Hatványsorok, elemi függvények, határérték

Definíció: függvénysorozat

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$,

$$H = \{ f \mid f : A \to \mathbf{R} \}.$$

(A H halmaz elemei az A halmazon értelmezett függvények)

A H függvényhalmaz elemeiből képzett

$$(f_n) : \mathbf{N} \to H$$

sorozatot függvénysorozatnak nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: nemnegatív egész kitevős hatványfüggvényekből álló függvénysorozat

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in]-1,1[, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$f_0(x) = 1$, $x \in]-1,1[$

$f_1(x) = x$, $x \in]-1,1[$

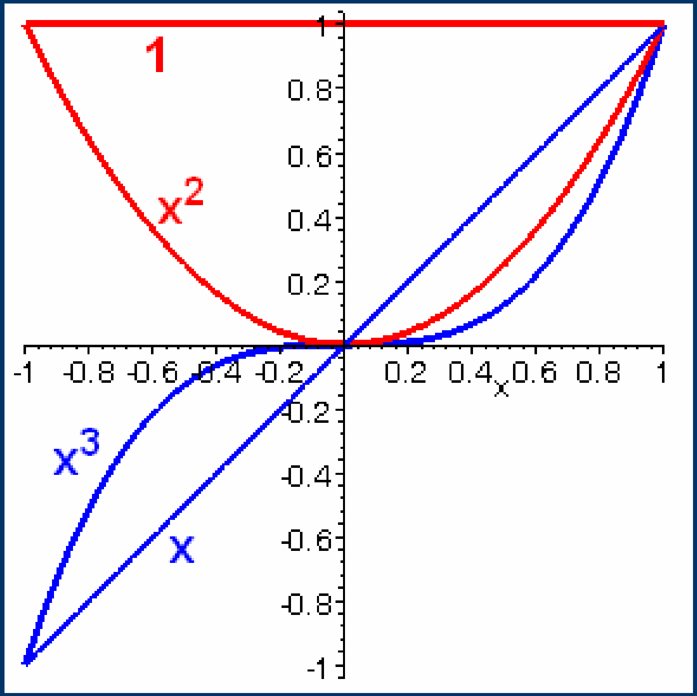
$f_2(x) = x^2$, $x \in]-1,1[$

$f_3(x) = x^3$, $x \in]-1,1[$

$\vdots$

$f_n(x) = x^n$, $x \in]-1,1[$

$\vdots$



NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: függvénysor

Legyen $(f_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{H}$ egy függvénysorozat. Az (f_n) elemeiből képzett

$$s_1 = f_1$$
$$s_2 = f_1 + f_2$$
$$s_3 = f_1 + f_2 + f_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$
$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

sorozatot függvénysornak nevezzük.

Jelölés

$$(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

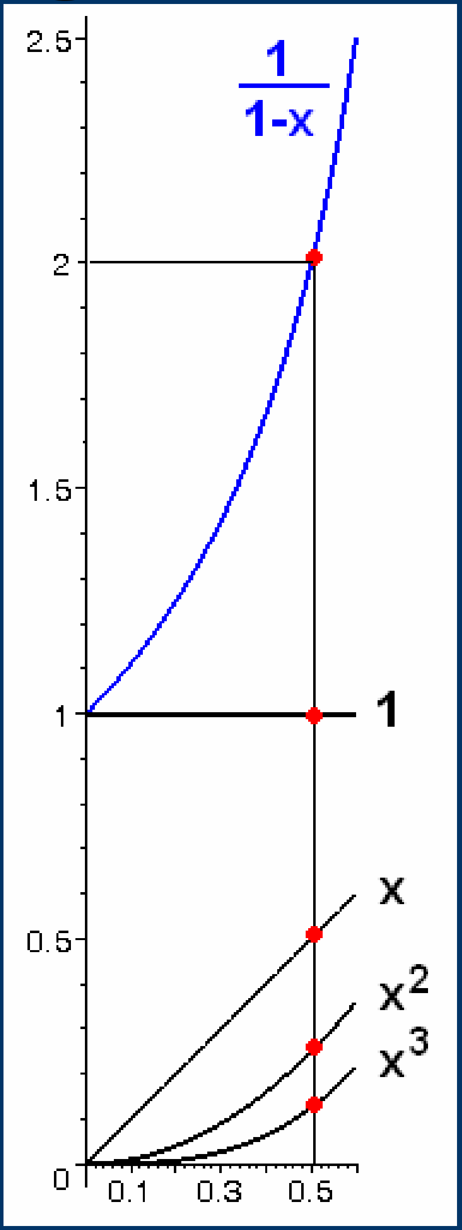
$x \in]-1,1[$

Megjegyzés

A változó rögzített értéke mellett a függvénysor egy számsor.
A fenti példában az x=1/2 érték mellett például a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

számsort kapjuk.



Definíció: hatványsor

Legyen $x_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, (n=0,1,2,…).

Az $f_n(x) = (x-x_0)^n$ hatványfüggvényekből képzett

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad z \in R$$

speciális függvénysort **hatványsor**nak nevezzük.

Példa

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$x \in]-1,1[$

Itt $x_0 = 0$, $a_n = 1$ (n=0,1,2,…)

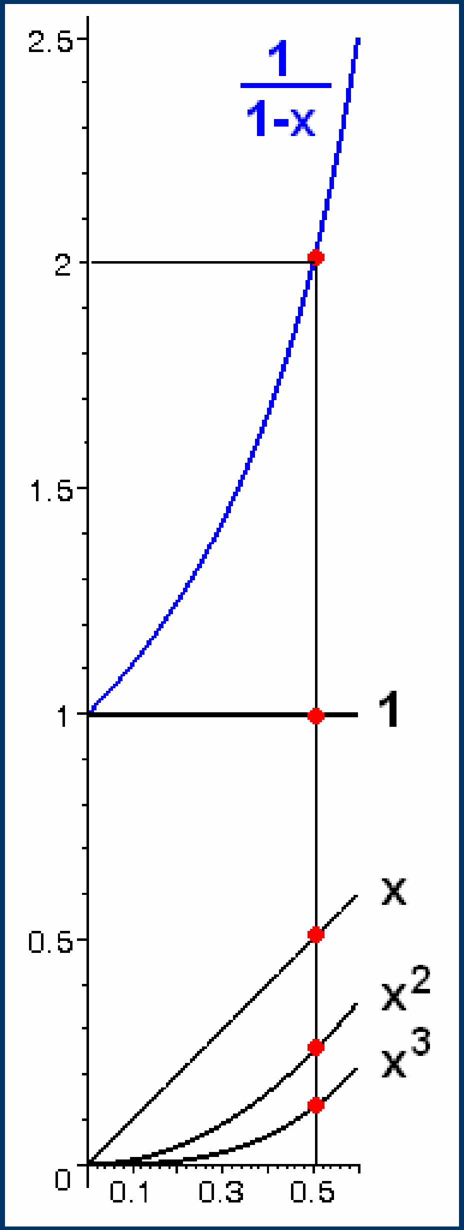
NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Rögzített x érték mellett a hatványsor egy számsor.
Hatványsorok esetén fontos kérdés, hogy melyek azok a x értékek, melyek mellett a hatványsor konvergens.

Példa

A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **hatványsor konvergens, ha** $x \in]-1,1[$.



Tétel: hatványsor konvergenciatartománya

Egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ **hatványsor esetén a következő három eset lehetséges:**

1. ESET

A hatványsor csak egy pontban, $x=x_0$ esetén konvergens, az ettől különböző pontokban divergens.

Ekkor azt mondjuk, hogy a konvergencia sugár 0.

2. ESET

A hatványsor egy pont egy véges környezetében konvergens, pontosabban: van olyan r>0, hogy a hatványsor

konvergens, ha $|x - x_0| < r$

és

divergens, ha $|x - x_0| > r$.

Ekkor azt mondjuk, hogy a konvergencia sugár r, az x_0 pont r sugarú nyílt környezetét a hatványsor konvergencia tartományának nevezzük. (Ez nem más, mint az $]x_0-r, x_0+r[$ nyílt intervallum.

Megjegyzés

A konvergenciatartomány határán való viselkedés kérdéses.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ **esetén a konvergencia tartomány:]-1,1[**

3. ESET

A hatványsor mindenhol, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

Ekkor azt mondjuk, hogy a konvergencia sugár ∞, a konvergenciatartomány pedig a teljes számegyenes.

Példa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ **mindenhol konvergens**

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: hatványsor összegfüggvénye

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hatványsor esetén definiáljuk az **f** függvényt

a hatványsor konvergencia tartományában a következőképpen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

(Az f függvény értéke egy x helyen egyenlő a x rögzítésével kapott számsor összegével.)

Az f függvényt a hatványsor összegfüggvényének nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

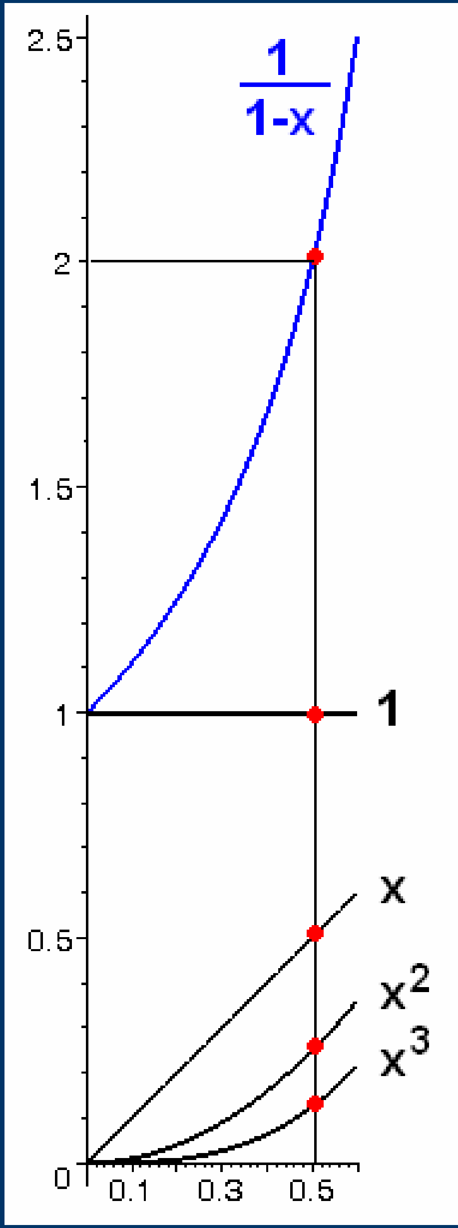
A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsor konvergencia tartománya

a]-1,1[intervallum. Itt fennáll, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

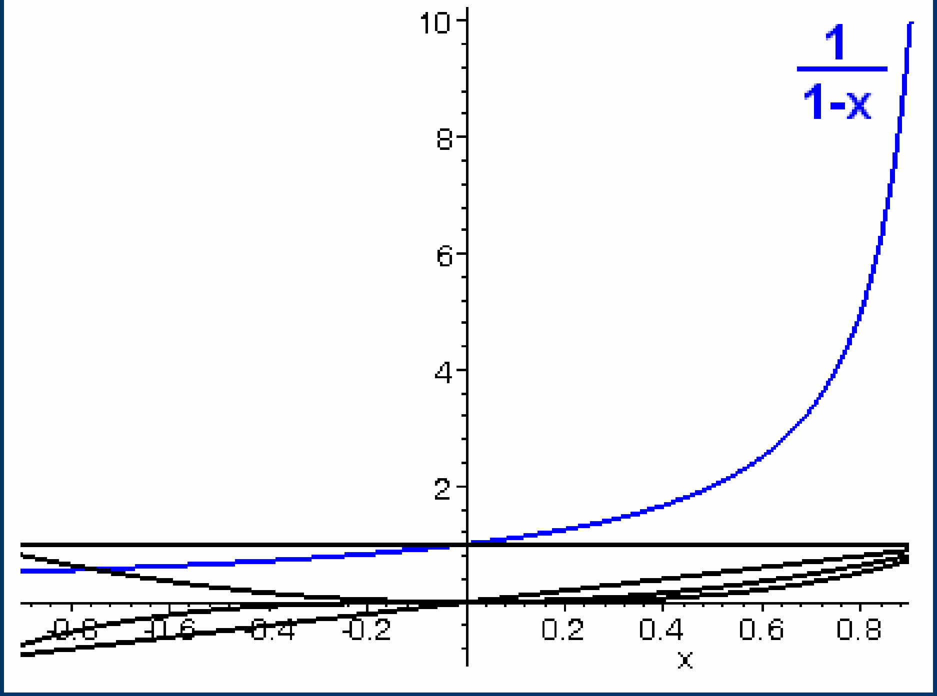
így a hatványsor összegfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



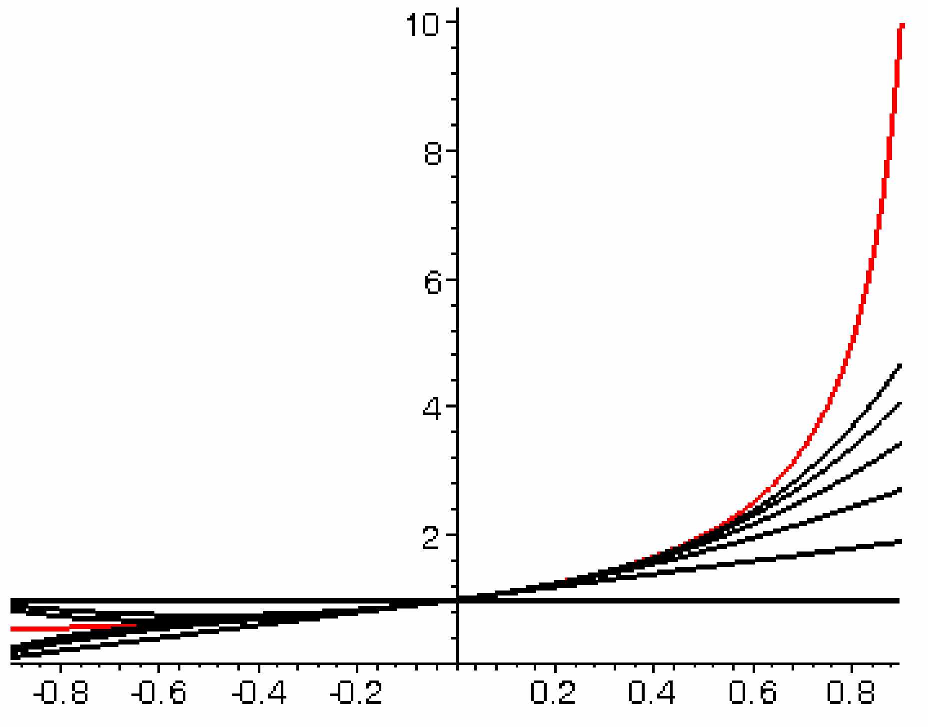
NEM NYOMTATÁSRA!

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$ első néhány tagja és összegfüggvénye:



NEM NYOMTATÁSRA!

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$ **első néhány részletösszege és összegfüggvénye:**



NEM NYOMTATÁSRA!

A természetes alapú exponenciális függvény

Definíció: exponenciális függvény

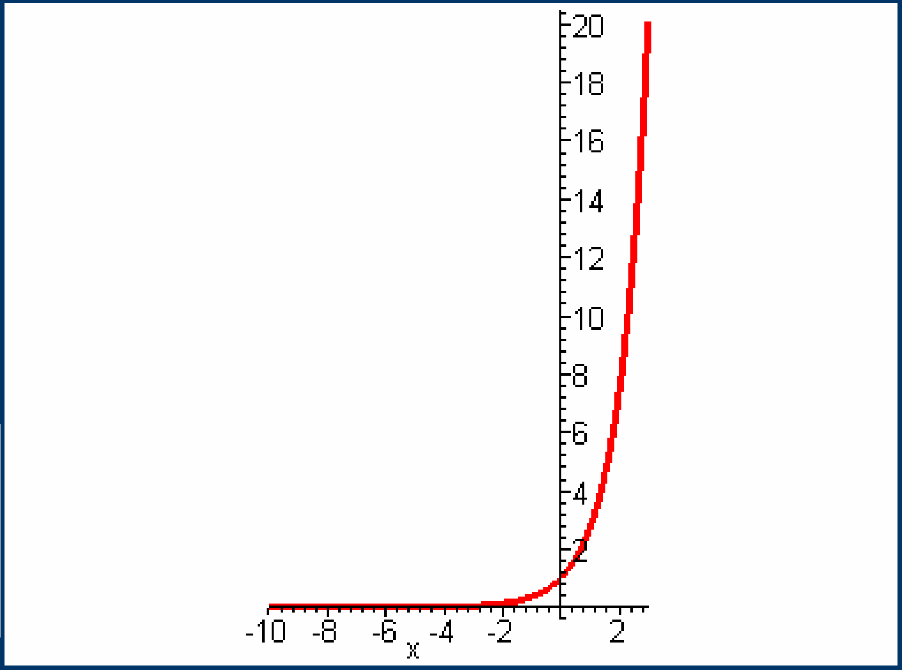
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

mindenhol konvergens. Összegfüggvénye:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$x \in \mathbf{R}$

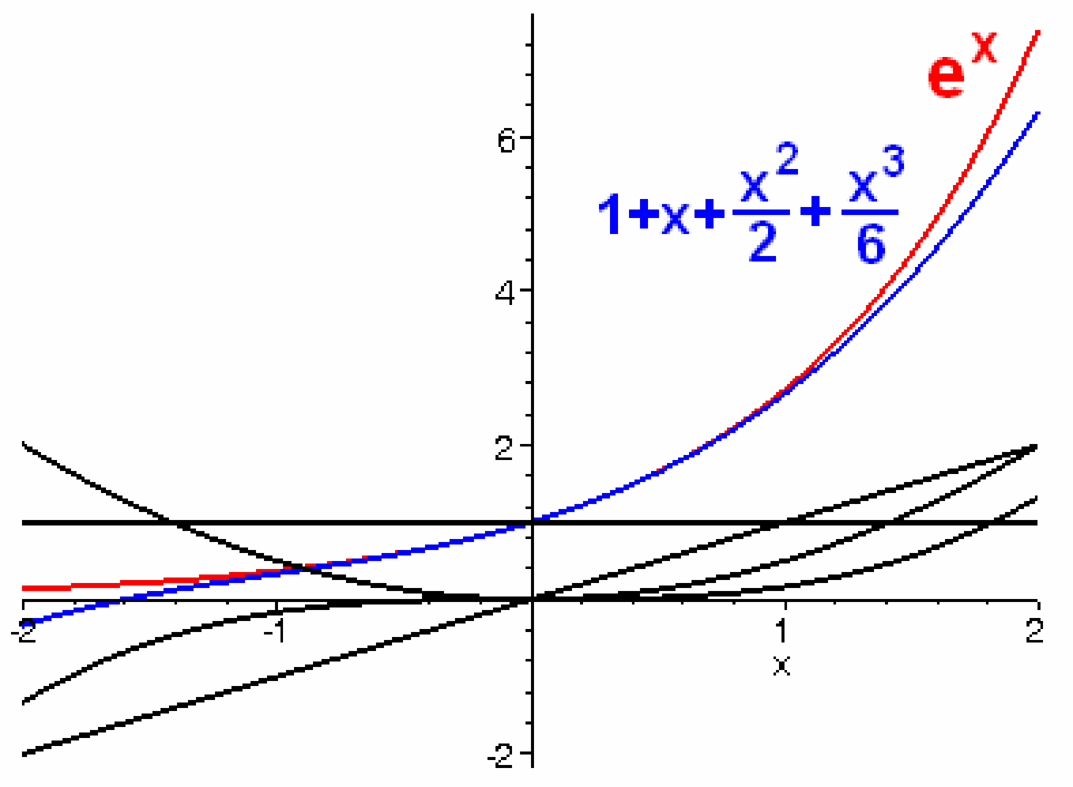
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

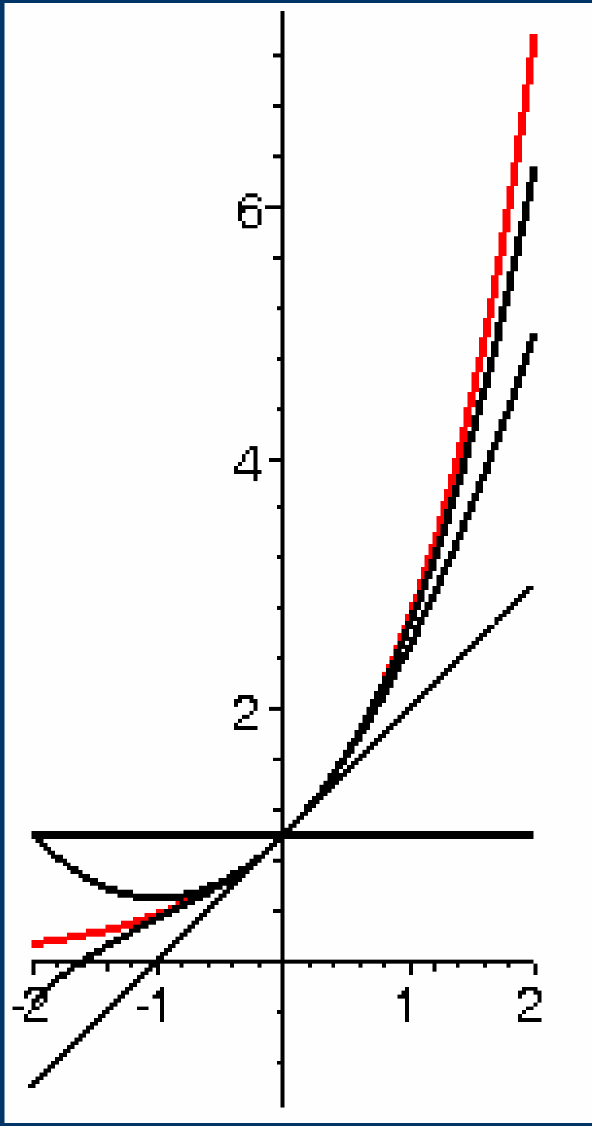


NEM NYOMTATÁSRA!

