NEM NYOMTATÁSRA!

Trigonometrikus Fourier sorok

Trigonometrikus rendszer

Definíció: trigonometrikus rendszer

Az

$$\{ 1 , \cos x , \sin x , \cos 2x , \sin 2x , \cos 3x , \sin 3x , \ldots \}$$

függvényekből álló (végtelen sok függvényt tartalmazó) függvényrendszert trigonometrikus rendszernek nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

A műszaki tudományok és a fizika bizonyos területein fontos kérdés, hogy adott, 2π szerint periodikus f függvényt elő lehet-e állítani a trigonometrikus rendszerbeli függvények lineáris kombinációjaként, azaz vannak-e olyan

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \quad \text{és} \quad b_1, b_2, b_3, \ldots$$

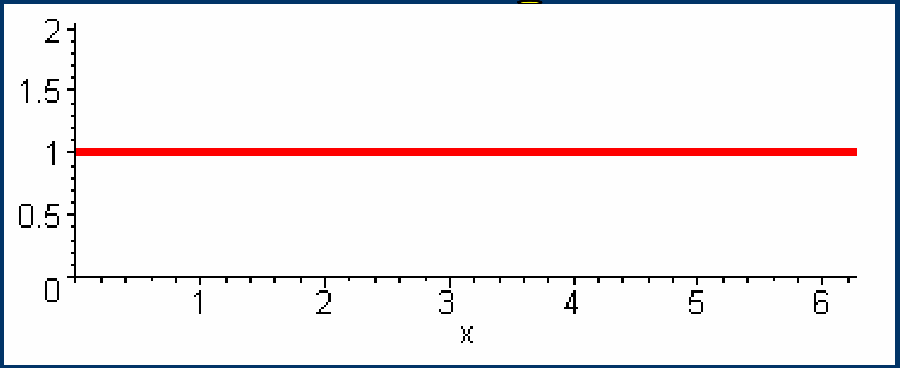
számok, hogy

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot x) + \ldots$$

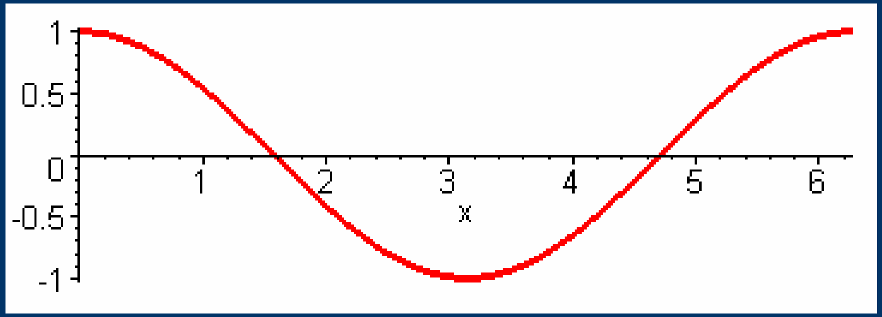
NEM NYOMTATÁSRA!

