Egyváltozós függvények differenciálszámítása

Ebben a részben I egy tetszőleges, pozitív hosszúságú, intervallumot jelöl.

Bevezető példa: a sebesség meghatározása az út-idő függvény ismeretében (egyenes vonalú mozgás)

Átlagsebesség

Ha a mozgó pont Δt (>0) idő alatt Δs utat tesz meg, akkor az adott időintervallumra vonatkozó átlagsebessége

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

NEM NYOMTATÁSRA!

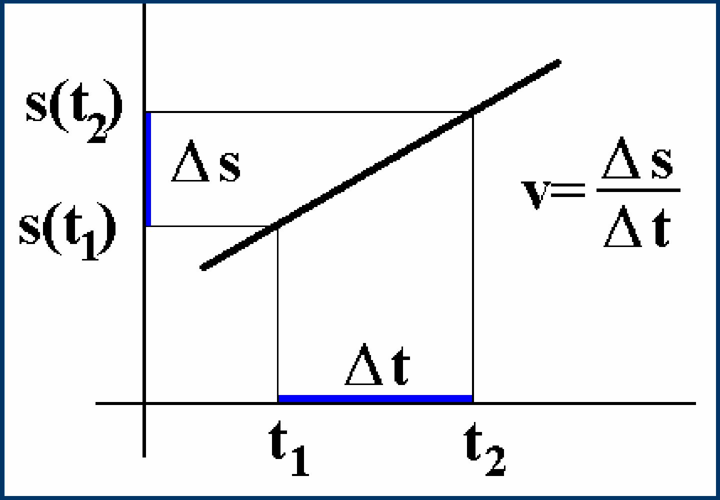
Pillanatnyi sebesség egyenletes mozogás esetén

Egyenletes mozgás esetén a sebesség állandó.

Az átlagsebesség bármely időintervallumra vonatkozóan ugyanannyi.

A pillanatnyi sebesség minden pillanatban megegyezik az átlagsebességgel.

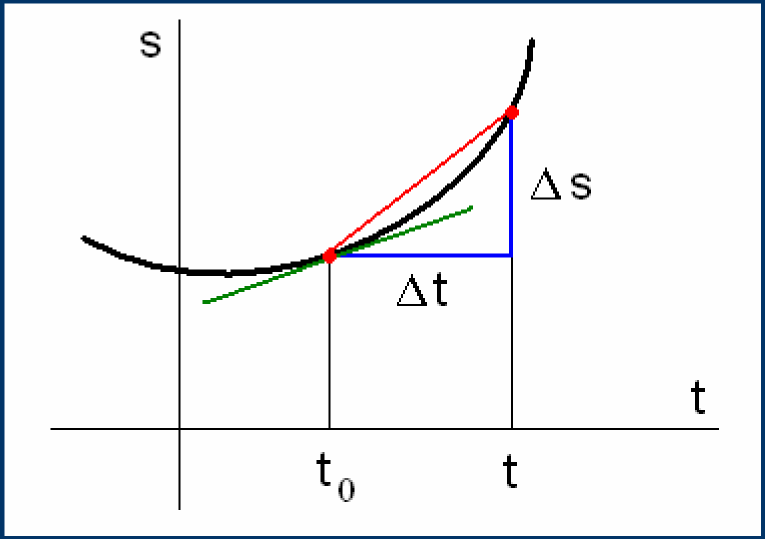
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Pillanatnyi sebesség nem egyenletes mozgás esetén