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$x \in R$





NEM NYOMTATÁSRA!

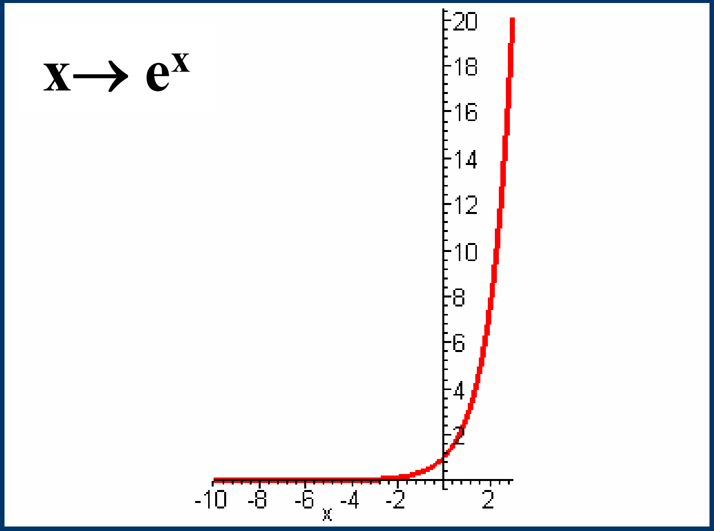
A természetes alapú logaritmus függvény

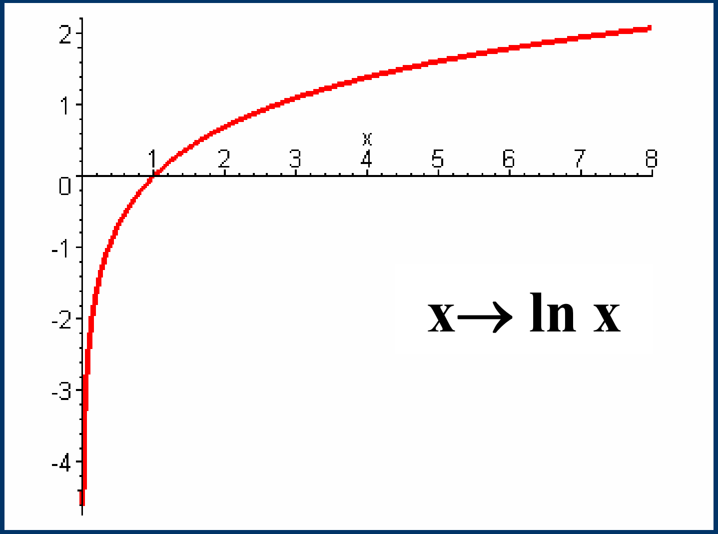
A természetes alapú exponenciális függvény

$$x \to e^x$$

inverze a természetes alapú logaritmusfüggvény.

$$x \to \log_e x = \ln x$$





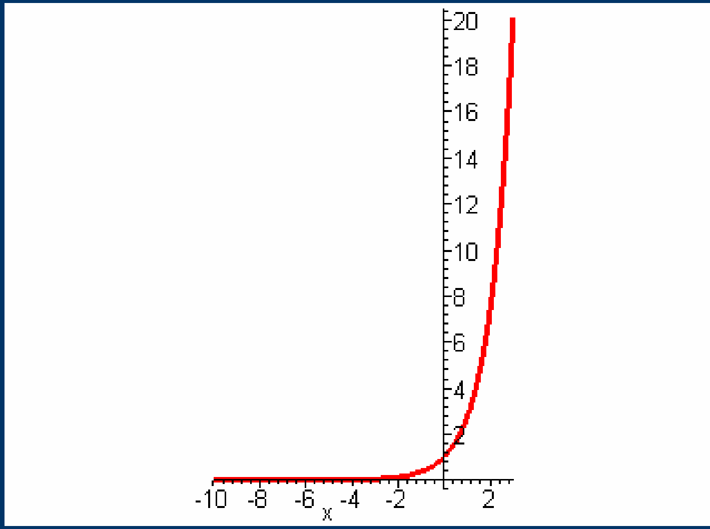
Exponenciális függvények

Definíció

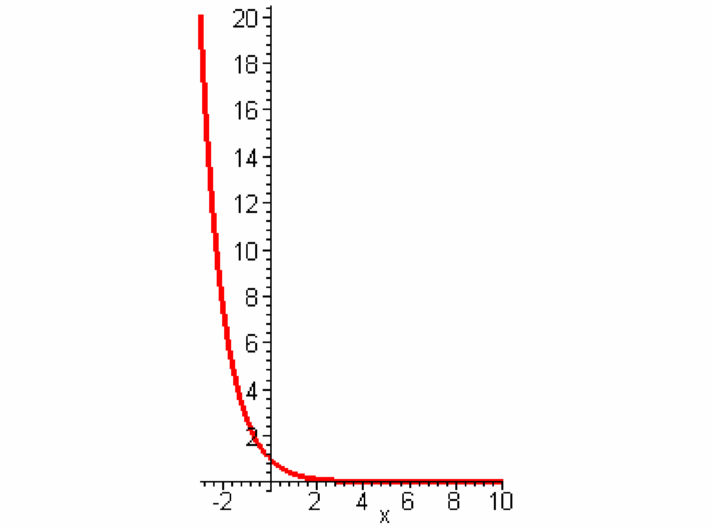
Ha $a \in \mathbf{R}$, $a>0$, akkor legyen

$$a^x = e^{x \cdot \ln a},\ x \in \mathbf{R}$$

$x \to a^x$, ha $a > 1$



$x \to a^x$, ha $0 < a < 1$



NEM NYOMTATÁSRA!

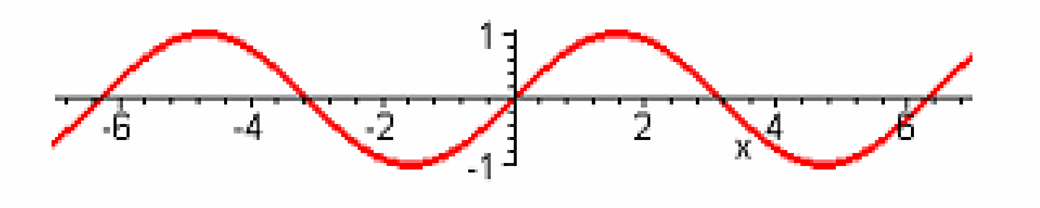
A szinusz függvény

Definíció

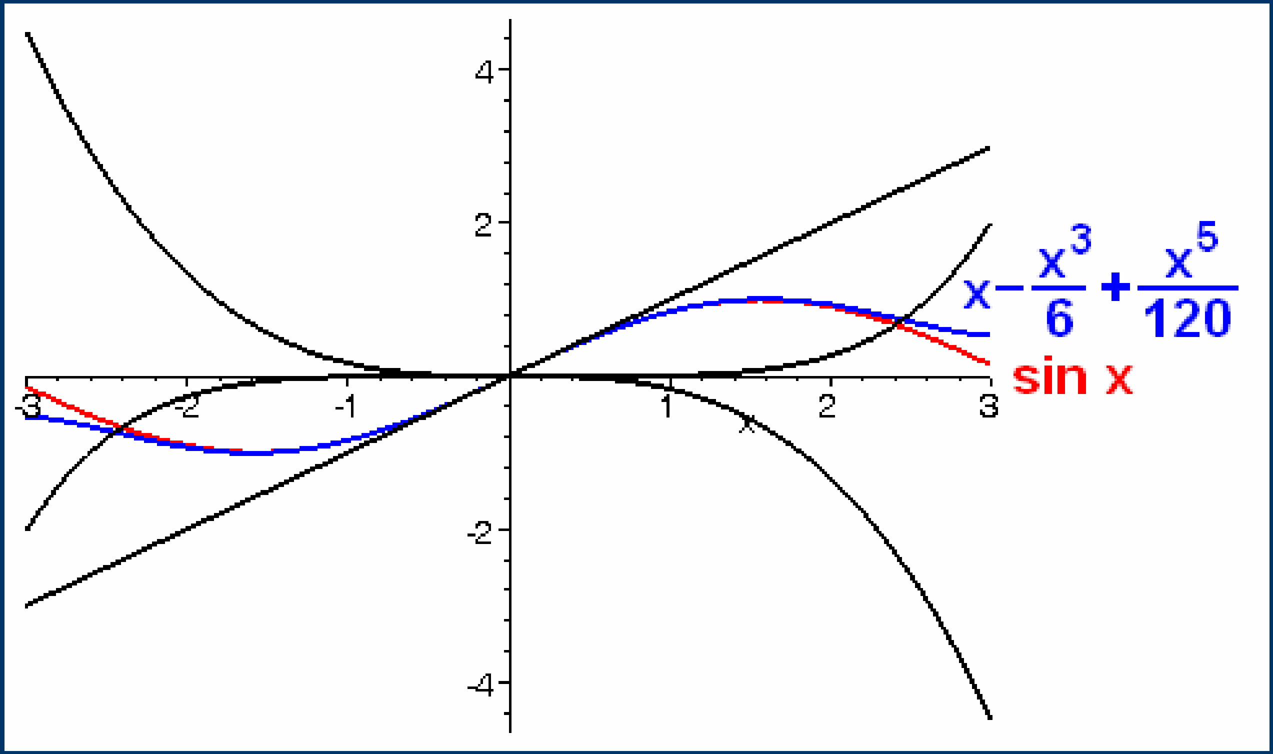
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$x \to \sin x$



$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

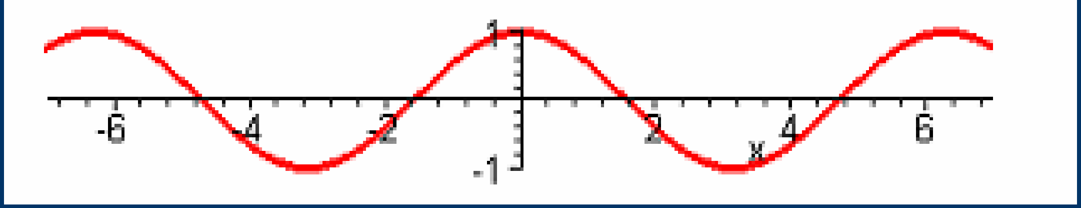
A koszinusz függvény

Definíció

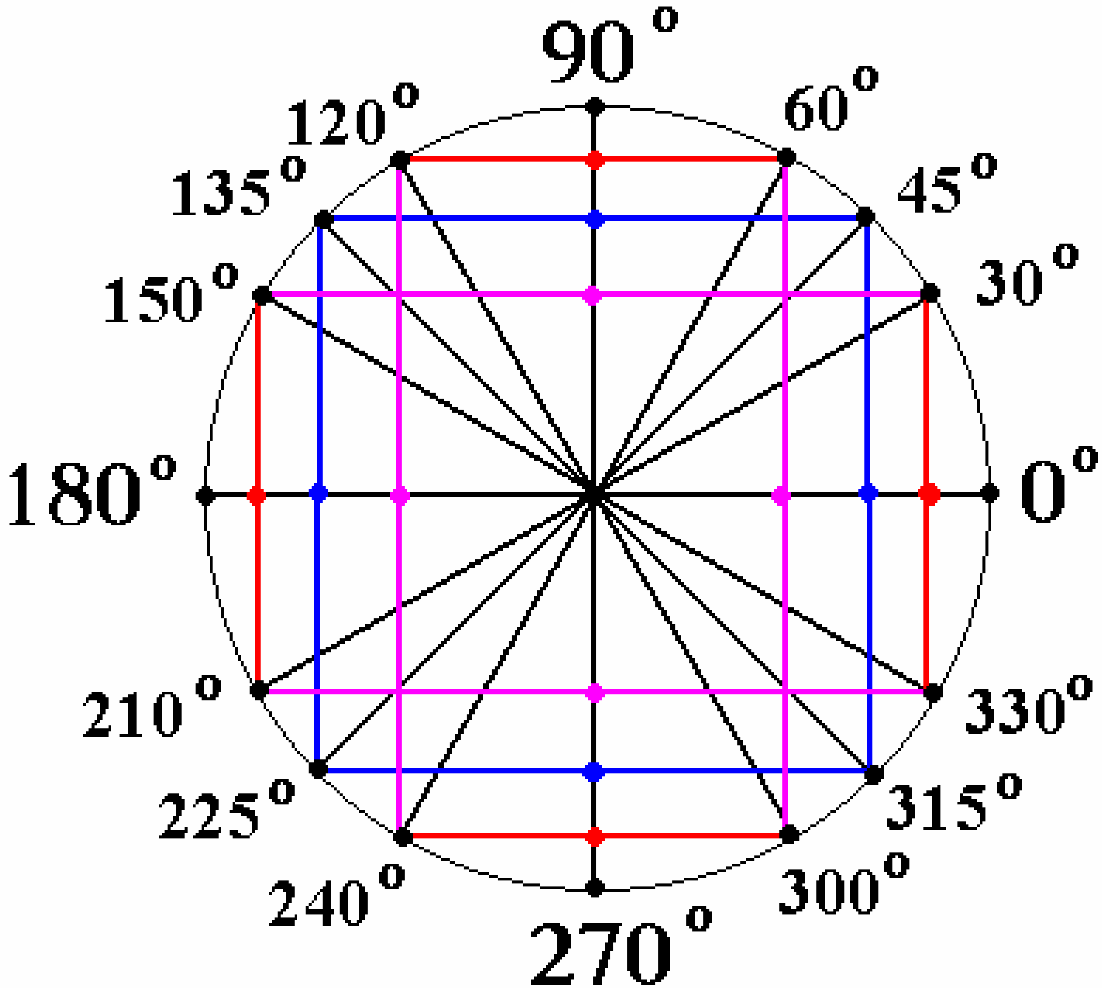
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$x \to \cos x$



A sin és cos függvények „nevezetes” értékei (π=180°)



$\pm\frac{1}{2}$

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0, \pm 1$

NEM NYOMTATÁSRA!

A trigonometrikus függvényekre vonatkozó azonosságok

	x+y	**x-y**	**2x**	**x/2**
sin	$\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y$	$\sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y$	$2\cdot\sin x\cdot\cos x$	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
cos	$\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$	$\cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y$	$\cos^2 x - \sin^2 x$	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
tg	$\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}$	$\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}$	$\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$	$\frac{1-\cos x}{\sin x}$
ctg	$\frac{\mathrm{ctg}x\cdot\mathrm{ctg}y-1}{\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}y}$	$\frac{\mathrm{ctg}x\cdot\mathrm{ctg}y+1}{\mathrm{ctg}y-\mathrm{ctg}x}$	$\frac{\mathrm{ctg}^2 x-1}{2\mathrm{ctg}x}$	$\frac{1+\cos x}{\sin x}$

NEM NYOMTATÁSRA!

A trigonometrikus függvényekre vonatkozó azonosságok

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\cos x - \cos y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

NEM NYOMTATÁSRA!

A trigonometrikus függvények kapcsolata

	sin	**cos**	**tg**	**ctg**
sinx=	-	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\mathrm{tg}x}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}$
cosx=	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	-	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$	$\frac{\mathrm{tg}x}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}$
tgx=	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	-	$\frac{1}{\mathrm{ctg}x}$
ctgx=	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}x}$	-

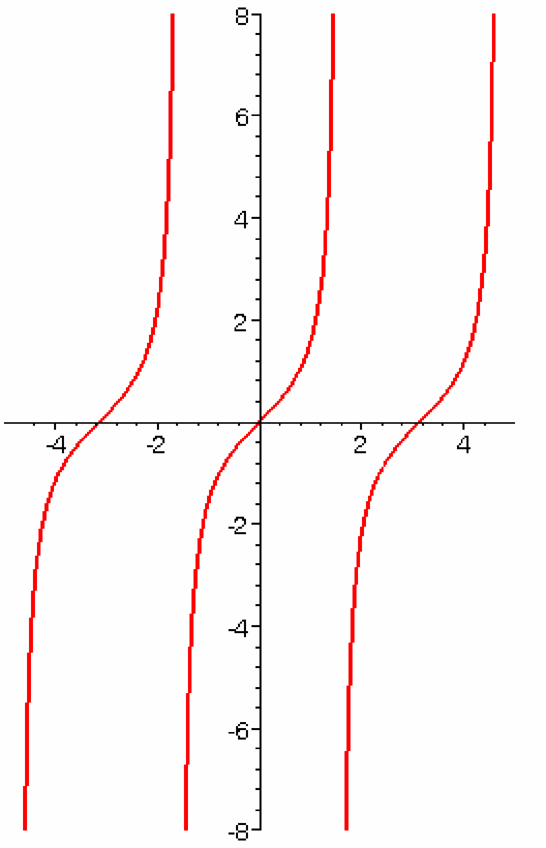
NEM NYOMTATÁSRA!

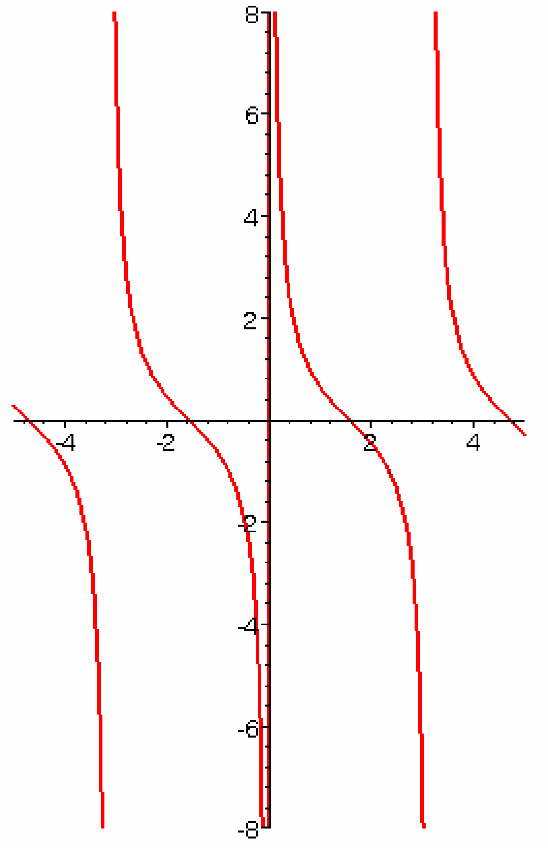
A tangens és a kotangens függvény

Definíció

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$





NEM NYOMTATÁSRA!

