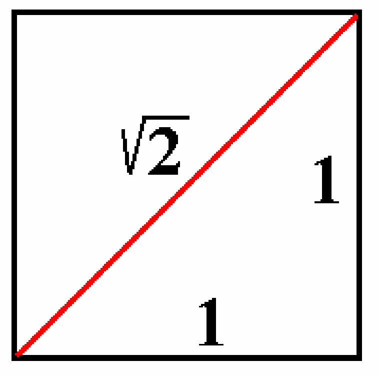
NEM NYOMTATÁSRA!

A valós számok halmaza és a számegyenes

A valós számok halmazának tulajdonságaiból következik, hogy R és egy egyenes (számegyenes) pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Ennek megfelelően a valós számok halmazának részhalmazait számegyenesen szokás ábrázolni.

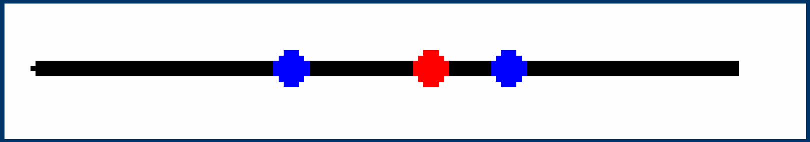
Ez a megfeleltetés összefügg azzal, hogy a fizikai mennyiségek mérésekor az elméleti, pontos mérőszámok nem kerülhetnek ki egy szűkebb halmazból.



A racionális számok halmaza és a számegyenes

A racionális számok „lyukacsosan hagyják" a számegyenest, de azon sűrűn helyezkednek el:

a számegyenes bármely két pontja között, azaz bármely két különböző valós szám között, van racionális szám. (Sőt végtelen sok van!)

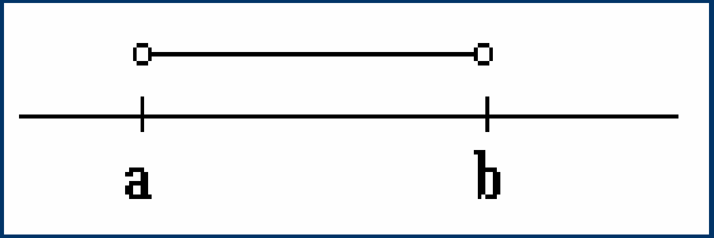


NEM NYOMTATÁSRA!

R speciális részhalmazai: intervallumok

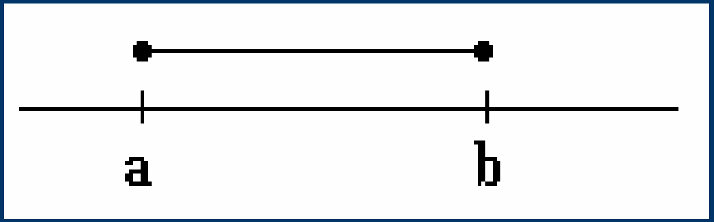
$]a,b[=\{\, x \in \mathbf{R} \mid a<x<b \,\}$

(nyílt intervallum)

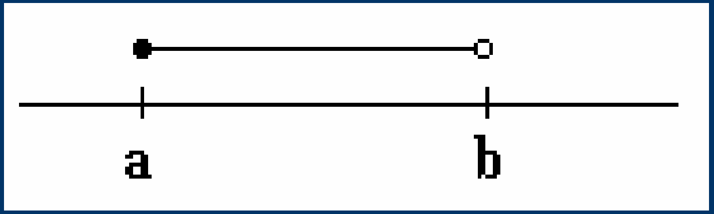


$[a,b]=\{\, x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b \,\}$

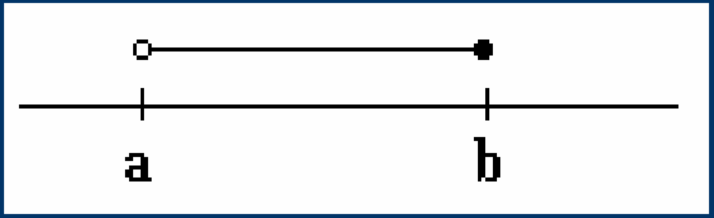
(zárt intervallum)



$[a,b[=\{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$



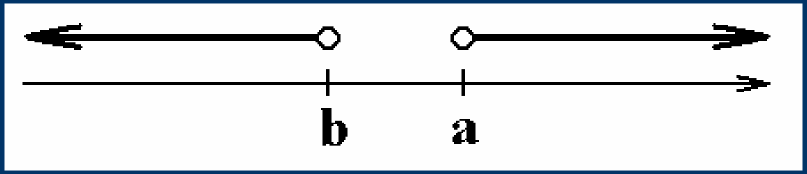
$]a,b]=\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$



NEM NYOMTATÁSRA!