A trigonometrikus rendszer első öt eleme

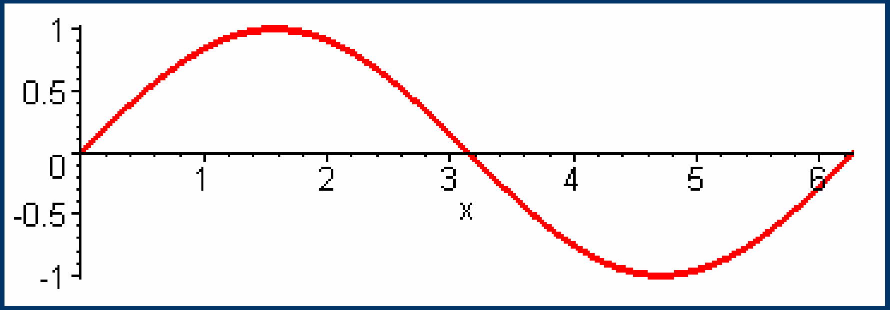
x→1



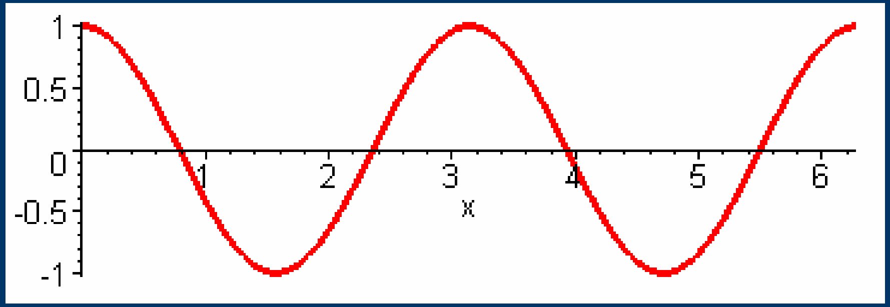
x→cos x



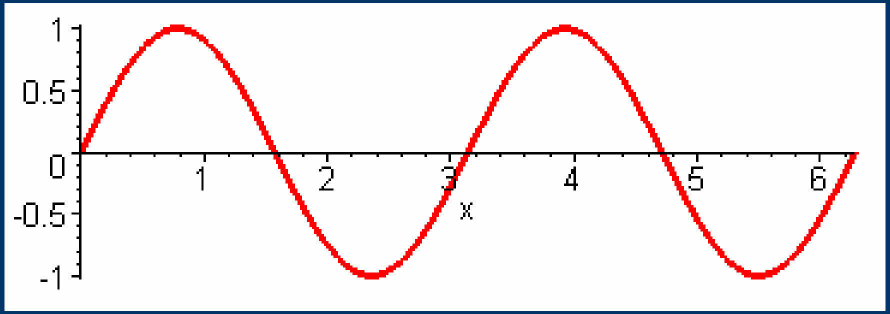
x→sin x



x→cos 2x



x→sin 2x



Fourier együtthatók

Definíció: Fourier együtthatók

Az f:[a,b]→R integrálható függvény Fourier együtthatói:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(n\cdot x)\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n\cdot x)\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: Fourier sor

Ha a trigonometrikus rendszer elemeit rendre megszorozzuk egy 2π szerint periodikus, integrálható f függvény

$$a_0 , a_1 , a_2 , \dots \quad , \quad b_1 , b_2 , b_3 , \dots$$

Fourier együtthatóival, akkor az f függvény Fourier sorát kapjuk:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2 \cdot x) + \dots$$

vagy tömörebben:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) \right)$$

Egy függvény Fourier sora függvénysor.

Fontos kérdés, hogy milyen kapcsolat van egy függvény és a Fourier sorának összegfüggvénye között?

Tétel

Differenciálható függvény egyenlő a Fourier sorának összegfüggvényével.

Megjegyzés

Azok a függvények, amelyek esetén a Fourier sorfejtés igazán érdekes, általában nem mindenhol folytonosak, így nem mindenhol differenciálhatóak.

Tétel: Fourier sor pontonkénti konvergenciája

Ha egy 2π szerint periodikus f függvény egy x_0 helyen balról és jobbról kvázi differenciálható *(ebből következik, hogy az x_0-ban f-nek létezik az $f(x_0-0)$ bal és az $f(x_0+0)$ jobb oldali határértéke)*, akkor az f Fourier sora x_0-ban az

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

értékhez konvergál.

Következmény

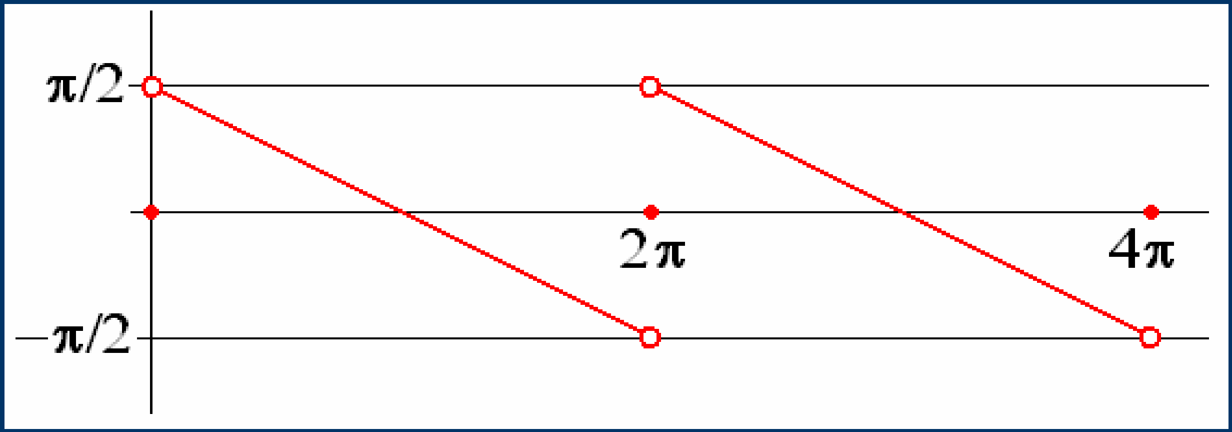
Ha az előző tétel feltételei mellett f még folytonos is x_0-ban, akkor az $f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$ egyenlőségek miatt f Fourier sora x_0-ban $f(x_0)$-hoz konvergál.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Határozzuk meg az f függvény Fourier sorát!