A szinusz hiperbolikusz függvény

Definíció

$$sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

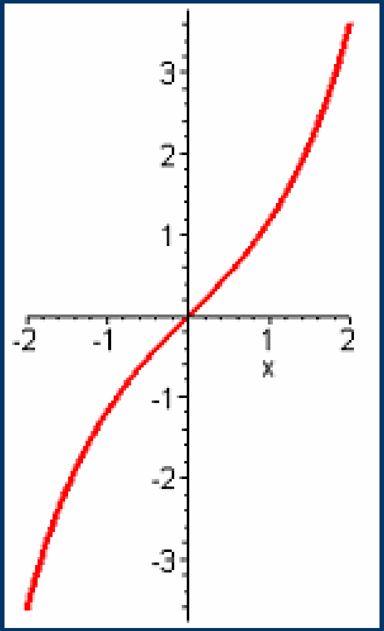
$x \in \mathbf{R}$

A szinusz hiperbolikusz függvény előállítása hatványsorral:

$$sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$sh(x) \approx x + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \dots$$

$x \to sh\ x$



NEM NYOMTATÁSRA!

A koszinusz hiperbolikusz függvény (láncgörbe)

Definíció

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

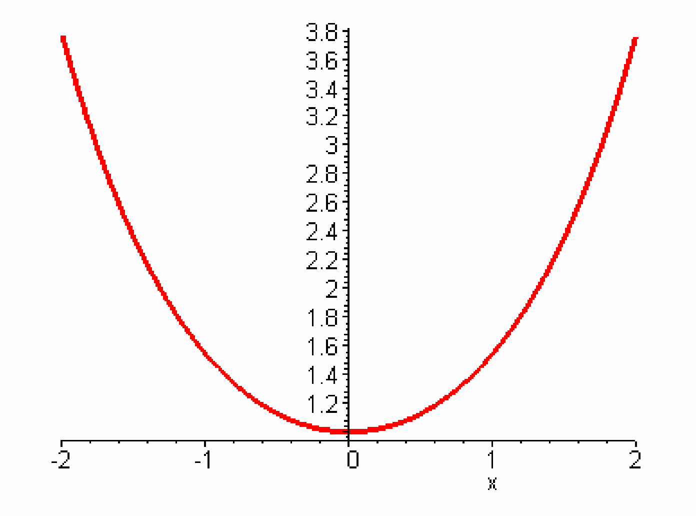
$x \in \mathbf{R}$

A koszinusz hiperbolikusz függvény előállítása hatványsorral:

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{ch}(x) \approx 1 + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \ldots$$

$$x \to \mathrm{ch}\ x$$



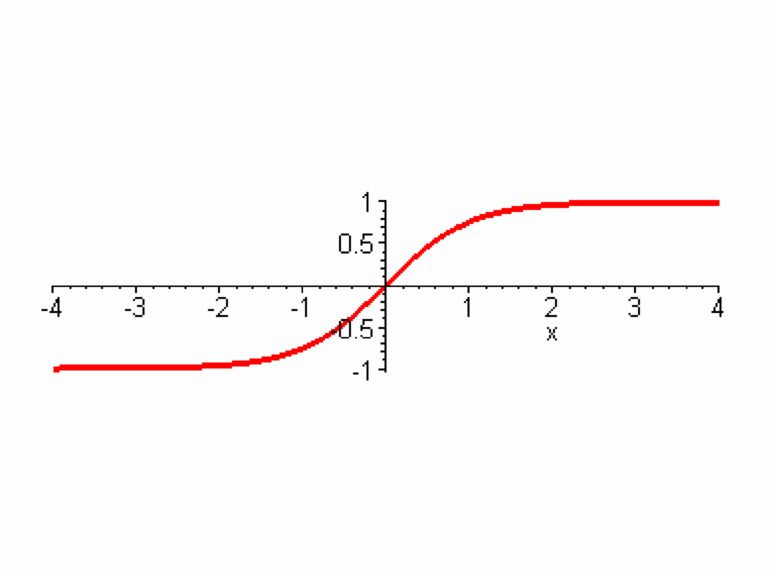
NEM NYOMTATÁSRA!

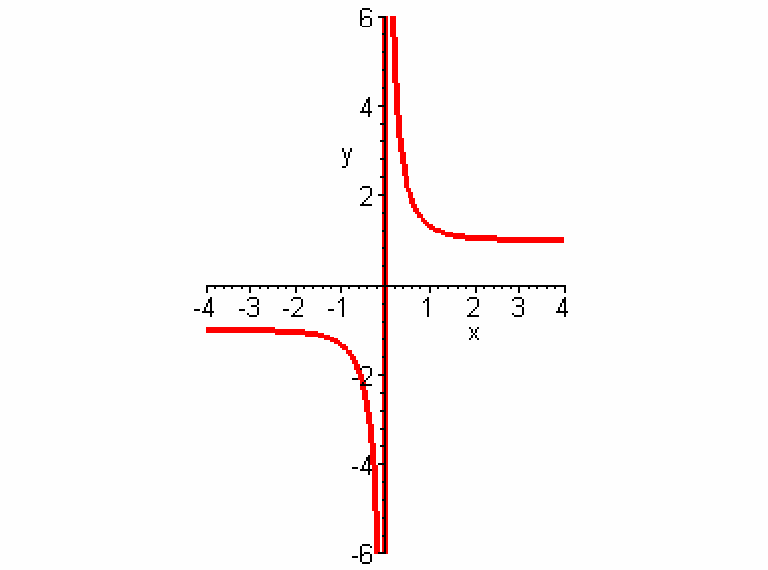
A tangens hiperbolikusz és a kotangens hiperbolikusz függvény

Definíció

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

$$\mathrm{cth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$$





NEM NYOMTATÁSRA!

A hiperbolikusz függvényekre vonatkozó azonosságok

	x+y	x-y	2x	x/2
sh	$\mathrm{shx}\cdot\mathrm{chy} + \mathrm{chx}\cdot\mathrm{shy}$	$\mathrm{shx}\cdot\mathrm{chy} - \mathrm{chx}\cdot\mathrm{shy}$	$2\cdot\mathrm{shx}\cdot\mathrm{chx}$	$\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
ch	$\mathrm{chx}\cdot\mathrm{chy} + \mathrm{shx}\cdot\mathrm{shy}$	$\mathrm{chx}\cdot\mathrm{chy} - \mathrm{shx}\cdot\mathrm{shy}$	$\mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x$	$\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
th	$\dfrac{\mathrm{thx}+\mathrm{thy}}{1+\mathrm{thx}\cdot\mathrm{thy}}$	$\dfrac{\mathrm{thx}-\mathrm{thy}}{1-\mathrm{thx}\cdot\mathrm{thy}}$	$\dfrac{2\mathrm{thx}}{1+\mathrm{th}^2x}$	$\pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{chx}-1}{\mathrm{chx}+1}}$
cth	$\dfrac{\mathrm{cthx}\cdot\mathrm{cthy}+1}{\mathrm{cthx}+\mathrm{cthy}}$	$\dfrac{\mathrm{cthx}\cdot\mathrm{cthy}-1}{\mathrm{cthx}-\mathrm{cthy}}$	$\dfrac{\mathrm{cth}^2x+1}{2\mathrm{cthx}}$	$\pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{chx}+1}{\mathrm{chx}-1}}$

A hiperbolikusz függvényekre vonatkozó azonosságok

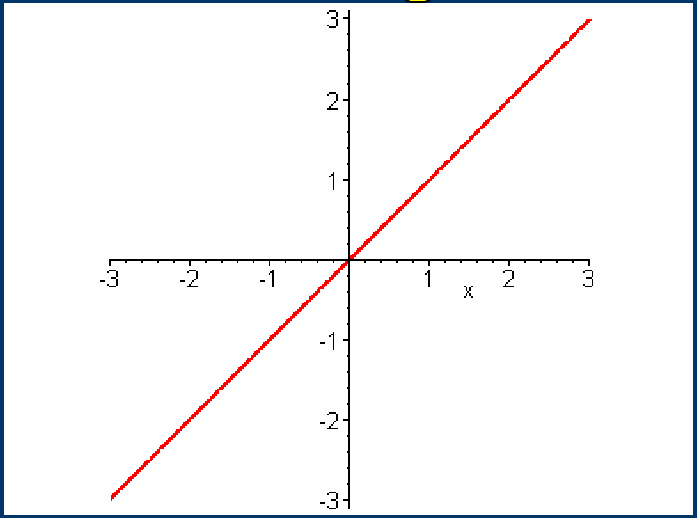
$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$	$1 - \mathrm{th}^2x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$
$\mathrm{arsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	$\mathrm{arsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
$\mathrm{arth}x = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$\mathrm{arth}x = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Kapcsolat a hiperbolikusz függvények között

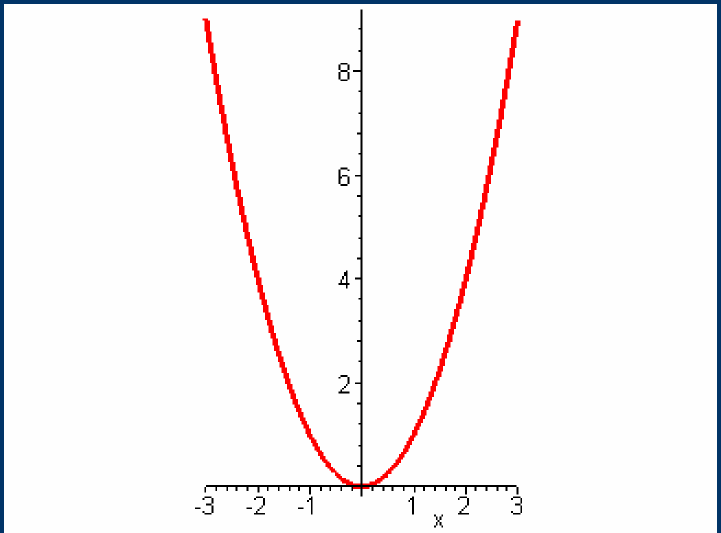
	sh	ch	th	cth
shx=	-	$\pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1}$	$\dfrac{\mathrm{th}x}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2 x}}$	$\dfrac{\pm 1}{\sqrt{\mathrm{cth}^2 x - 1}}$
chx=	$\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}$	-	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2 x}}$	$\dfrac{\pm\mathrm{cth}x}{\sqrt{\mathrm{cth}^2 x - 1}}$
thx=	$\dfrac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{1-\mathrm{sh}^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1}}{\mathrm{ch}x}$	-	$\dfrac{1}{\mathrm{cth}x}$
cthx=	$\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}}{\mathrm{sh}x}$	$\dfrac{\mathrm{ch}x}{\pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{th}x}$	-

$x \to x$

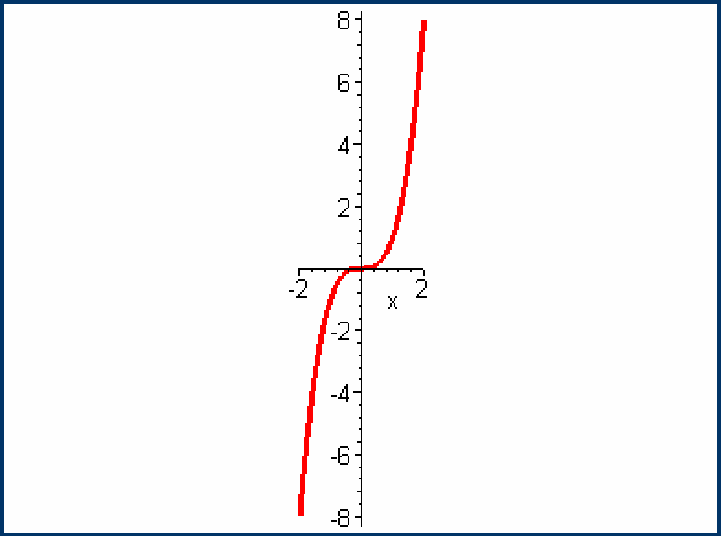


A hatványfüggvények

$x \to x^2$

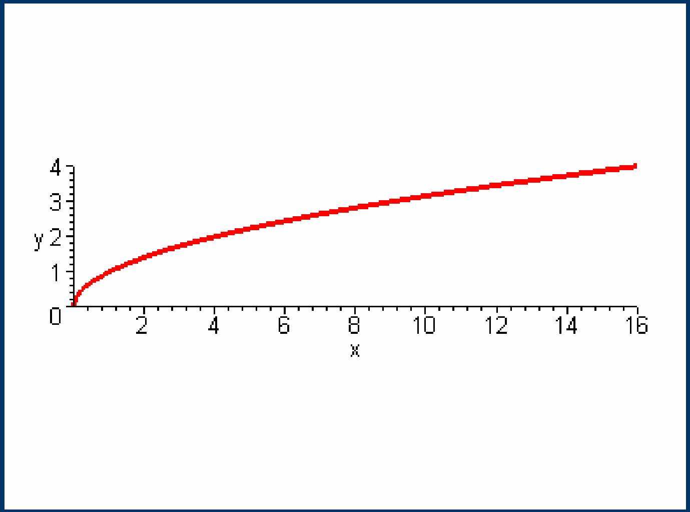


$x \to x^3$

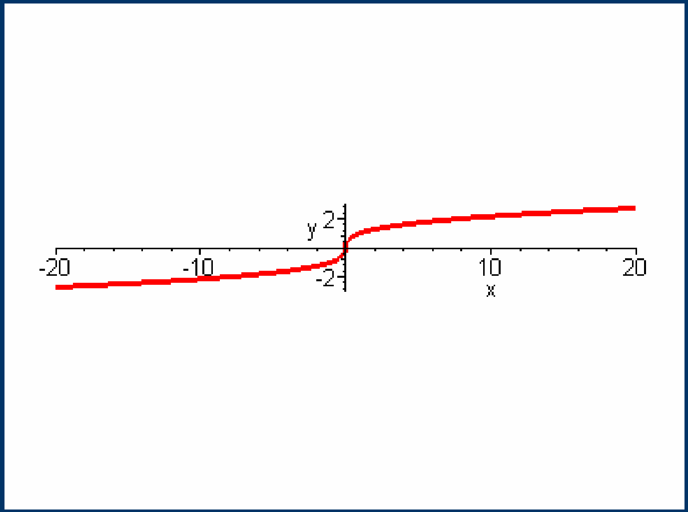


NEM NYOMTATÁSRA!

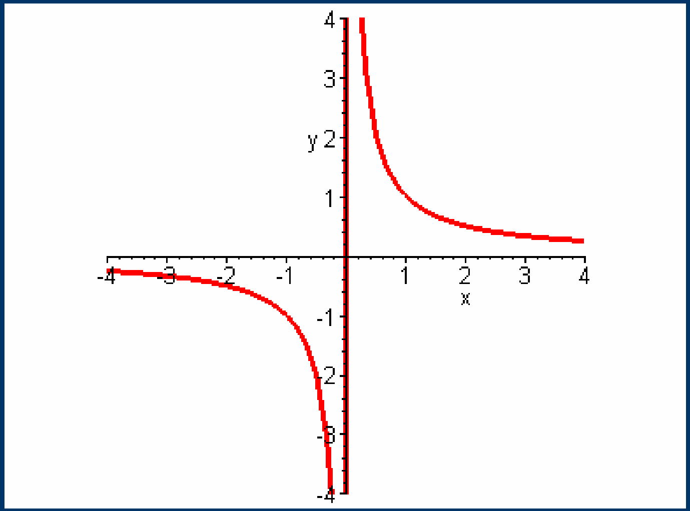
$x \to x^{1/2}$



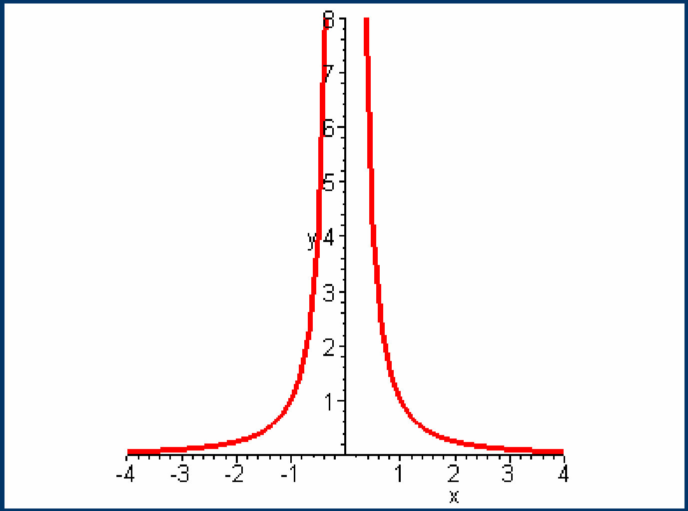
$x \to x^{1/3}$



$x \to x^{-1}$



$x \to x^{-2}$



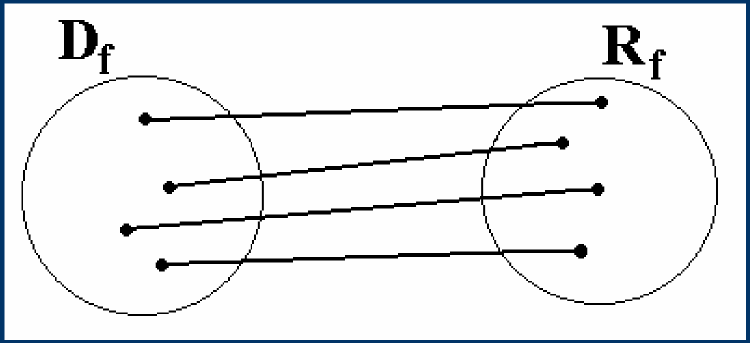
NEM NYOMTATÁSRA!

Inverzfüggvény (lásd a halmazok című fejezetben is)

A hatvány, az exponenciális, a trigonometrikus és a hiperbolikus függvények inverzei

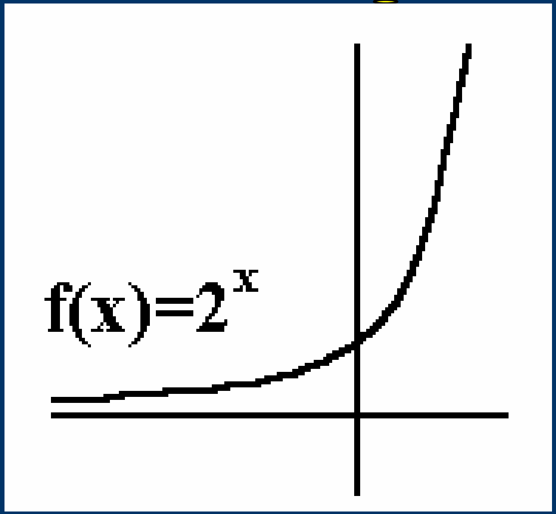
Definíció: invertálható függvény

Ha minden $y \in R_f$ elemhez pontosan egy olyan $x \in D_f$ elem létezik, melyre $f(x)=y$, akkor az f függvényt invertálható függvénynek nevezzük.



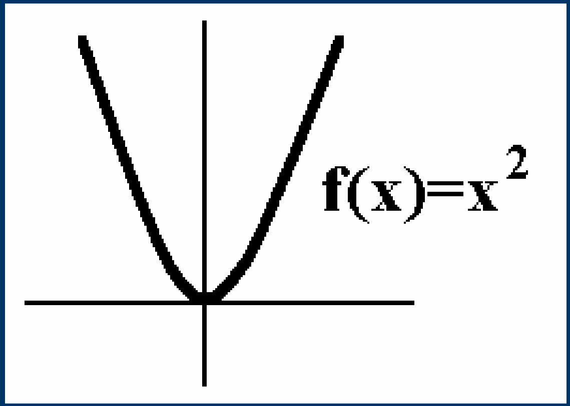
Példák

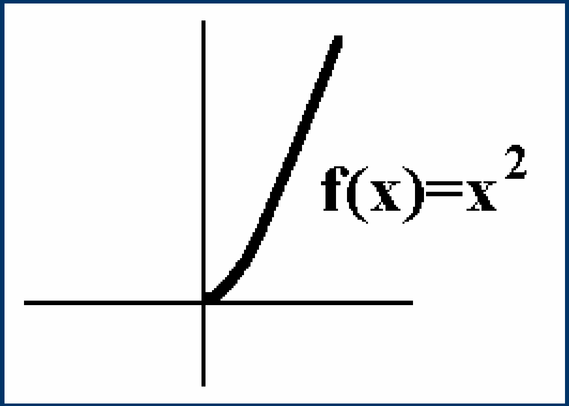
Az $f(x) = 2^x$, $D_f = \mathbb{R}$ függvény invertálható



Az $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ függvény nem invertálható

Az $f(x) = x^2$, $D_f = [0,+\infty[$ függvény invertálható





Definíció: inverzfüggvény

Ha f invertálható függvény, akkor azt a

$$g: R_f \rightarrow D_f$$

függvényt, melyre minden $x \in D_f$ esetén fennáll, hogy

$$g \circ f(x) = x$$

az f függvény inverzfüggvényének nevezzük.