Nem korlátos intervallumok

$] -\infty , b [= \{ x \in \mathbf{R} \mid x < b \}$



$] a , +\infty [= \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \}$

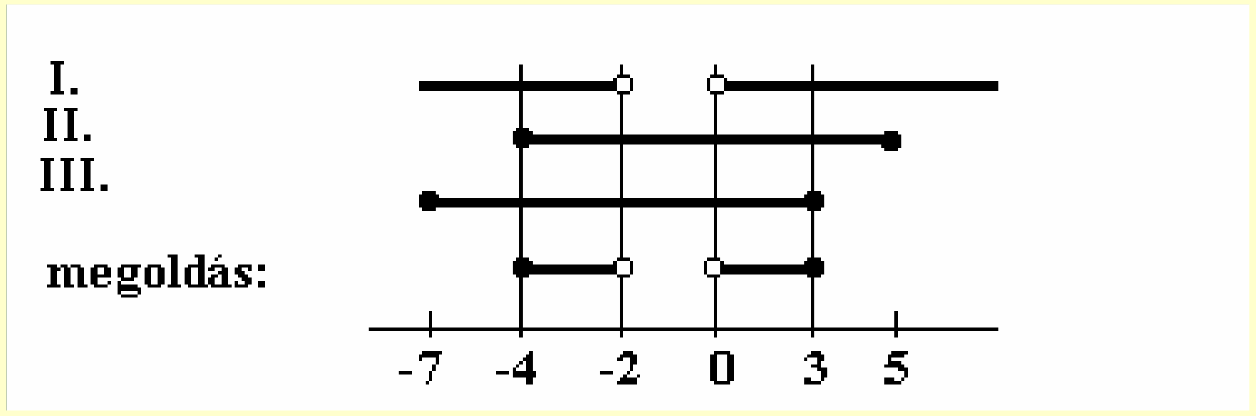
$] -\infty , +\infty [= \mathbf{R}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: egyenlőtlenségrendszer megoldása

I. $|x-1| > 1$ II. $x^2-x \leq 20$ III. $\dfrac{x+7}{x-3} \leq 0$

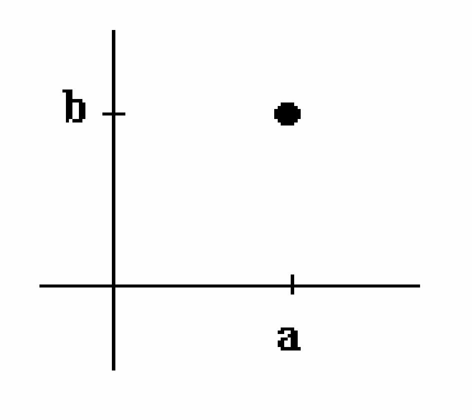
Mindhárom egyenlőtlenség megoldáshalmaza egy intervallum, vagy intervallumok uniója. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza pedig ennek a három halmaznak a metszete.



NEM NYOMTATÁSRA!

R^2 részhalmazainak ábrázolása

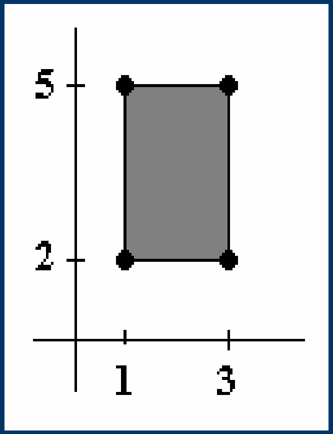
R^2 és egy sík (számsík) pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, így R^2 részhalmazait síkbeli ponthalmazként ábrázolhatjuk.



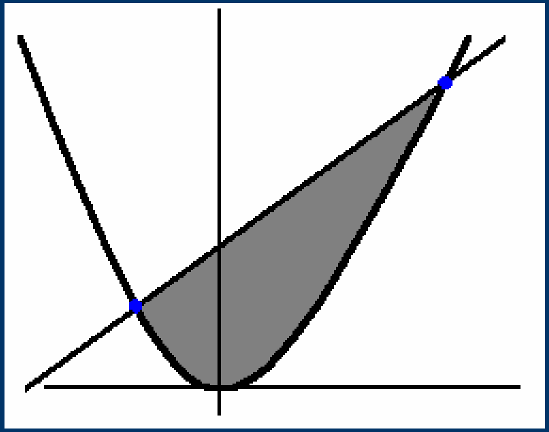
Ha adott egy síkbeli derékszögű koordinátarendszer, akkor az $(a,b)\in R^2$ számpárnak az a pont felel meg, melynek első koordinátája a, a második pedig b.