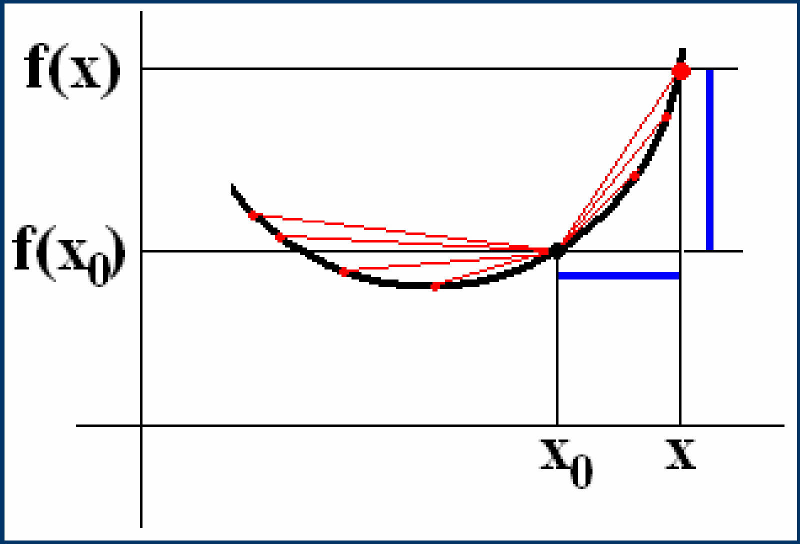
A pillanatnyi sebesség az átlagsebesség határértéke, miközben az időintervallum hossza (Δt) nullához tart:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: differenciahányados függvény



Az f:I→R függvény $x_0 \in I$ helyhez tartozó differenciahányados függvénye:

$$x \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad x \in I \setminus \{x_0\}$$

Geometriai jelentés: rögzített x esetén a differencia-hányados függvény az $(x_0, f(x_0))$ és az $(x, f(x))$ függvénypontokat összekötő szelő meredekségét adja.

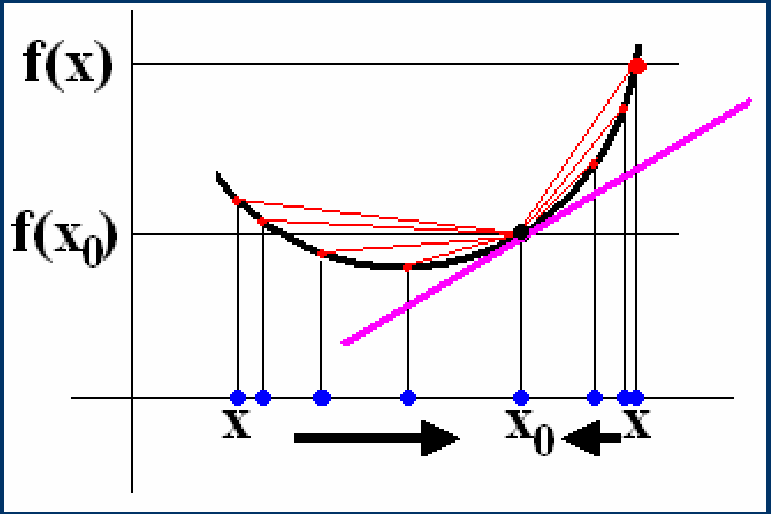
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: differenciálhányados

Ha az $f:I\to R$ függvény $x_0 \in I$ helyhez tartozó differenciahányados függvényének az x_0 helyen létezik véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható az x_0 helyen, a határértéket pedig az f függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük.

Jelölés: $f'(x_0)$ $\quad \frac{df}{dx}(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



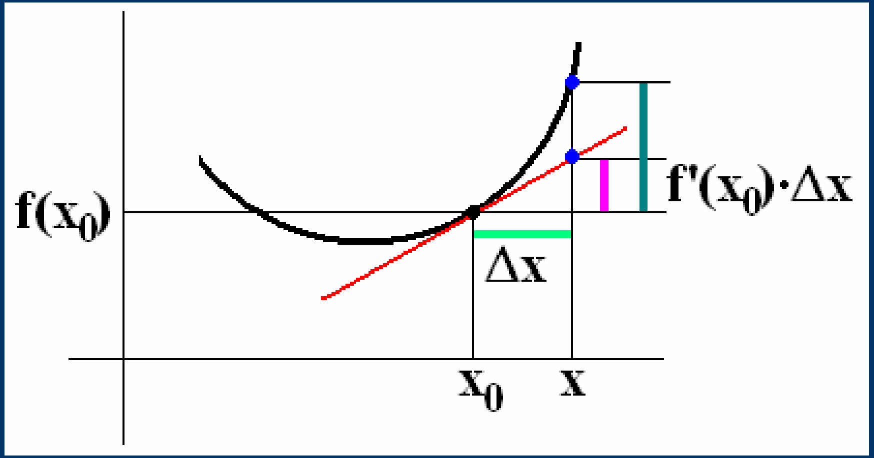
Megjegyzés

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0$$



A differenciálhányados fizikai jelentése: változási gyorsaság

A következő példák azt mutatják, hogy két mennyiségek kapcsolatát megadó függvény differenciálhányadosának fontos fizikai jelentése van.