Jelölés

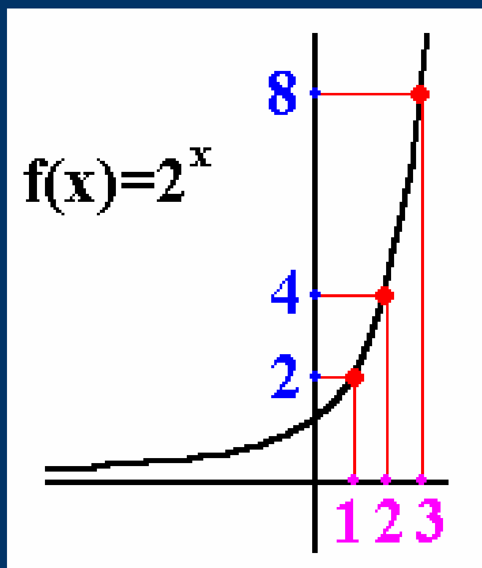
$$g = f^{-1}$$

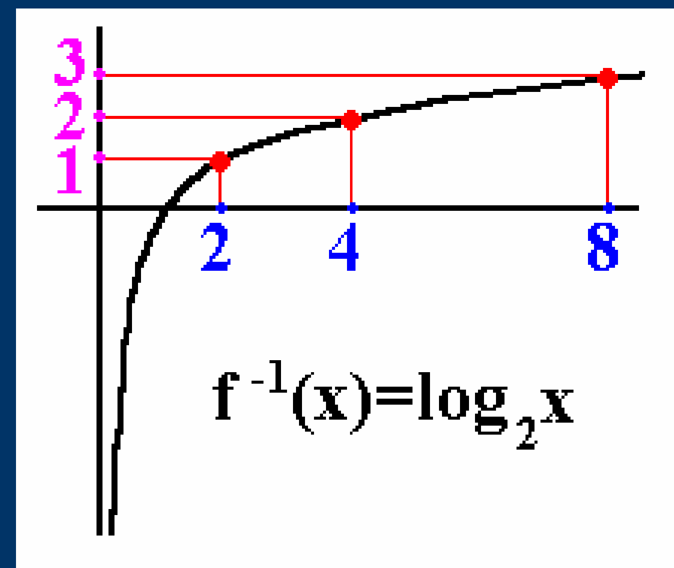
NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$f(x) = 2^x$

$f^{-1}(x) = \log_2 x$





$D_f = R \qquad R_f =]0,+\infty[$

$D_{f^{-1}} =]0,+\infty[\qquad R_{f^{-1}} = R$

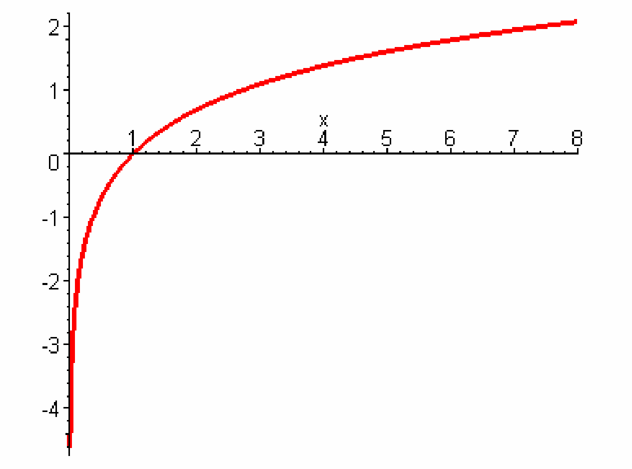
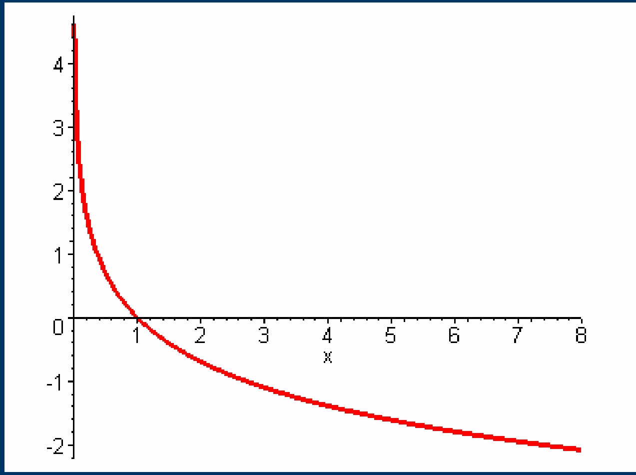
NEM NYOMTATÁSRA!

Logaritmus függvények

Definíció

Legyen 0<a∈R, a≠1.

Az $x \to \log_a x$ függvény a valós $x \to a^x$ exponenciális függvény inverze.

$x \to \log_a x$, ha $a > 1$	$x \to \log_a x$, ha $0 < a < 1$
	

NEM NYOMTATÁSRA!

Kapcsolat függvény és inverze között

A definíció szerint

$$f^{-1} \circ f(x) = x \qquad f \circ f^{-1}(x) = x$$

azaz, ha egy függvényből és az inverzéből összetett függvényt képezünk, akkor az identikus függvényt kapjuk.

Példa

$$f(x) = 2^x \qquad f^{-1}(x) = \log_2 x$$

$$f^{-1} \circ f(x) = \log_2 2^x = x$$

$$f \circ f^{-1}(x) = 2^{\log_2 x} = x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Kapcsolat függvény és inverze között

Függvény és inverze esetén az értelmezési tartományok és az értékkészletek felcserélődnek:

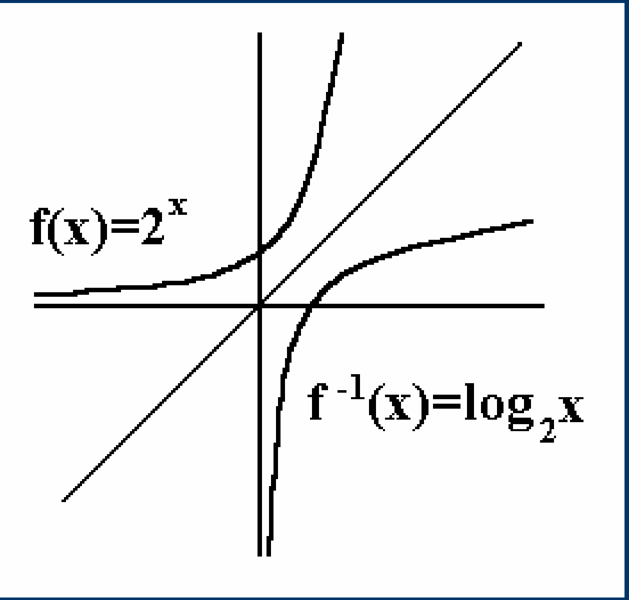
$$D_f = R_{f^{-1}} \qquad R_f = D_{f^{-1}}$$

Példa

$$f(x)=2^x \qquad f^{-1}(x)=\log_2 x$$

$$D_f = R_{f^{-1}} = R$$

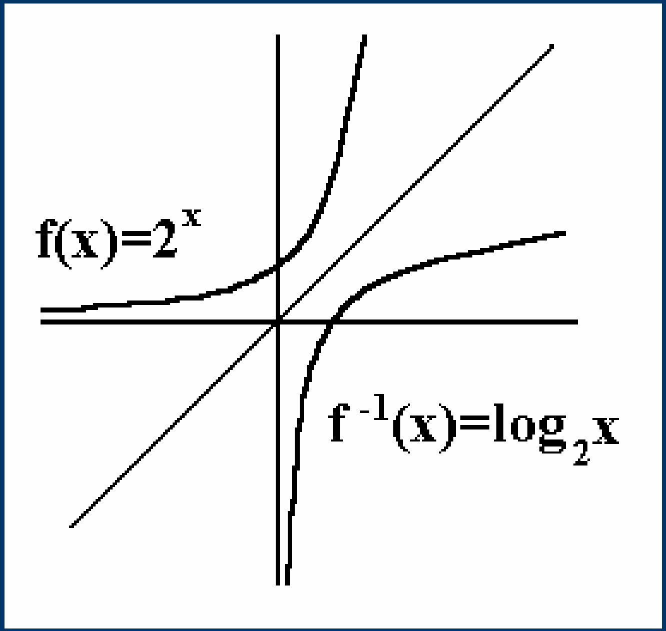
$$R_f = D_{f^{-1}} =]0,+\infty[$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Kapcsolat függvény és inverze között

f és f $^{-1}$ grafikonjai egymás tükörképei az x→x egyenesre vonatkozóan



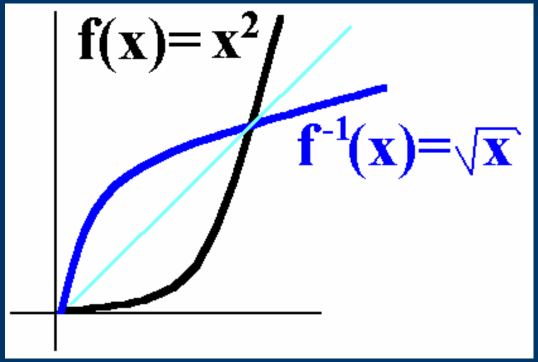
f és f $^{-1}$ monotonitása azonos

Hatványfüggvény inverze

$$f(x) = x^n \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbf{R},\ n \neq 0)$$

Példa

$$\mathbf{f(x) = x^2} \quad \mathbf{D_f = [0, \infty[}$$



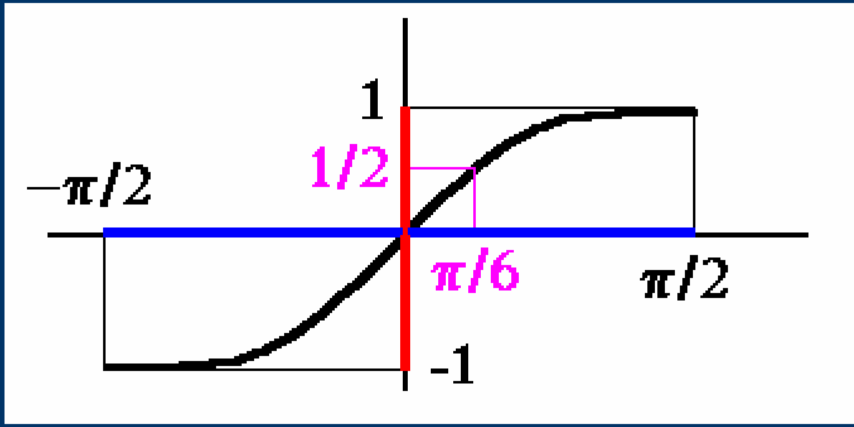
$$\sqrt{x^2} = x \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

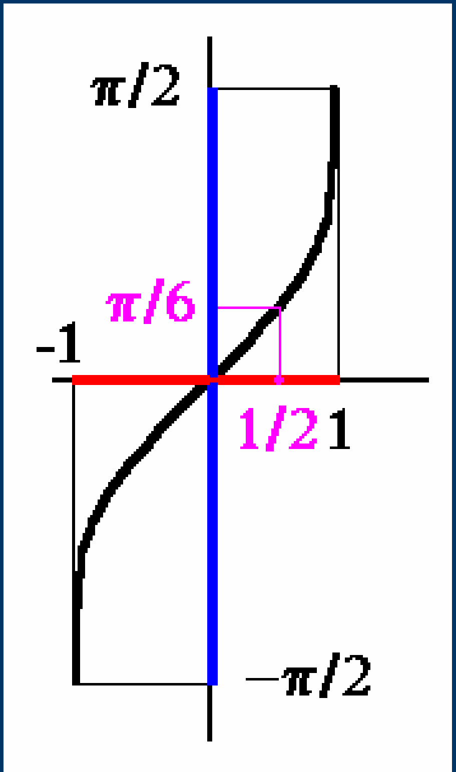
NEM NYOMTATÁSRA!

A trigonometrikus függvények inverze

f(x)= sinx

f^{-1}(x)= arcsinx



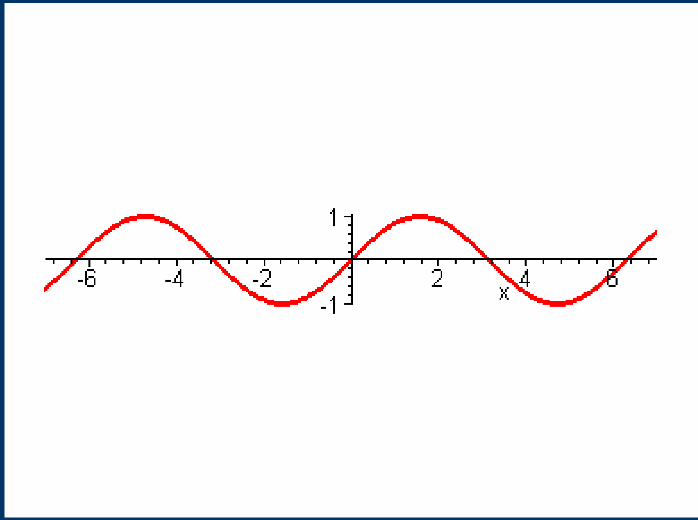


$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

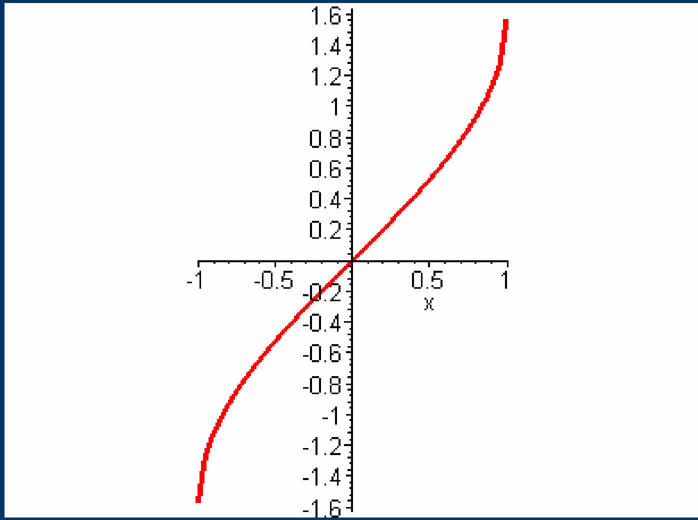
$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

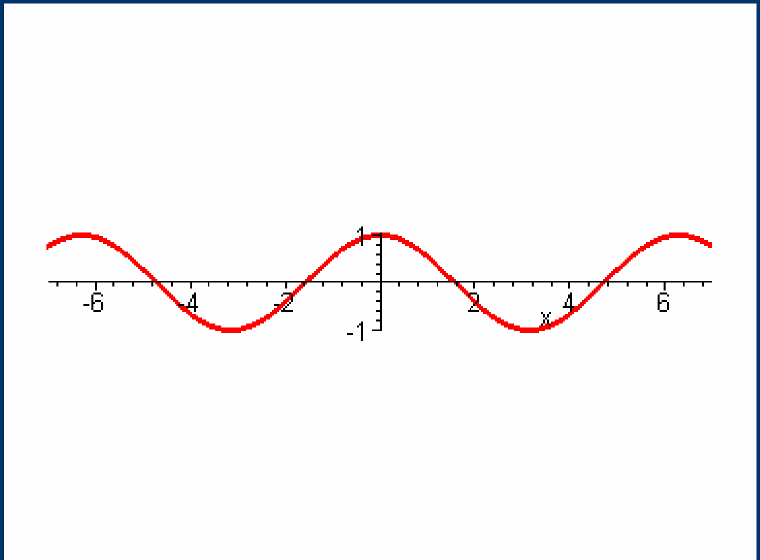
x → sin x



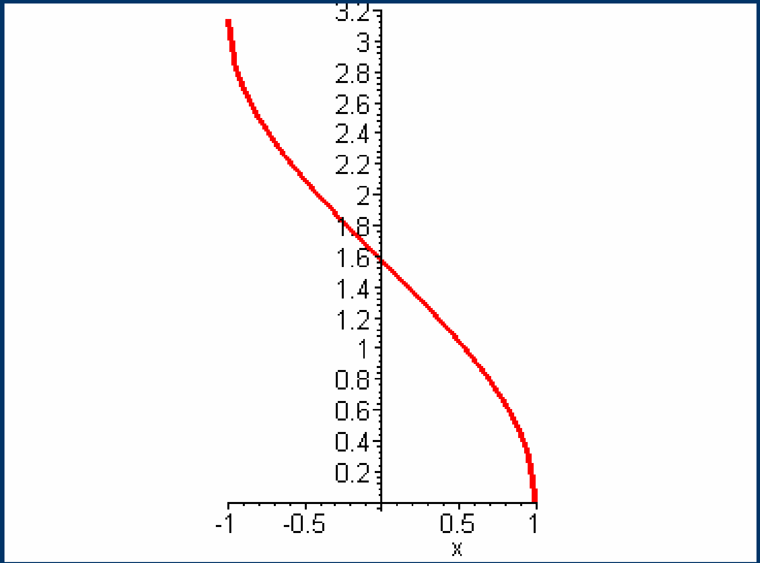
x → arcsin x



x → cos x

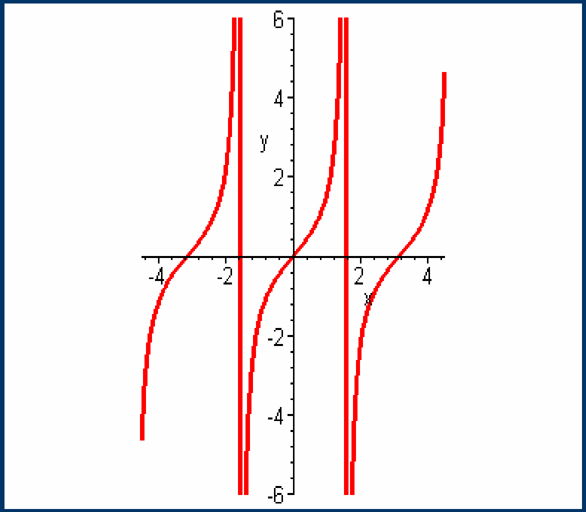


x → arccos x

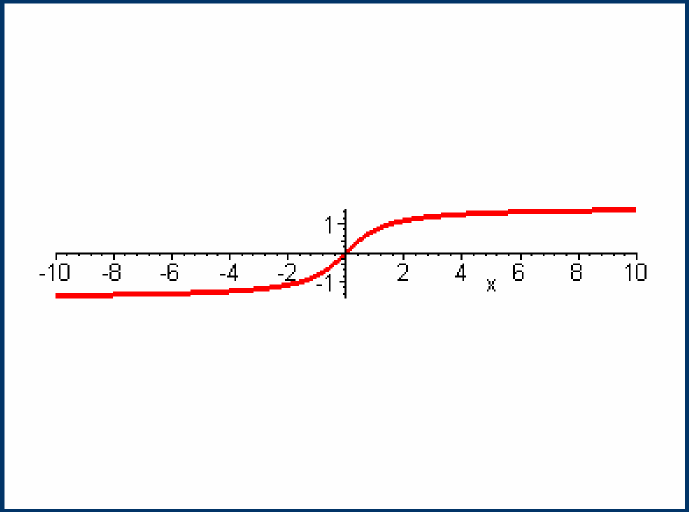


NEM NYOMTATÁSRA!