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & \text{ha}\quad x=0 \\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha}\quad x\in]0,2\pi[\end{cases}$$



Az a_0 , a_1 , a_2 , … együtthatók meghatározása

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)dx = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos x\,dx = 0$$

Mivel f páratlan függvény, könnyen belátható, hogy:

$$\mathbf{a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A b_1 , b_2 , b_3 , … együtthatók meghatározása

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot \sin x \, dx = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}$$

Belátható, hogy:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \;, \quad n = 1,2,\ldots$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az f függvény Fourier sora tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot x)}{n}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$$

A korábbi tételeink szerint ez a függvénysor a folytonossági helyeken előállítja az f függvényt, a szakadási helyeken pedig a bal és a jobb oldali határértékek számtani közepét adja.

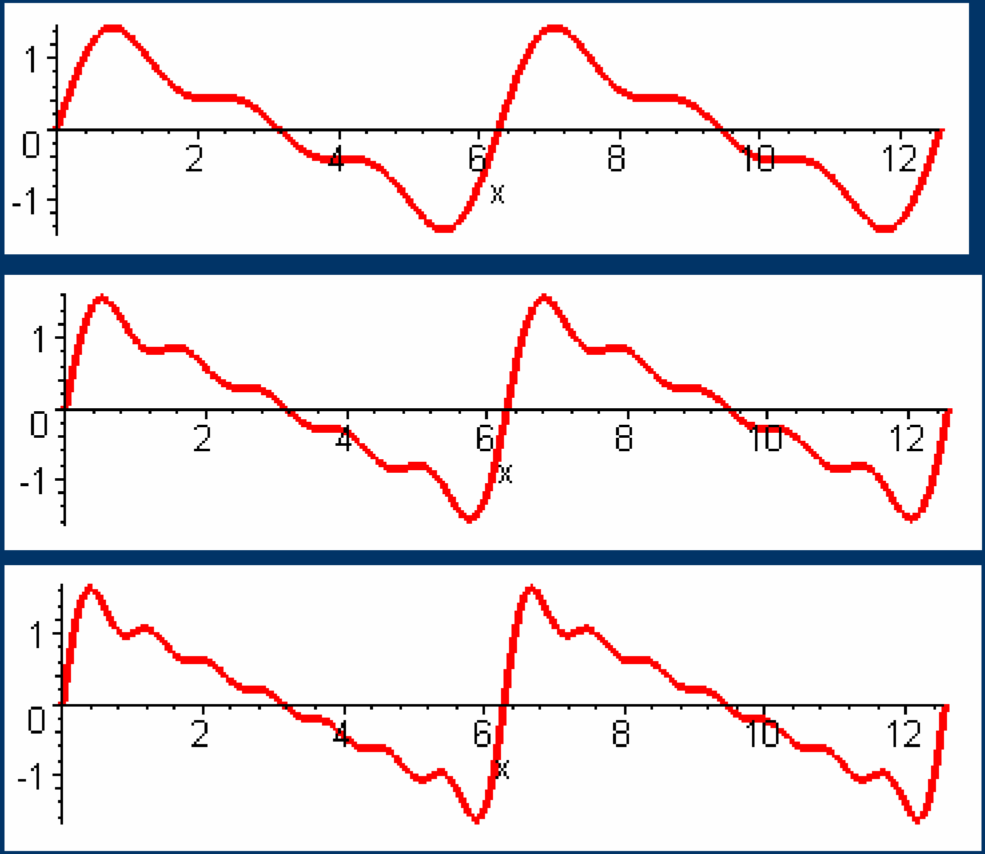
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot x)}{n}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$$

A 3., az 5. és a 7. részletösszeg:

n = 1,…,3

n = 1,…,5

n = 1,…,7



Megjegyzés

Páratlan függvény Fourier sorában csak szinuszos tagok szerepelnek, mivel

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$$

Páros függvény Fourier sorában (az $a_0/2$ konstans tag mellett) csak koszinuszos tagok szerepelnek, mivel

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$$

Tétel: Parseval formula

Ha az a_0, a_1, a_2, …, ill. a b_1, b_2, b_3, … számok az f 2π szerint periodikus, Riemann integrálható függvény Fourier együtthatói, akkor fennáll a következő egyenlőség, melyet (trigonometrikus) Parseval formulának nevezünk:

$$\int_0^{2\pi} f^2 = \pi \cdot \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right]$$

Parseval formulával bizonyos számsorok összege meghatározható.

Példa

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x \in]0, 2\pi[\end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n}$$

$a_n = 0$, n=0,1,…

$b_n = 1/n$, n=1,2,…

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right] = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi^3}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$