Példák

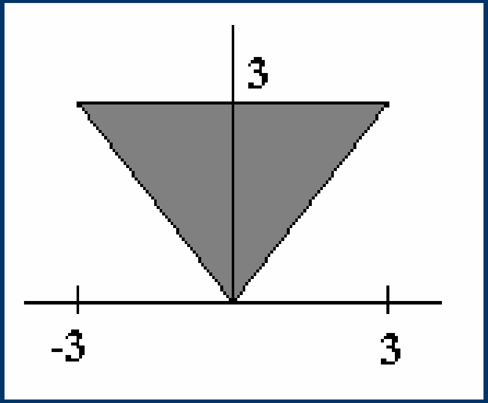
$\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 5\}$



$\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \le y \le x+2\}$

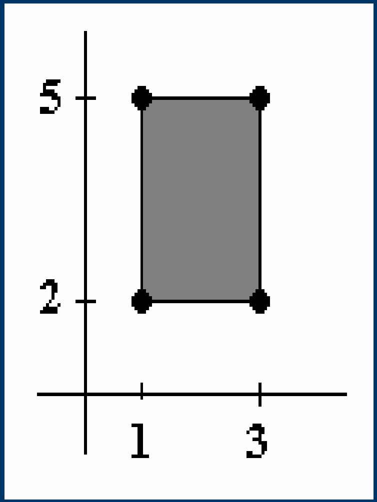


$\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid |x| \le y \le 3\}$

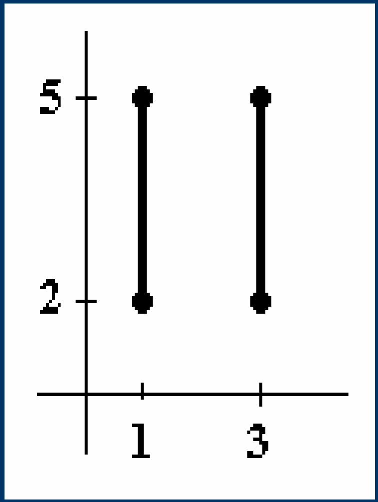


NEM NYOMTATÁSRA!