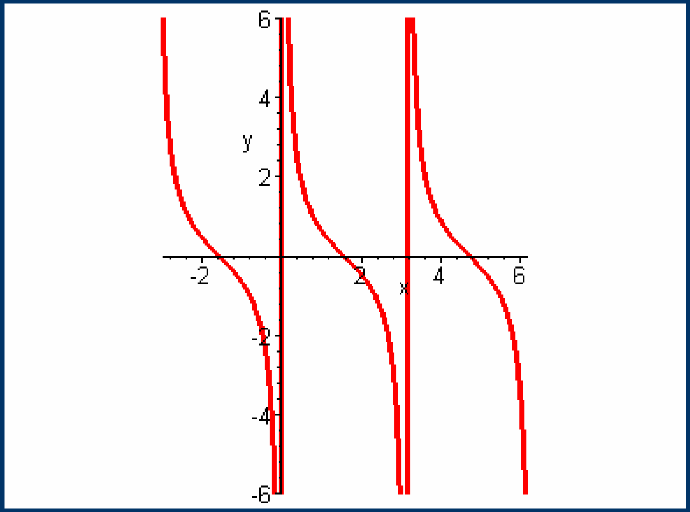
x → tg x



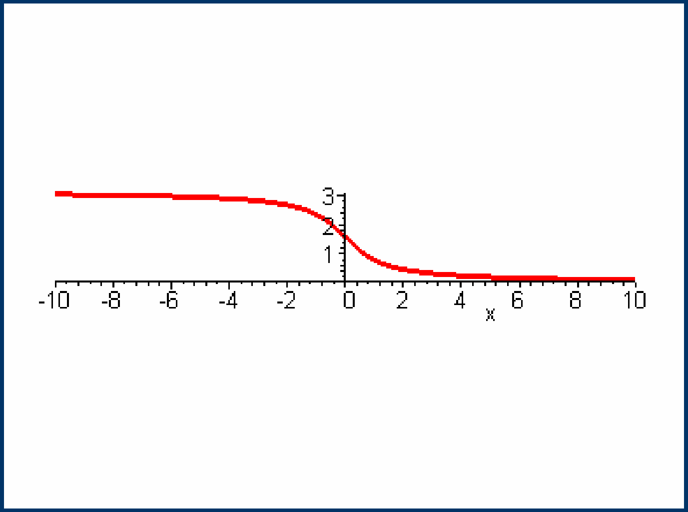
x → arctg x



x → ctg x



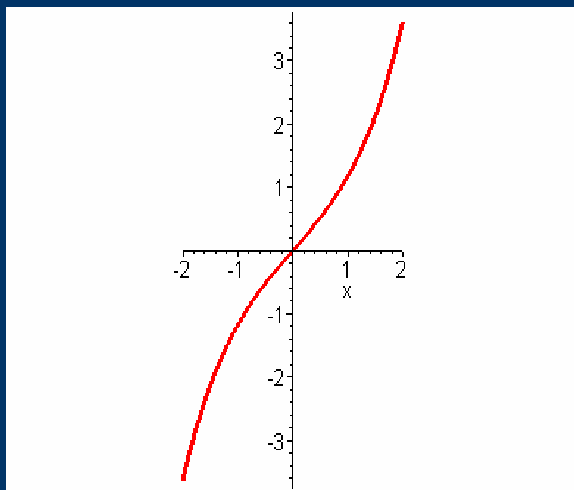
x → arcctg x



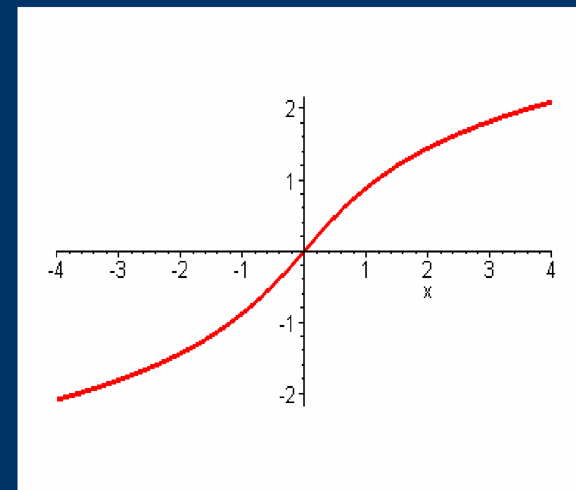
NEM NYOMTATÁSRA!

A hiperbolikusz függvények inverzei

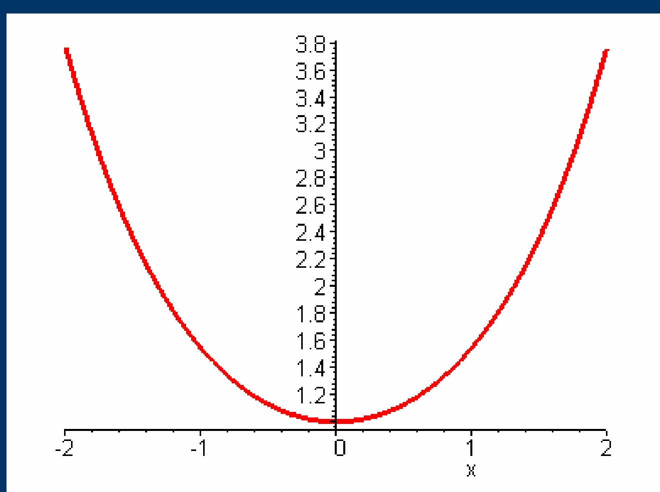
x→sh x



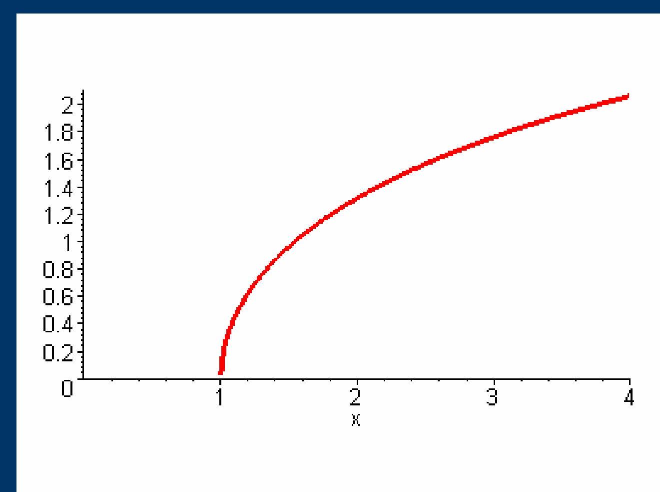
x→arsh x



x→ ch x

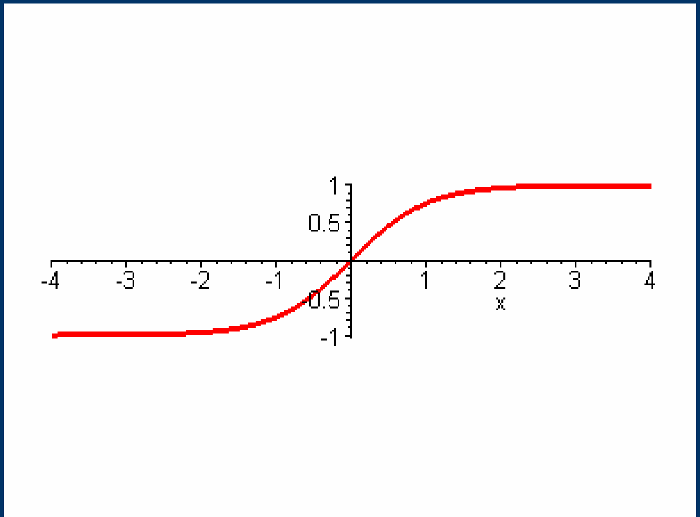


x→ arch x

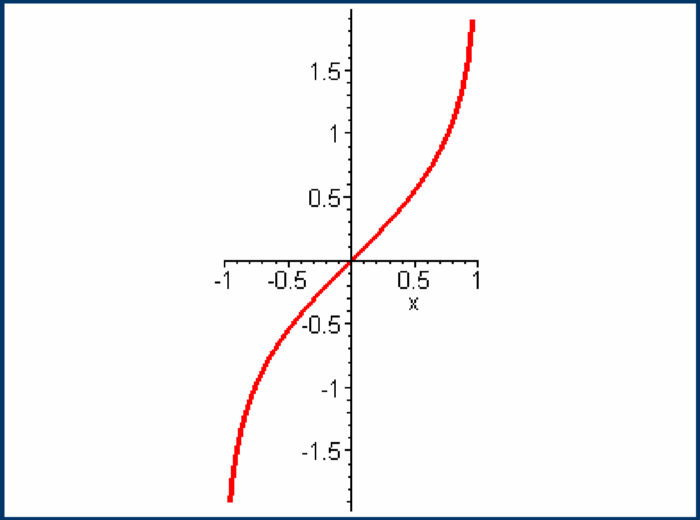


NEM NYOMTATÁSRA!

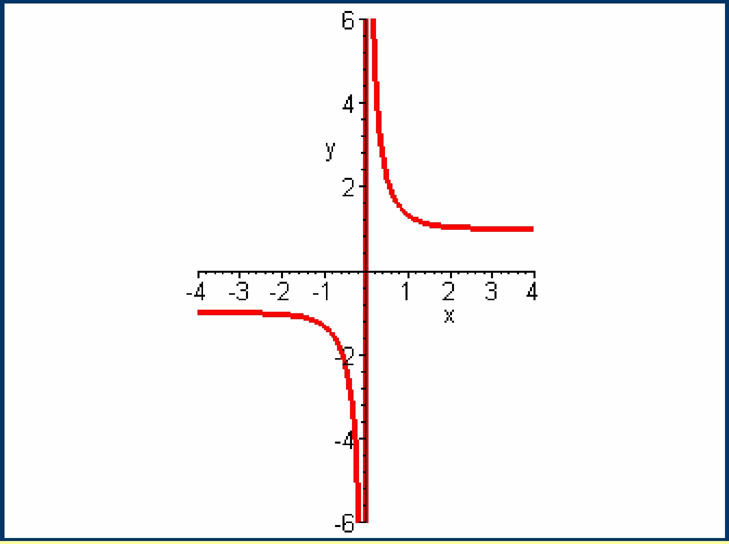
x→th x



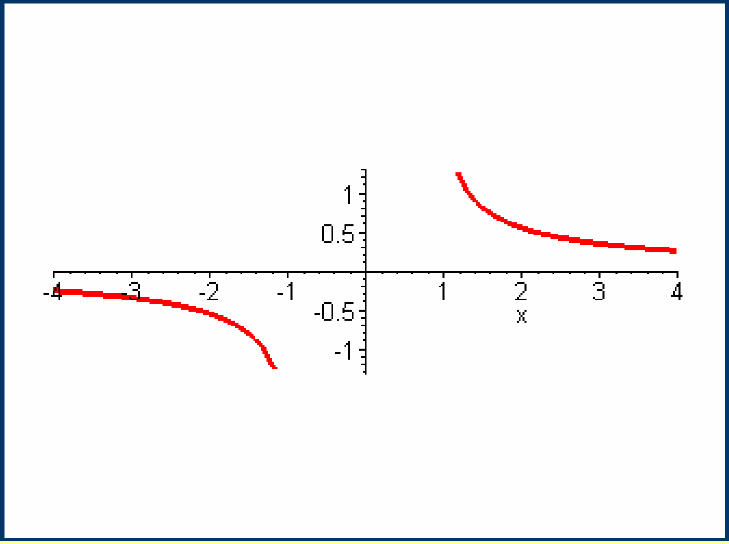
x→arth x



x→ cth x



x→ arcth x



Polinomfüggvények

Definíció

A polinomok a változó nem negatív egész kitevős hatványainak valós számokkal képzett lineáris kombinációi

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_n \cdot x^n$$

Polinom fokszáma: n

Polinom főegyütthatója: a_n

NEM NYOMTATÁSRA!

A polinomok a „legegyszerűbben kezelhető" függvények, ezért sokszor célszerű bonyolultabb függvényeket polinomokkal közelíteni

(lásd: interpolációs polinomok, Taylor polinomok a differenciálszámításnál, közelítő integrálás a Simpson formulával, stb.)

A polinomok vizsgálatában a legalapvetőbb feladat a zérushelyek (gyökök) megkeresése, a gyöktényezős felbontás előállítása és az előjelvizsgálat.

Tétel: gyöktényezős felbontás

Minden (legalább első fokú) polinom egyértelműen felbontható elsőfokú és valós gyökkel nem rendelkező másodfokú polinomok szorzatára.

A felbontásban szereplő elsőfokú tényezők a gyöktényezők, melyek egy-egy gyökhöz tartoznak az alábbiak szerint:

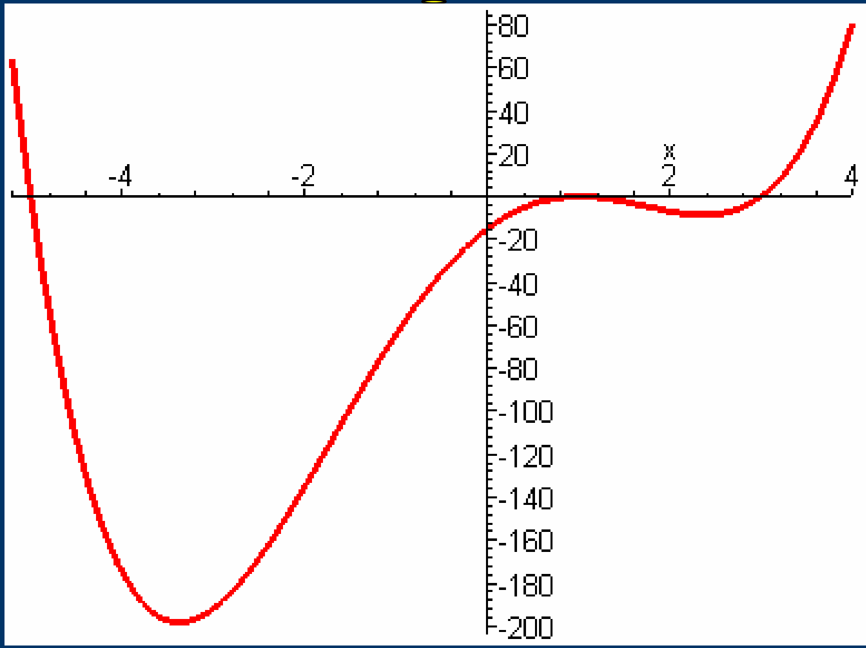
x_0 pontosan akkor gyöke egy polinomnak, ha az $(x-x_0)$ gyöktényező szerepel a felbontásban.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$P(x) = x^4 - 18x^2 + 32x - 15 =$$

$$= (x-3) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)$$



gyökök: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -5$

Előjelvizsgálat ***(lásd: folytonos függvények előjelváltása):***

	x<-5	x=-5	-5<x<1	x=1	1<x<3	x=3	3<x
x-3	-	-	-	-	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
x+5	-	0	+	+	+	+	+
P(x)	+	0	-	0	-	0	+

NEM NYOMTATÁSRA!

Másodfokú polinom gyöktényezős felbontása

A $P(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ másodfokú polinom gyökttényezős felbontása az $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ másodfokú polinomegyenlet megoldásával kapható meg az alábbiak szerint:

1. eset: **ha az egyenletnek két különböző gyöke van: x_1 és x_2, akkor**

$$P(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

2. eset: **ha az egyenletnek egy (pontosabban két egybeeső) gyöke van: x_0, akkor**

$$P(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = a\cdot(x-x_0)^2$$

3. eset: **ha az egyenletnek nincs gyöke, akkor a polinom nem bontható elsőfokú polinomok szorzatára**

Másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ másodfokú polinomegyenlet gyökeit adja a következő formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A $b^2 - 4ac$ kifejezés (diszkrimináns) értékétől függően a másodfokú polinomegyenletnek 0, 1, vagy 2 db gyöke van.

Megjegyzés

A harmad- és a negyedfokú polinomegyenlethez van megoldóképlet, de lényegesen bonyolultabb a másodfokúénál.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Magasabb fokú polinomok gyökeinek megkeresésére különféle módszerek vannak. Például: egy gyök ismeretében a megoldandó egyenlet fokszáma eggyel csökkenthető a polinomosztás alkalmazásával.

Példa

Határozzuk meg a $P(x) = x^3-x^2-x+1$ harmadfokú polinom gyökeit, ill. a gyöktényezős felbontását!

Ehhez az $x^3-x^2-x+1=0$ harmadfokú polinomegyenletet kell megoldani.

NEM NYOMTATÁSRA!

Mivel x=1 gyöke a polinomnak a gyöktényezős felbontásukban szerepel az (x-1) gyöktényező, vagyis P felbontása:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x)$$

ahol Q(x) egy másodfokú polinom, amit a

$$Q(x) = P(x) / (x-1)$$

polinomosztással tudunk meghatározni:

$$(x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) = x^2 - 1 = Q(x)$$

$$\begin{array}{ll} (-) & \underline{x^3 - x^2 \qquad\qquad} \\ & \qquad\qquad -x + 1 \\ (-) & \qquad\qquad \underline{-x + 1} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Így a P polinom felbontása:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 1)$$

A $Q(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom tovább bontható, így a P gyöktényezős felbontása:

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$$

A gyökök pedig:

$x_1 = 1$ (kétszeres gyök), a megfelelő gyöktényező: $(x - 1)$

$x_2 = -1$ (egyszeres gyök), a megfelelő gyöktényező: $(x + 1)$

Interpoláció
(Lagrange-féle interpolációs polinomok)

Ha adott pontokra illesztünk egy függvényt meghatározott függvényosztályból, akkor interpolációról beszélünk.

Interpolációt alkalmazunk például, ha két mennyiség összefüggésének vizsgálatára végzünk méréseket, és egy függvényosztályból keresünk egy olyan függvényt, mely a mérési eredményeknek megfelelő pontokon átmegy.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: Lagrange féle interpolációs polinomok

Ha adott n darab

$$(x_1,y_1),\ \dots\ ,\ (x_n,y_n)$$

alappont úgy, hogy $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, akkor pontosan egy olyan legfeljebb (n-1)-edfokú L polinom létezik, mely illeszkedik mindegyik pontra.

Ezt a polinomot (n-1)-edfokú interpolációs polinomnak nevezzük.

Tétel: Lagrange féle interpolációs polinomok meghatározása

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot g_i(x)$$

ahol

$$g_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Példa

x_i	0	1	2	3
y_i	0	3	1	3

$$g_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

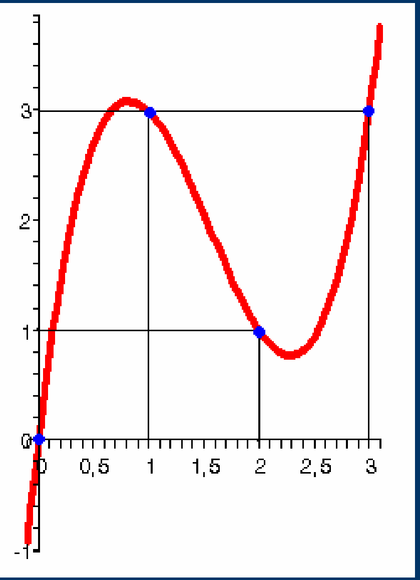
$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot g_i(x)$$

$$g_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6}$$

$$g_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2}$$

$$g_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2}$$

$$g_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$$



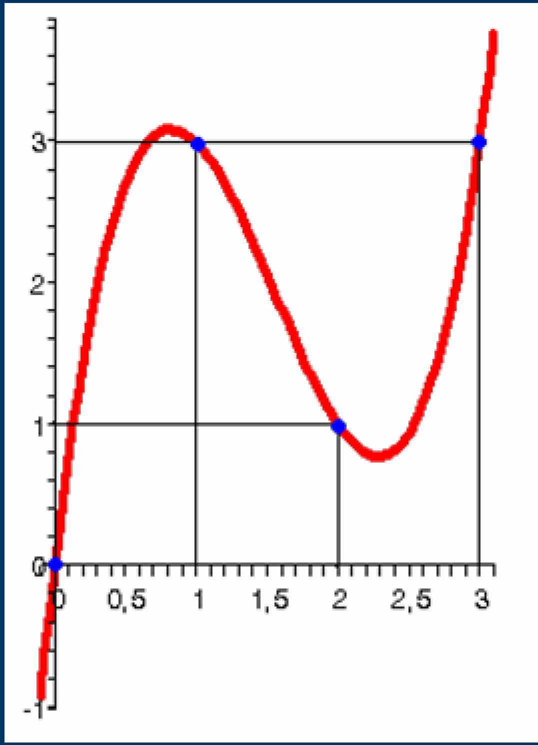
$$L(x) = y_1 g_1(x) + y_2 g_2(x) + y_3 g_3(x) + y_4 g_4(x) =$$

$$= 0 \cdot \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} + 3 \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} + 1 \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} + 3 \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} =$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$=0\cdot\frac{x^3-6x^2+11x-6}{-6}+3\cdot\frac{x^3-5x^2+6x}{2}+1\cdot\frac{x^3-4x^2+3x}{-2}+3\cdot\frac{x^3-3x^2+2x}{6}=$$

$$=\frac{3}{2}x^3-7x^2+\frac{17}{2}x$$



A megadott pontokra illeszkedő harmadfokú polinom:

$$L(x)=\frac{3}{2}x^3-7x^2+\frac{17}{2}x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Valós együtthatós polinomegyenletek komplex gyökei

Számos probléma megoldása módszere épül polinomok gyökeinek meghatározására. E módszerek jelentős részében a komplex gyökök is szolgáltatnak eredményt akkor is, ha az adott problémának csak a valós megoldásait keressük.

Ilyen esettel találkozhatunk például a lineáris differenciálegyenletek megoldásakor.

NEM NYOMTATÁSRA!

Racionális törtfüggvények

Definíció

A racionális törtfüggvények a két polinom hányadosaként előálló függvények

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Megjegyzés: szakadási helyek

A Q polinom zérushelyeinél az f racionális törtfüggvények szakadása van, mely kétféle lehet: hézagpont, vagy pólus *(lásd a folytonosság c. részt)*.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: racionális törtfüggvény, szakadási helyek

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+3x}{x^3-x^2}=\frac{x(x-1)(x-3)}{x^2(x-1)}$$

A nevező gyöktényezős felbontásából látható, hogy az f függvénynek az x=0 és az x=1 helyeken van szakadása.

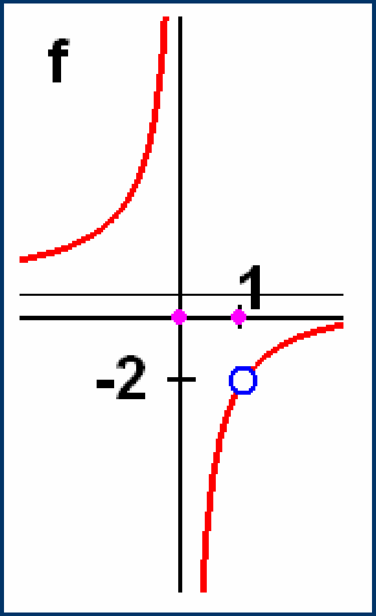
A tört „egyszerűsítésével” a következő függvény adódik:

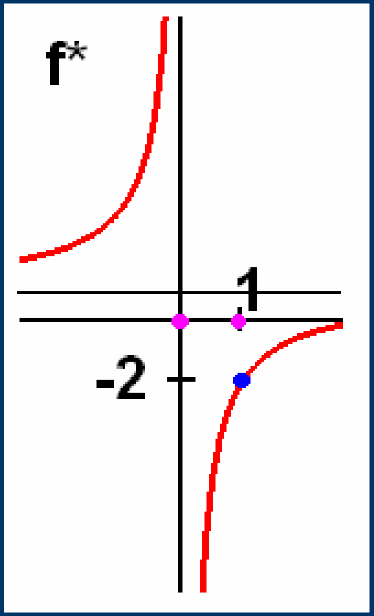
$$f^*(x)=\frac{x-3}{x}=1-\frac{3}{x}$$

Vegyük észre, hogy az f és az f* függvények között csupán annyi a különbség, hogy az f* értelmezve van az x=1 helyen, míg az f nincs.

$$f(x)=\frac{x(x-1)(x-3)}{x^2(x-1)}$$

$$f^*(x)=\frac{x-3}{x}=1-\frac{3}{x}$$





Az f függvénynek az x=1 helyen hézagpontja van, itt az f* függvény értelmezve van (és folytonos), míg az x=0 helyen pólusa van, itt az f* függvény sincs értelmezve.

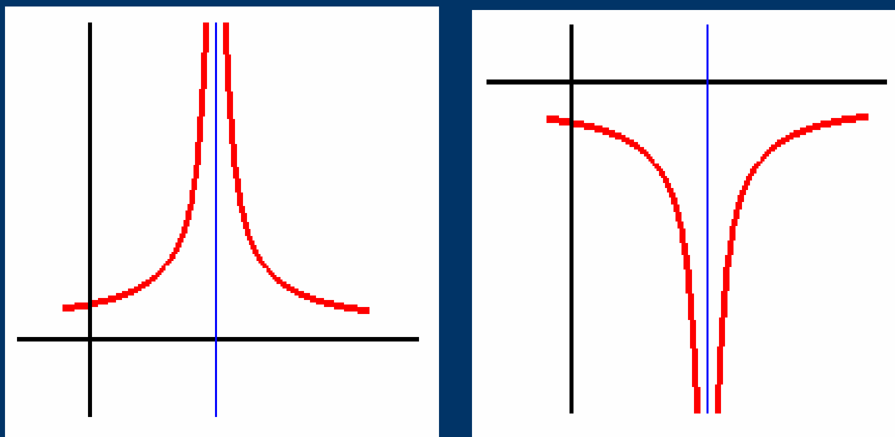
Az, hogy egy f racionális törtfüggvénynek az x_0 szakadási helyén hézagpontja vagy pólusa van attól függ, hogy a leegyszerűsítéssel nyert f* függvény nevezőjében megmarad-e az $(x-x_0)$ gyöktényező:

ha nem marad meg (vagyis, ha az f* függvény már folytonos lesz az x_0 helyen), akkor f-nek az adott helyen hézagpontja van *(ezt a folytonosság témakörben megszüntethető szakadásnak fogjuk nevezni)*

ha megmarad (vagyis, ha az f* függvénynek is szakadási helye x_0), akkor f-nek az adott helyen pólusa van.

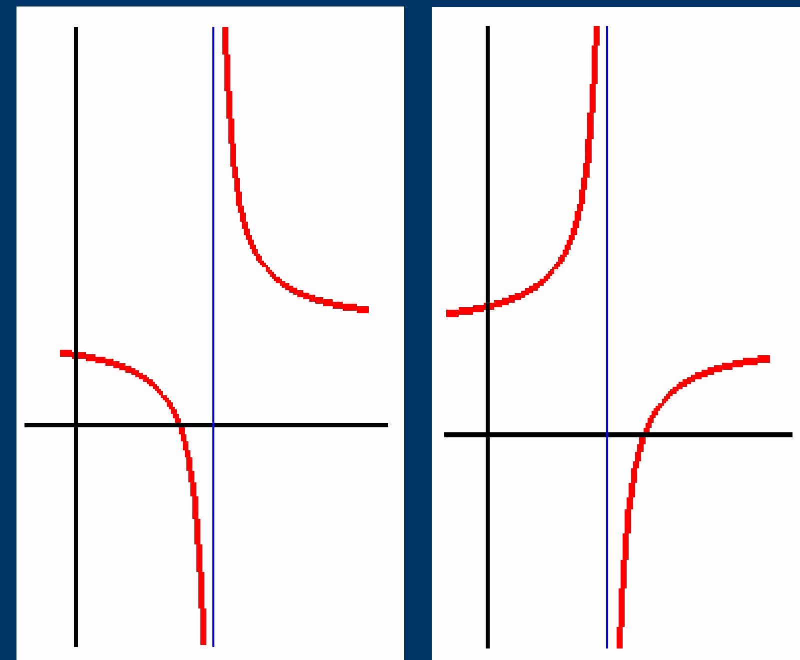
NEM NYOMTATÁSRA!

páros pólus



ha a gyöktényező az f* függvény nevezőjében **páros hatványon marad**

páratlan pólus



ha a gyöktényező az f* függvény nevezőjében **páratlan hatványon marad**

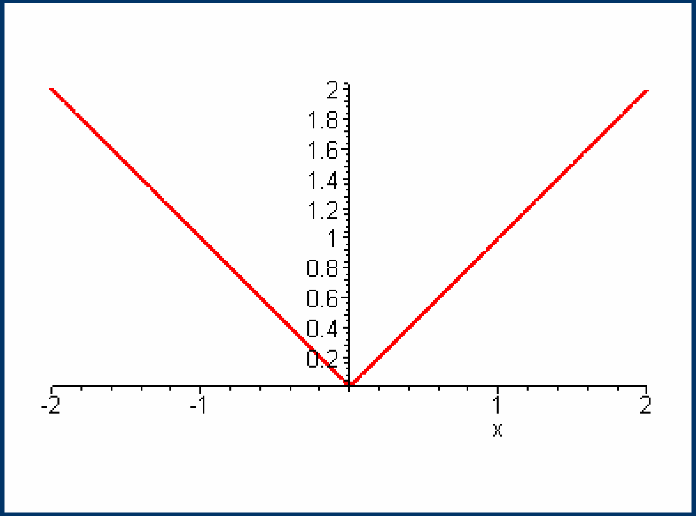
Az abszolút érték függvény és az előjel függvény

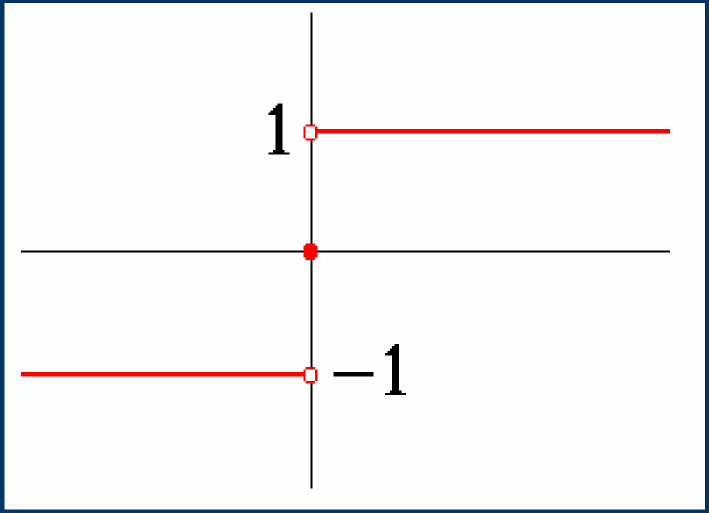
$$|x| = \begin{cases} x \;, \text{ha } x \geq 0 \\ -x\,, \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ha } x > 0 \\ 0, \text{ha } x = 0 \\ -1, \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$x \to |x|$

$x \to \operatorname{sgn} x$



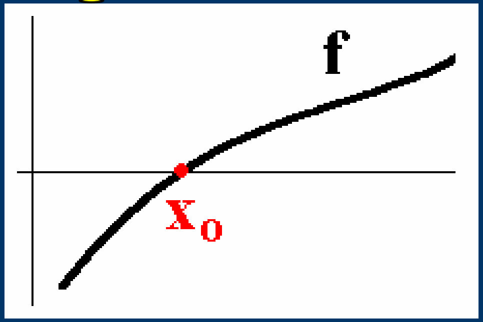


A valós függvények néhány tulajdonsága

Az ebben a részben szereplő függvények értelmezési tartománya legyen R egy tetszőleges részhalmaza.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: zérushely



Az $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek zérushelye van az $x_o \in D$ helyen, ha $f(x_o) = 0$.

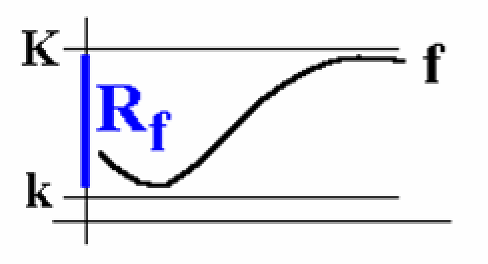
Megjegyzés

A matematikai problémák jelentős része visszavezethető függvény zérushelyeinek megkeresésére (egyenlet megoldására).

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: korlátosság

Az f:D→R függvény felülről *[alulról]* korlátos, ha az értékkészlete felülről *[alulról]* korlátos halmaz.



Definíció: korlát

Az értékkészlet felső korlátja / pontos felső korlátja (sup) / alsó korlátja / pontos alsó korlátja (inf) a függvény ugyanolyan jellegű korlátja.

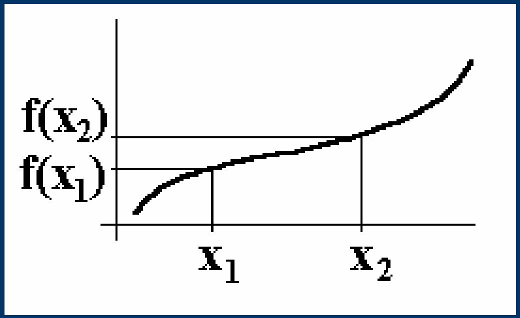
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: monotonitás

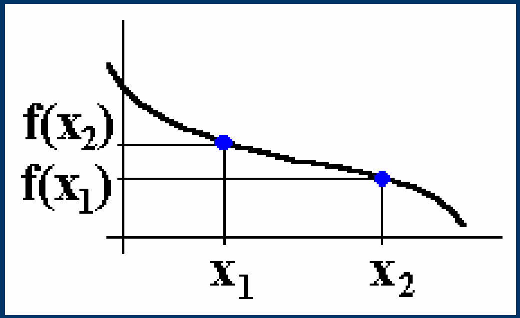
Az $f:D \to \mathbb{R}$ függvény $\left\{\begin{array}{l}\text{monoton növekvő}\\ \text{monoton csökkenő}\\ \text{szigorúan monoton növekvő}\\ \text{szigorúan monoton csökkenő}\end{array}\right\}$

ha a $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \left\{\begin{array}{c}\leq\\ \geq\\ <\\ >\end{array}\right\} f(x_2)$.

szigorúan monoton növekvő függvény



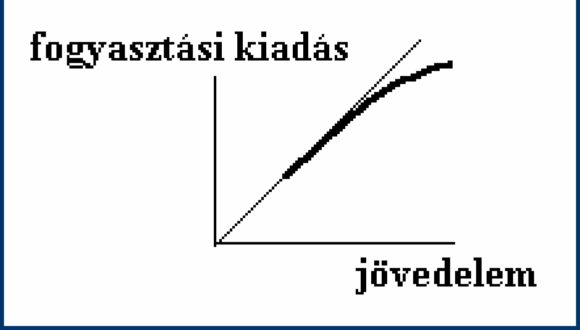
szigorúan monoton csökkenő függvény



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

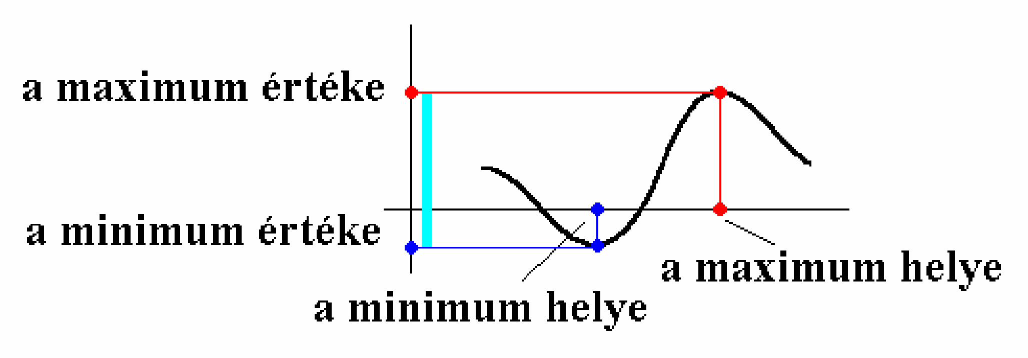
A fogyasztási függvény tipikusan növekvő függvény, hiszen nagyobb jövedelem általában nagyobb fogyasztási kiadást eredményez.

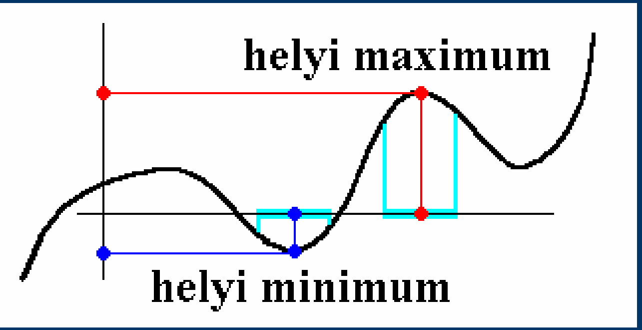


NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: szélsőérték (maximum, minimum)

Az f:D→R függvénynek maximuma *[minimuma]* van az $x_0 \in D$ helyen, ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legnagyobb *[legkisebb]* eleme.



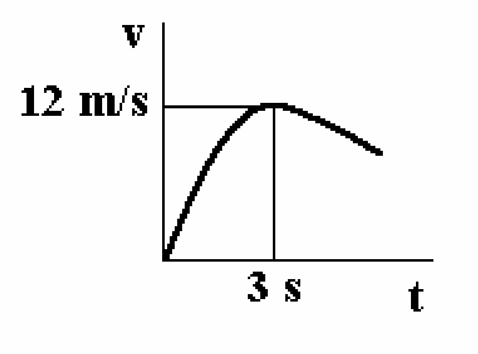


Definíció: helyi (lokális) szélsőérték

Az f:D→R függvénynek helyi maximuma *[minimuma]* van az $x_0 \in D$ helyen, ha x_0-nak van olyan U környezete, melyben az f függvénynek maximuma *[minimuma]* van az x_0 helyen.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa



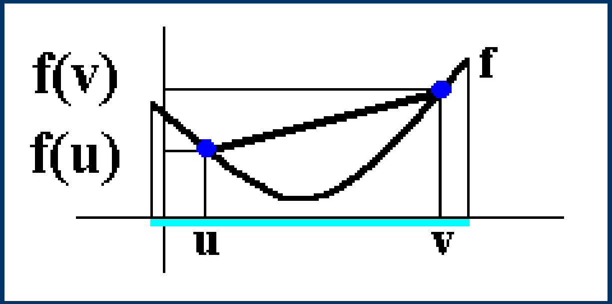
Egy sebesség-idő függvény: **a sebesség 3s-ig növekszik, itt eléri a maximumát (12 m/s), utána csökken.**

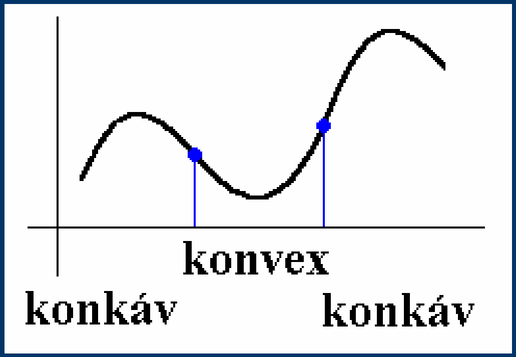
Megjegyzés

Szemléletesen fogalmazva: a helyi szélsőérték-helyek a függvény különböző monotonitású szakaszait választják el egymástól.

Definíció: konvexitás

Az f:I→R függvény konvex *[konkáv]*, ha az I intervallum bármely két u<v eleme esetén az (u,f(u)) és a (v,f(v)) pontokat összekötő szakasz (húr) az f függvény felett *[alatt]* halad.





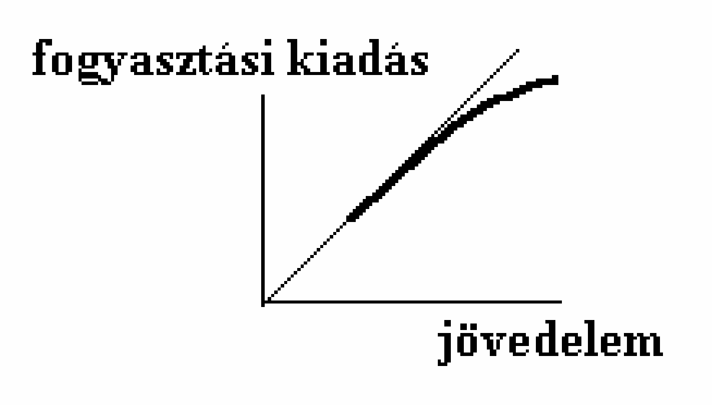
Definíció: inflexió

Az f:D→R függvénynek az x∈D helyen az inflexiós pontja van, ha van az x-nek olyan]x-ε,x+ε[környezete, hogy az f függvénynek az]x-ε,x] intervallumon konvex *[konkáv]*, míg az [x,x+ε[intervallumon konkáv *[konvex]*.

NEM NYOMTATÁSRA!