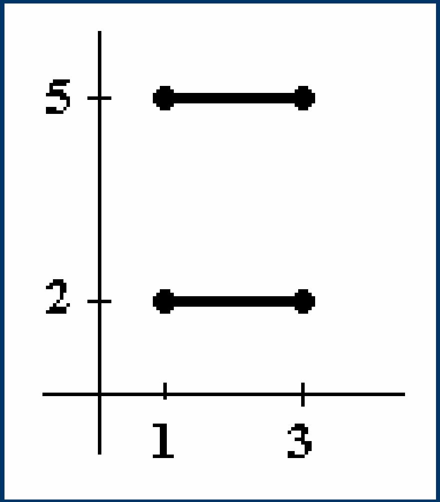
$[1,3]\times[2,5]$



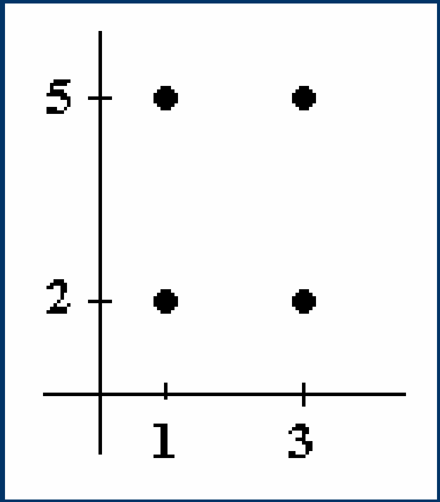
$\{1,3\}\times[2,5]$



$[1,3]\times\{2,5\}$

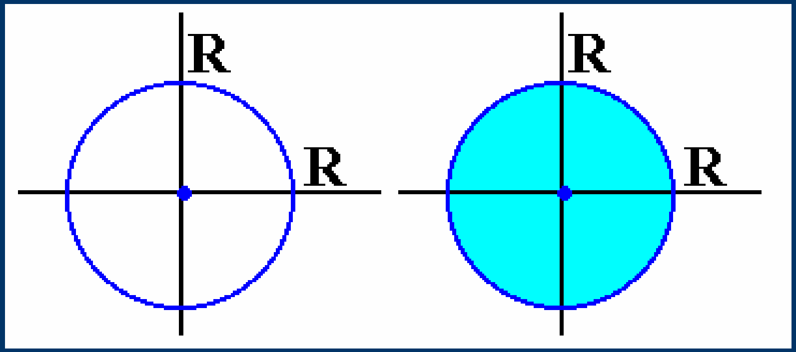


$\{1,3\}\times\{2,5\}$

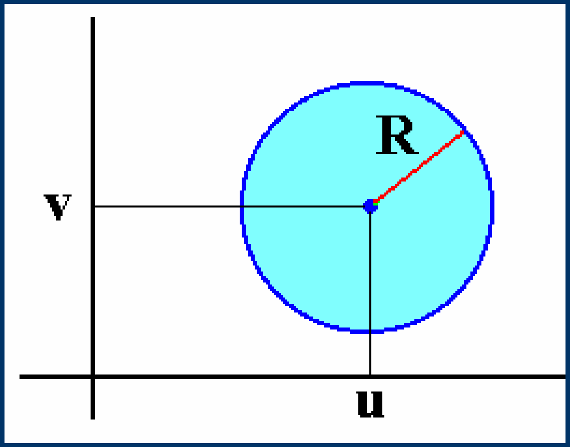


NEM NYOMTATÁSRA!

$$\{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \,\}$$



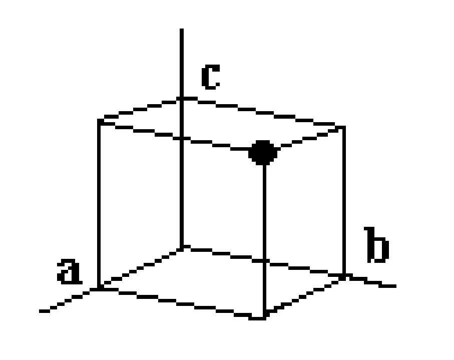
$$\{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2 \,\}$$



$$\{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-u)^2 + (y-v)^2 \leq R^2 \,\}$$

R^3 részhalmazainak ábrázolása

R^3 és a tér pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, így R^3 részhalmazait térbeli ponthalmazként ábrázolhatjuk.



Ha adott egy térbeli derékszögű koordinátarendszer, akkor az $(a,b,c)\in R^3$ számhármasnak az a pont felel meg, melynek első koordinátája a, a második b, a harmadik pedig c.

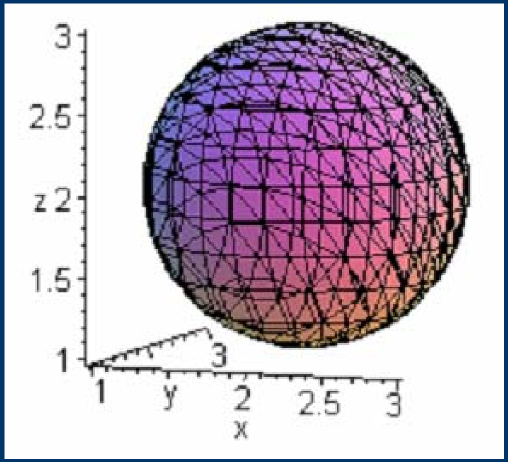
Példa

Az (u,v,w) középpontú, R sugarú gömb:

$$\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2 \}$$

Speciálisan a (2,2,2) középpontú, 1 sugarú gömb:

$$\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 1 \}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Halmazok számossága

Definíció: ekvivalens halmazok

Az A és a B halmazok számosságát egyenlőnek nevezzük, ha a két halmaz között létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Ekkor azt is mondjuk, hogy a két halmaz (a számosság szempontjából) ekvivalens.

Példa

„Ugyanannyi” páros természetes szám van, mint ahány természetes szám:

Tekintsük ui. az $n \to 2n$ kölcsönösen egyértelmű leképezést a két halmaz között.

$1 \to 2$
$2 \to 4$
$3 \to 6$
$4 \to 8$
$\ldots$
$n \to 2n$
$\ldots$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az A halmaz számosságának jelölése: |A|

Definíció

Az üres halmaz számossága 0.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz számossága n.

Definíció

A természetes számok halmaza megszámlálható végtelen számosságú.

Tétel

Z és Q megszámlálható végtelen számosságú.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

A valós számok halmaza nem megszámlálható végtelen számosságú.

Definíció

A valós számok halmaza kontinuum számosságú.

Tétel

Minden pozitív hosszúságú intervallum kontinuum számosságú.

A megszámlálható halmazok jellemzője, hogy az elemeiket „fel lehet sorolni”, azaz: van olyan sorozat, mely tartalmazza a halmaz minden elemét.

Egy kontinuum számosságú halmaz elemeit nem lehet felsorolni.

Megszámlálható végtelen számosságú	Kontinuum számosságú
N (természetes számok)	**R** (valós számok)
Z (egész számok)	[a,b] (intervallum, a<b)
Q (racionális számok)	**C** (komplex számok)