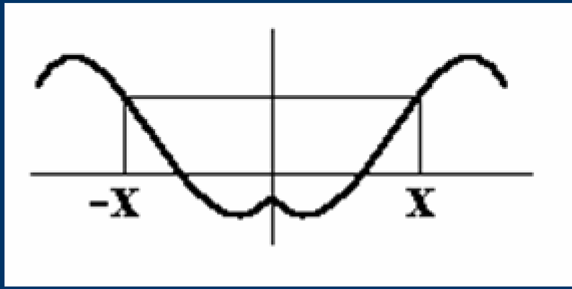
Példa

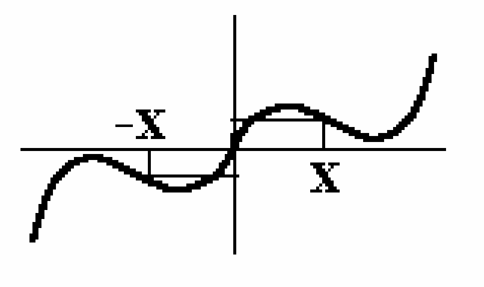
A fogyasztási függvény tipikusan konkáv, mivel a jövedelem növekedése esetén a fogyasztási kiadások egyre kisebb mértékben növekednek, azaz a növekedés üteme csökken.



Definíció: paritás

Legyen a $D \subset R$ halmaz szimmetrikus az origóra. Az $f: D \to R$ függvény páros *[páratlan]*, ha bármely $x \in D$ esetén $f(-x) = f(x)$ *[$f(-x) = -f(x)$]*.





Megjegyzés

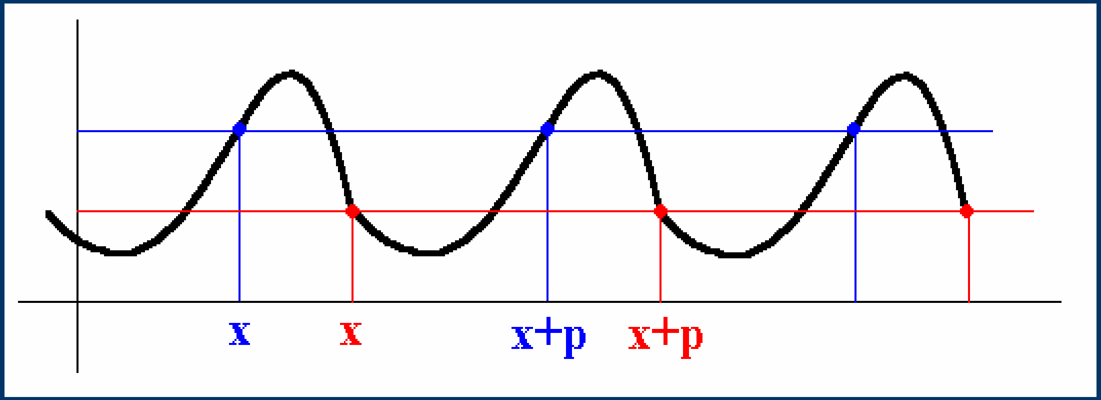
A páros függvények grafikonja tengelyesen szimmetrikus a „függőleges” tengelyre, a páratlan függvények grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

Példa

A trigonometrikus függvények közül a sin, tg, ctg függvények páratlanok, a cos függvény páros.

Definíció: periódus

Az f:R→R függvényt periodikusnak nevezzük, ha van olyan pozitív p szám, melyre teljesül, hogy bármely x∈R esetén f(x+p)=f(x).



Ha az f függvény periodikus, akkor végtelen sok megfelelő p érték van. A definícióban meghatározott tulajdonságú p értékek halmazának van legkisebb eleme, akkor ezt a számot az f függvény periódusának nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

A trigonometrikus függvények periodikusak.

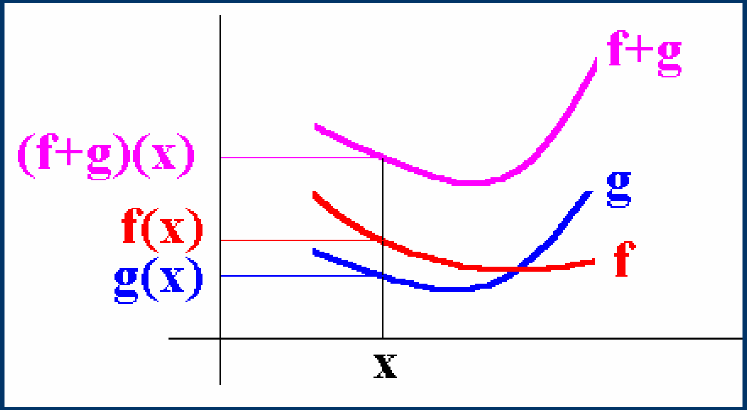
A sin és a cos függvények periódusa 2π, a tg és a ctg függvények periódusa π.

(Pontonkénti) műveletek R→R függvényekkel

Definíció: összeadás

Az f:D→R és a g:D→R függvények összege az (f+g):D→R függvény, melyre:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Hasonlóan értelmezzük a másik három (pontonkénti) alapműveletet is:

Definíciók: kivonás, szorzás, osztás

Az f:D→R és a g:D→R függvények különbsége, szorzata, hányadosa:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ x\in D$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in D$$

$$(f/g)(x)=f(x)/g(x),\ x\in D \quad (\text{ha } 0\notin R_g)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: folytonosság

Az $f:[a,b]\to R_f$ függvény folytonos az $x_0\in[a,b]$ helyen, ha bármely $(x_n):N\to D_f$,

$$x_n \to x_0$$

sorozat esetén az $f(x_n):N\to R_f$ sorozatra fennáll, hogy

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

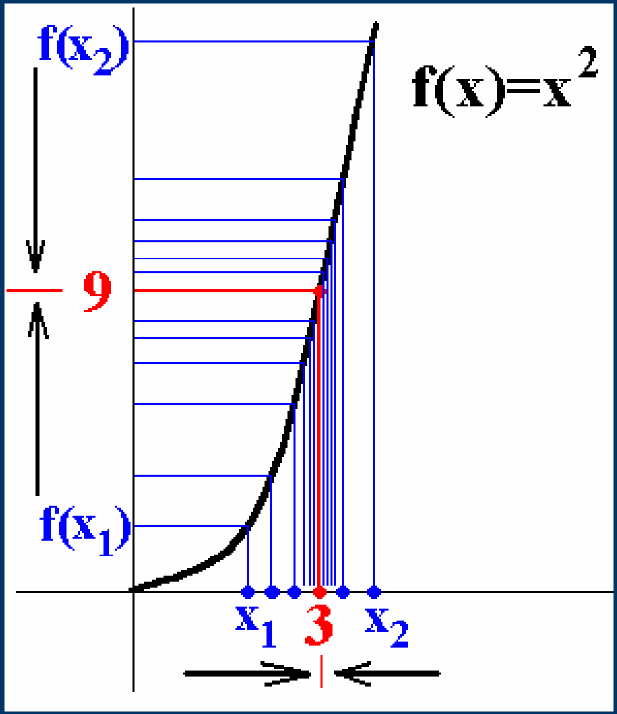
Példa

Az $f(x)=x^2$ függvény folytonos az $x_0=3$ helyen, mert ha

$$x_n\to 3,$$

akkor

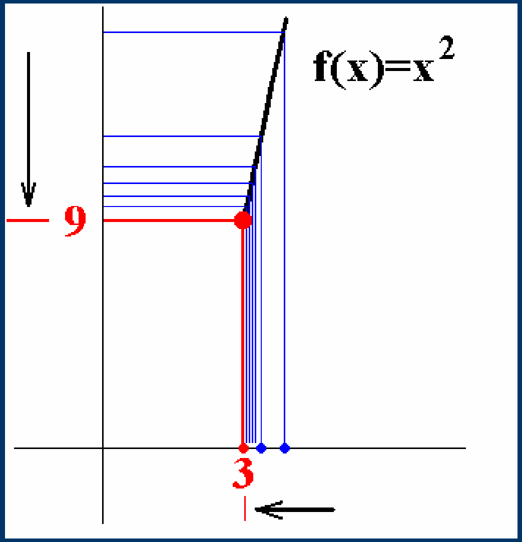
$$f(x_n) = (x_n)^2 \to 9 = f(3)$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A folytonosság pontbeli tulajdonság.

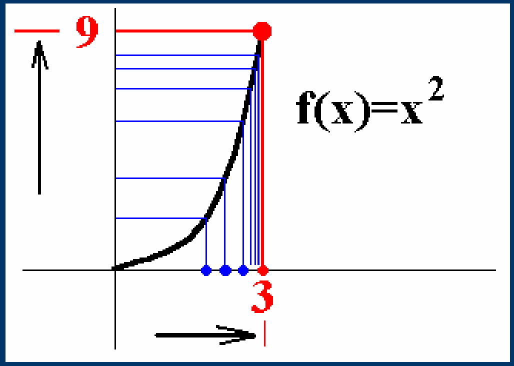


Definíció: jobb oldali folytonosság

Az f:]a,b[→R függvény jobbról folytonos az x_0∈]a,b[helyen, ha az f függvény [x_0,b[intervallumra való leszűkítése folytonos az x_0 helyen.

Definíció: bal oldali folytonosság

Az f:]a,b[→R függvény balról folytonos az x_0∈]a,b[helyen, ha az f függvény]a,x_0] intervallumra való leszűkítése folytonos az x_0 helyen.



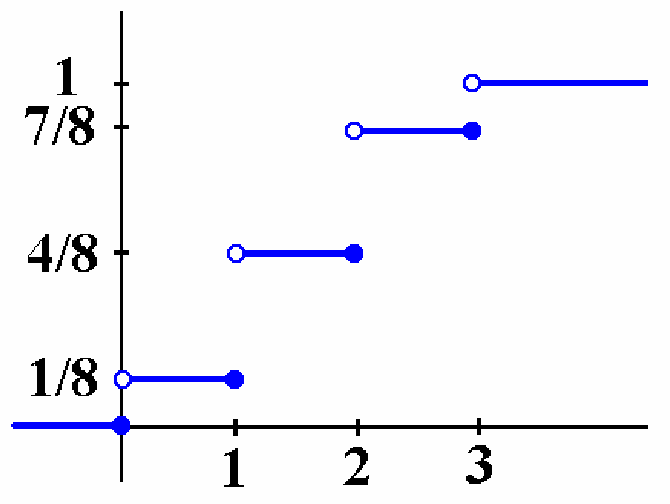
NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Az f:]a,b[→R függvény folytonos az $x_0 \in]a,b[$ helyen ⇔ f balról és jobbról is folytonos az x_0 helyen.

Példa

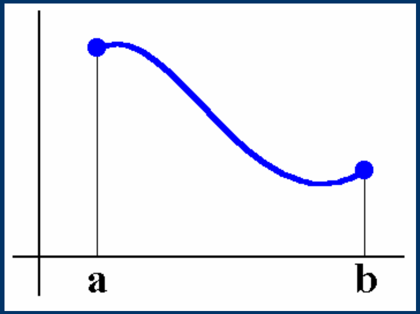
Ez a függvény mindenhol folytonos balról, de a 0, 1, 2 és a 3 helyeken nem folytonos jobbról.

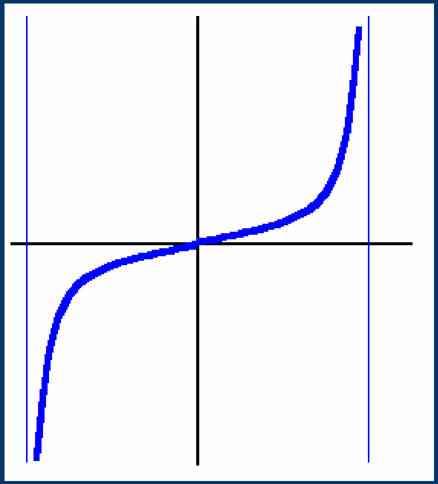


NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: intervallumon folytonos függvény

Az f:I→R függvény folytonos az I intervallumon, ha folytonos az I minden pontjában.





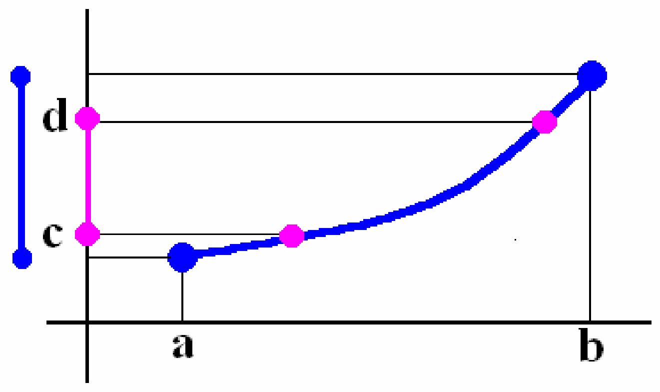
NEM NYOMTATÁSRA!

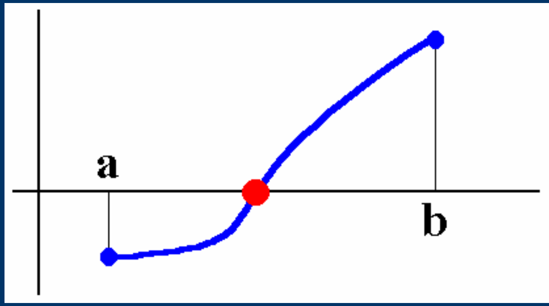
Intervallumon folytonos függvények néhány tulajdonsága

Tétel

Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény folytonos [a,b]-n, akkor az értékkészlet bármely $c,d\in R_f$, c<d elemei esetén a $[c,d]\subset R_f$.

Vagyis: ***intervallumon folytonos függvény bármely két értéke közötti értékek mindegyikét felveszi.***





Következmény

Ha a fenti feltételek mellett az f(a) és az f(b) függvényértékek előjele különböző, akkor az f függvénynek van zérushelye az intervallum belsejében.

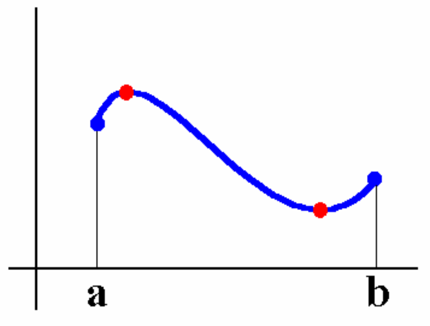
Tétel

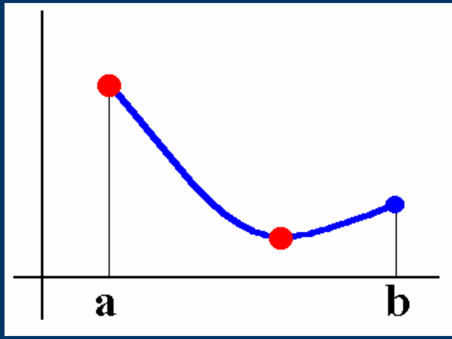
Zárt *[nyílt]* intervallumon értelmezett folytonos függvény képe zárt *[nyílt]* intervallum.

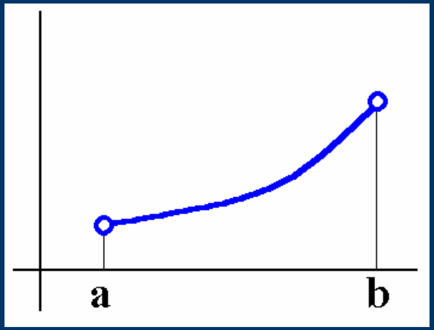
Zárt intervallumon folytonos függvények néhány tulajdonsága

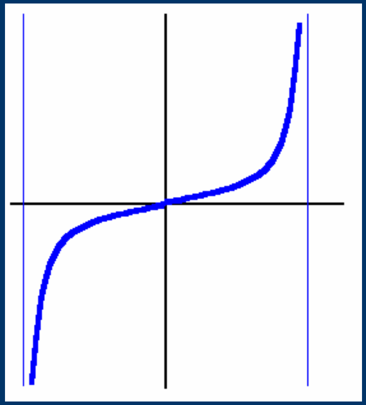
Tétel

Ha az f:[a,b]→R függvény folytonos, akkor van maximuma és van minimuma.









Megjegyzés

Nyílt intervallumon folytonos függvény nem feltétlenül korlátos, illetve ha korlátos, akkor sincs feltétlenül maximuma, illetve minimuma.

Valós függvények

határérték-számítása

Az ebben a részben szereplő függvények értelmezési tartománya legyen R egy tetszőleges részhalmaza.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Míg a számsorozatok esetén a határérték csak egyféleképpen érthető ($n \to \infty$), addig egy függvény határértéke az értelmezési tartomány bármely torlódási pontjában megkérdezhető.

MENNYI

HOL

	$A \in R$	$-\infty$	$+\infty$
$a \in R$	?	?	?
$-\infty$	?	?	?
$+\infty$	?	?	?

Példa: függvény meredeksége

Határozzuk meg, hogy …

NEM NYOMTATÁSRA!

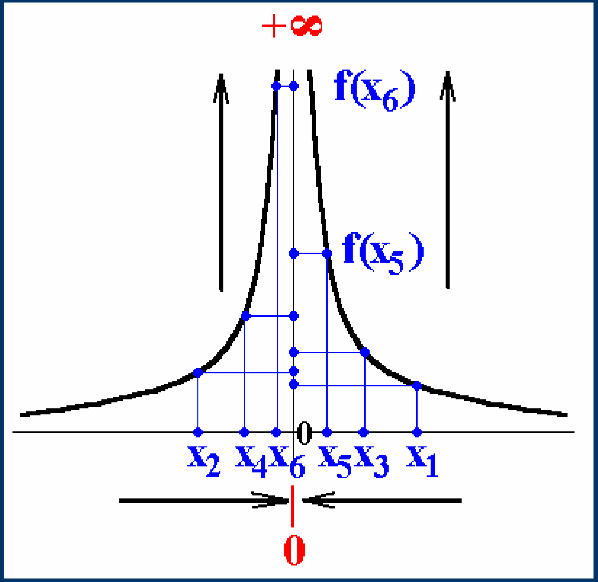
Definíció: határérték valós helyen („végesben”)

Legyen $W \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Az $f:D \to \mathbf{R}$ függvény D_f értelmezési tartományának x_0 torlódási pontjában az **f függvény határértéke W,** ha bármely $(x_n) \subset D_f$, $x_n \neq a$ sorozat esetén, melyre

$$x_n \to x_0$$

fennáll, hogy

$$f(x_n) \to W$$



Jelölés

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = W$$

Példa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

NEM NYOMTATÁSRA!

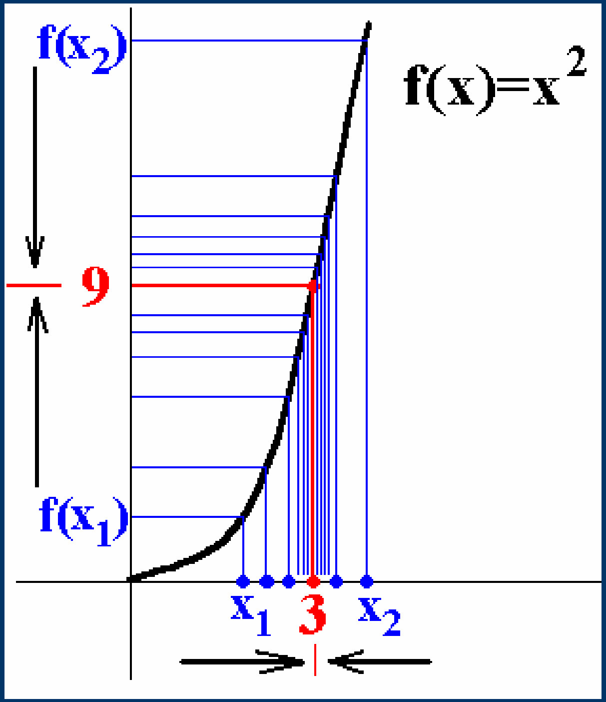
Tétel: határérték és a folytonosság kapcsolata

Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az $x_0\in[a,b]$ helyen, ha f-nek létezik határértéke az x_0 helyen, és az egyenlő az $f(x_0)$ függvényértékkel:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Példa

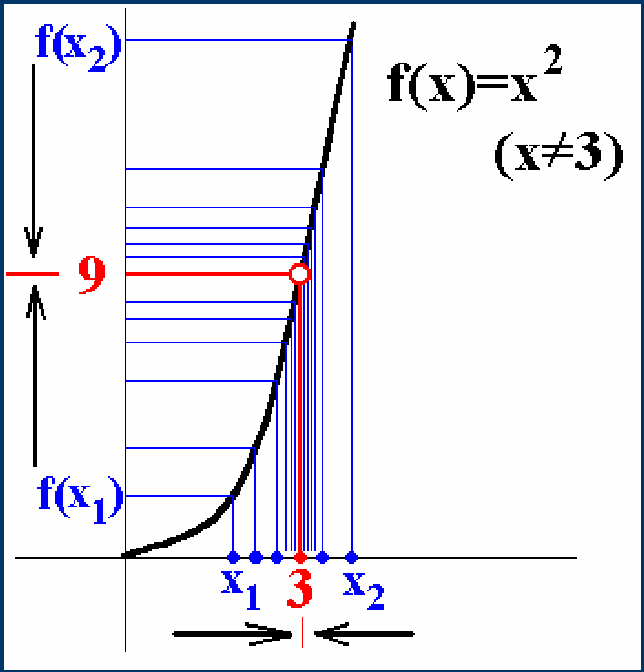
$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Az x_0 helyen vett határérték definíciójában nincs szó a függvény x_0 helyen felvett értékéről.



Példa: határérték hézagpontban

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x^2=9$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: bal oldali határérték

Legyen $W \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Az $f:D \to \mathbf{R}$ függvény D_f értelmezési tartományának a torlódási pontjában az f függvény bal oldali határértéke W, ha bármely $(x_n) \subset D_f$, $x_n < a$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat esetén, melyre

$$x_n \to a$$

fennáll, hogy

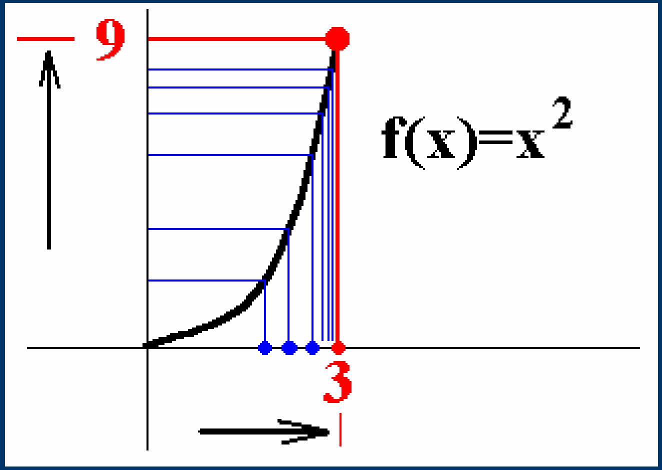
$$f(x_n) \to W$$

Jelölés

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = W$$

Példa

$$\lim_{x \to 3-0} x^2 = 9$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: jobb oldali határérték

Legyen $W \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Az $f:D \to \mathbf{R}$ függvény D_f értelmezési tartományának **a torlódási pontjában az f függvény jobb oldali határértéke W,** ha bármely $(x_n) \subset D_f$, $x_n > a$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat esetén, melyre

$$x_n \to a$$

fennáll, hogy

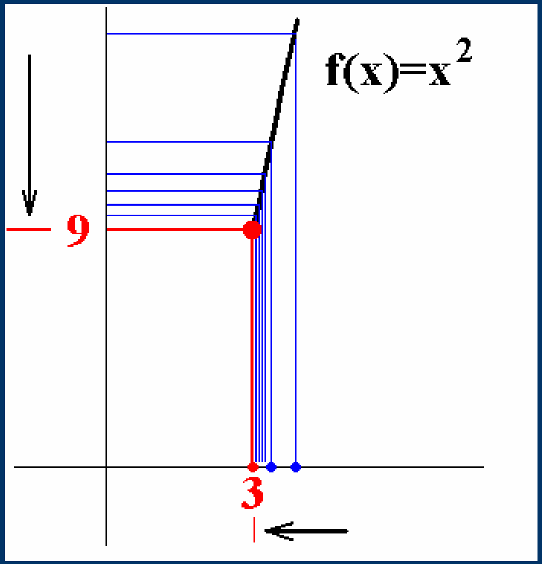
$$f(x_n) \to W$$

Jelölés

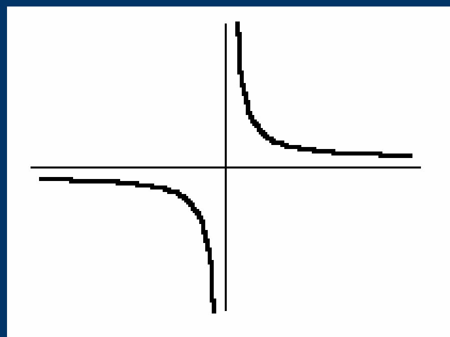
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = W$$

Példa

$$\lim_{x \to 3+0} x^2 = 9$$

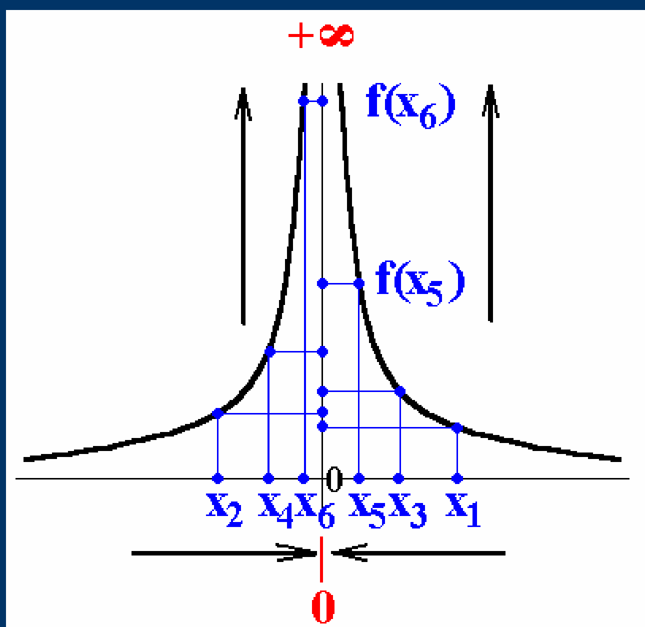


Példák



$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$$



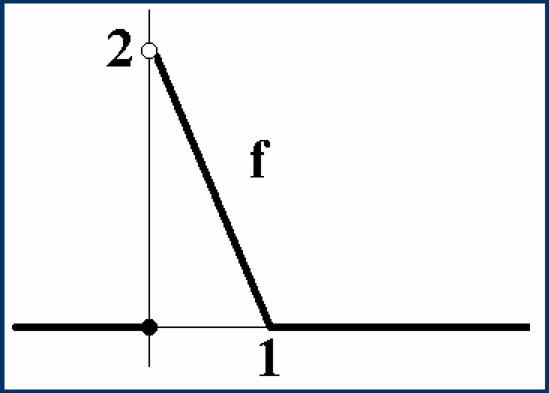
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

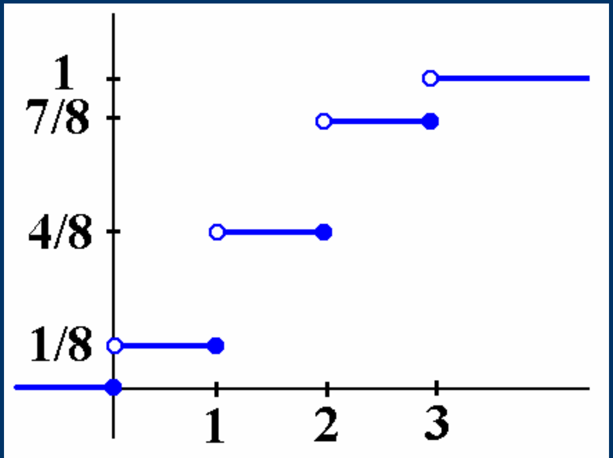
$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák





$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 4/8$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = 7/8$$

Definíció: határérték $+\infty$-ben

Legyen $W \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Az $f:]a,+\infty[\to \mathbf{R}$ függvénynek a $+\infty$-beli határértéke W, ha bármely $(x_n) \subset]a,+\infty[$ sorozat esetén, melyre

$$x_n \to +\infty$$

fennáll, hogy

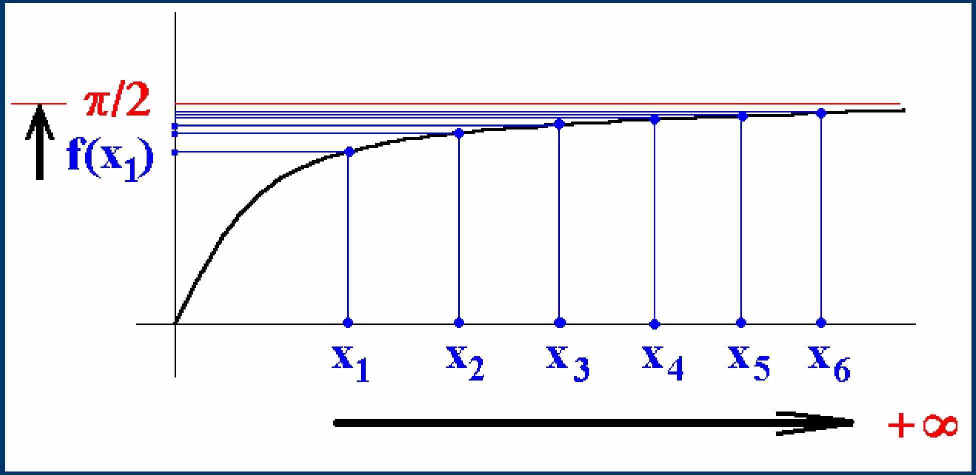
$$f(x_n) \to W$$

Jelölés

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = W$$

Példa

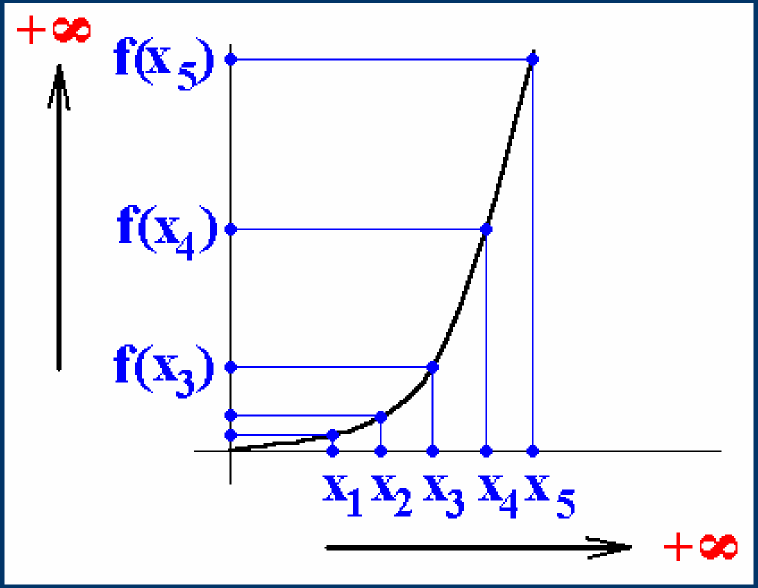
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$



Definíció: határérték -∞ -ben

Legyen W ∈ R ∪ {-∞, +∞ }.

Az f:]-∞,b[→R függvény +∞-beli határértéke W, ha bármely (x_n)⊂]-∞,b[sorozat esetén, melyre

$$x_n \to -\infty$$

fennáll, hogy

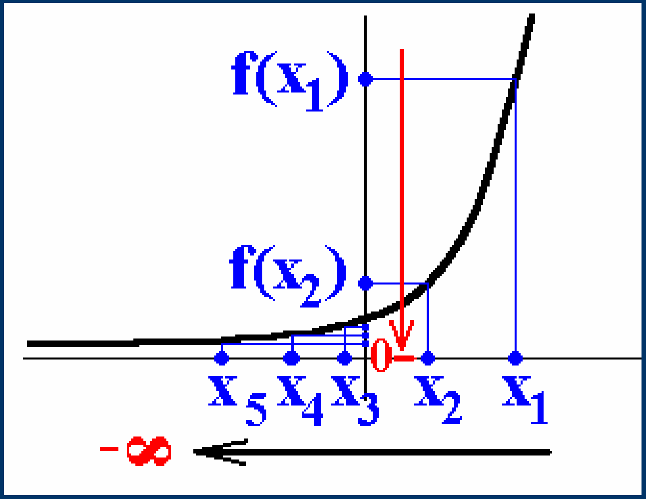
$$f(x_n) \to W$$

Jelölés

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = W$$

Példa

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: határérték és a műveletek kapcsolata

Ha $a \in \mathbf{R}$ az f és a g függvények értelmezési tartományának egyaránt torlódási pontja, továbbá

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{és} \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

$A, B, c \in \mathbf{R}$, akkor

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = A + B \qquad \lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$$

továbbá ha még $g(x) \neq 0$ $(x \in D_g)$ és $B \neq 0$ is fennáll, akkor

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Ha két (véges, vagy végtelen) határértékkel rendelkező függvény között műveletet végzünk, de nem teljesülnek az előző tétel feltételei, például azért, mert legalább az egyik függvény határértéke végtelen, vagy két 0 határértékű függvényt osztottunk el, akkor előfordulhat az is, hogy pusztán a határértékek alapján meg lehet állapítani az új függvény határértékét, de az is, hogy ez nem lehetséges (ha van egyáltalán határérték). Az utóbbi eseteket szokás határozatlan alakú határérték-feladatnak nevezni.

A következő táblázatban ? jelöli a határozatlan eseteket. A ! jel arra utal, hogy előjelvizsgálattal a határérték megállapítható. A többi esetben a határérték szerepel.

Valós függvények

NEM NYOMTATÁSRA!

lim f	lim g	lim f+g	lim f-g	lim g-f	lim f·g	lim f/g	lim g/f
A>0	+∞	+∞	-∞	+∞	+∞	0	+∞
A<0	+∞	+∞	-∞	+∞	-∞	0	-∞
A>0	-∞	-∞	+∞	-∞	-∞	0	-∞
A<0	-∞	-∞	+∞	-∞	+∞	0	+∞
0	+∞	+∞	-∞	+∞	?	0	!
0	-∞	-∞	+∞	-∞	?	0	!
+∞	+∞	+∞	?	?	+∞	?	?
+∞	-∞	?	+∞	-∞	-∞	?	?
-∞	-∞	-∞	?	?	+∞	?	?

További határozatlan formák

Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ **és** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ **akkor a** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

határérték-feladat határozatlan.

Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ **és** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ **és** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ **és** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

akkor a $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\right)^{g(x)}$ **határérték-feladat határozatlan.**

Definíció: megszüntethető szakadás

Az $f:]a,x_0[\cup]x_0,b[\to R$ függvénynek megszüntethető szakadása van az $x_0\in]a,b[$ helyen, ha létezik a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

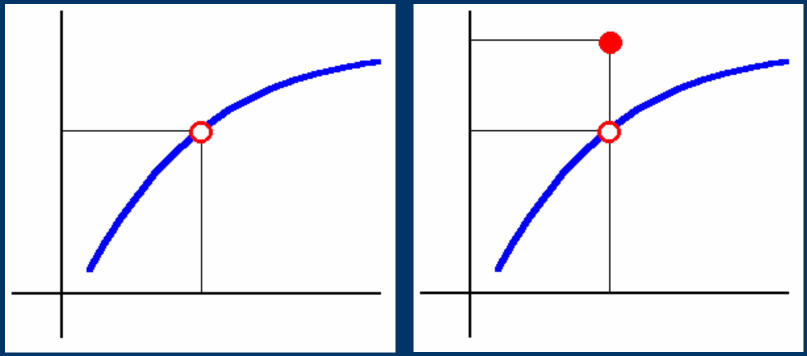
határérték, továbbá a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ha } x \neq x_0 \\ A \quad , \text{ha } x = x_0 \end{cases}$$

függvény folytonos x_0-ban.

Példa

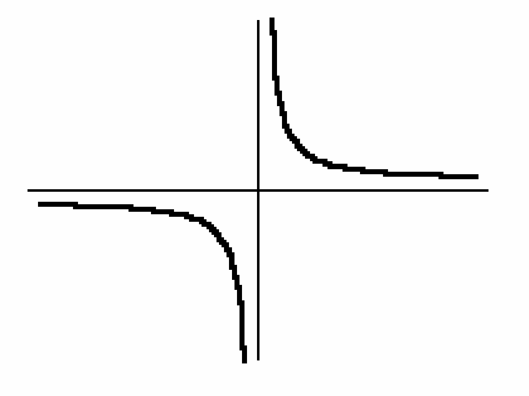
Ezeknek a függvényeknek megszüntethető szakadása van:

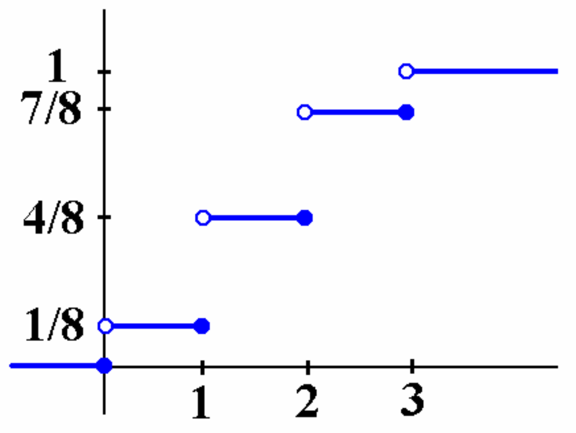


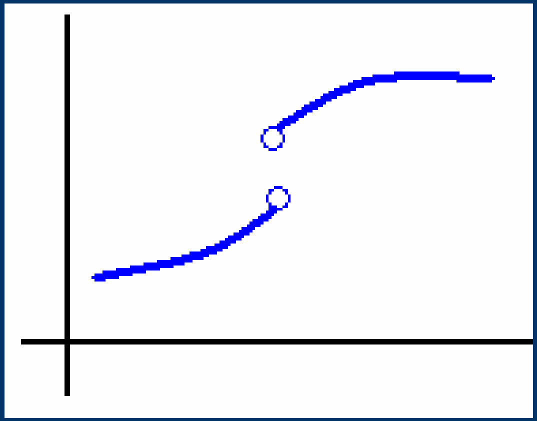
NEM NYOMTATÁSRA!

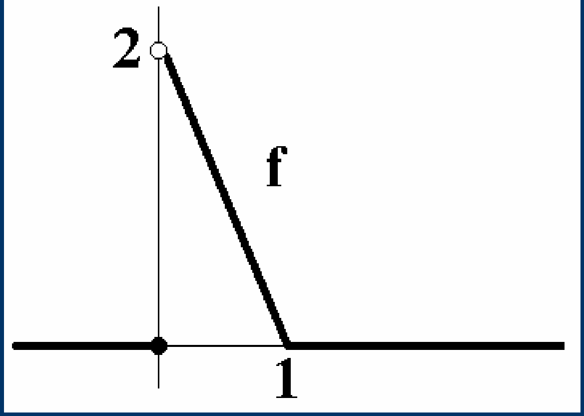
Példák

Az alábbi függvények szakadásai nem megszüntethető szakadások:









NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

Racionális törtfüggvények határértékének kiszámítása -∞-ben és +∞-ben:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x+10}{4x^3+10x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{4+\frac{10}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+x^2-x}{7x^3+15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{7+\frac{15}{x^3}}=\frac{-2}{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{-1+\frac{2}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-1+\frac{2}{x}}=+\infty$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

Racionális törtfüggvények határértékének kiszámítása valós helyen:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2}{x^2+2x-15}=\frac{4}{7}$$

(Az x=2 helyen folytonos a függvény.)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2(x-3)}{(x+5)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{x+5}=\frac{9}{8}$$

(Az x=3 helyen hézagpontja van a függvénynek.)

$$\lim_{x\to -5-0}\frac{x^3-3x^2}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to -5-0}\frac{x^2}{x+5}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -5+0}\frac{x^3-3x^2}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to -5+0}\frac{x^2}{x+5}=+\infty$$

(Az x=-5 helyen pólusa van a függvénynek.)

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+2x+1)}{6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2+2x+1}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} = 6$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x^2+x+2} = 0$$