Megjegyzés

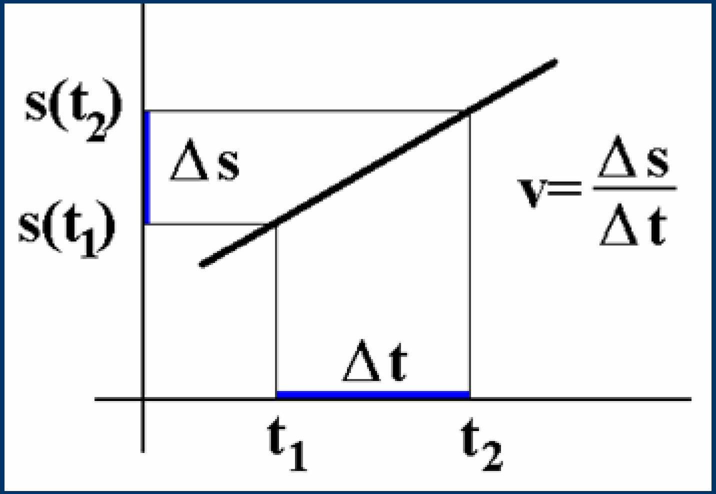
Ha egy fizikai mennyiség időtől való függését vizsgáljuk, akkor a differenciálhányadost vessző helyett általában ponttal jelöljük. A $t \to x(t)$ függvény differenciálhányadosának jelölése a t_0 helyen:

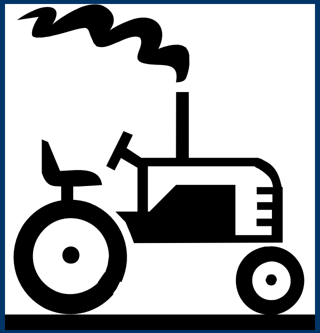
$$\dot{x}(t_0) \qquad \frac{dx}{dt}(t_0)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Sebesség egyenletes mozgás esetén

Ha egy test <u>egyenletesen</u> (vagyis állandó sebességgel) mozog, akkor a sebességének nagysága egyenlő a t→s(t) (út-idő) függvény meredekségével.





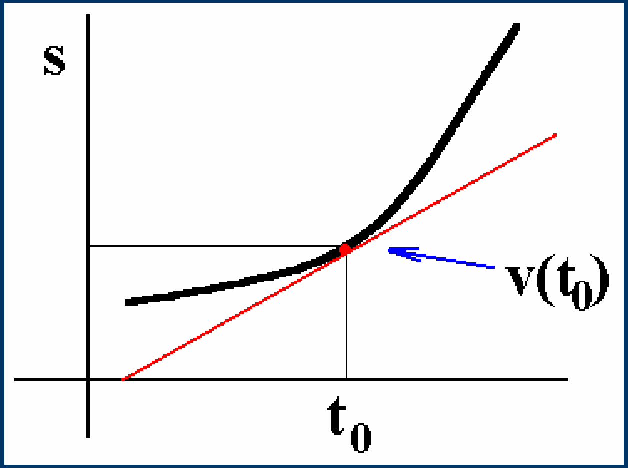
$[v] = m / s$

NEM NYOMTATÁSRA!

Pillanatnyi sebesség nem egyenletes mozgás esetén

Mennyi a sebesség nagysága egy adott pillanatban, ha a $t \to s(t)$ függvény grafikonja nem egyenes?

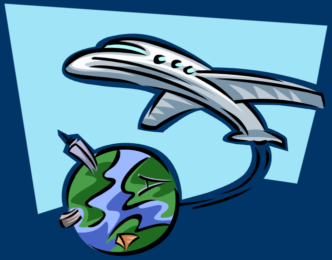
A pillanatnyi sebesség a $t \to s(t)$ függvény differenciálhányadosa (meredeksége).



$$v(t_0) = \dot{s}(t_0)$$

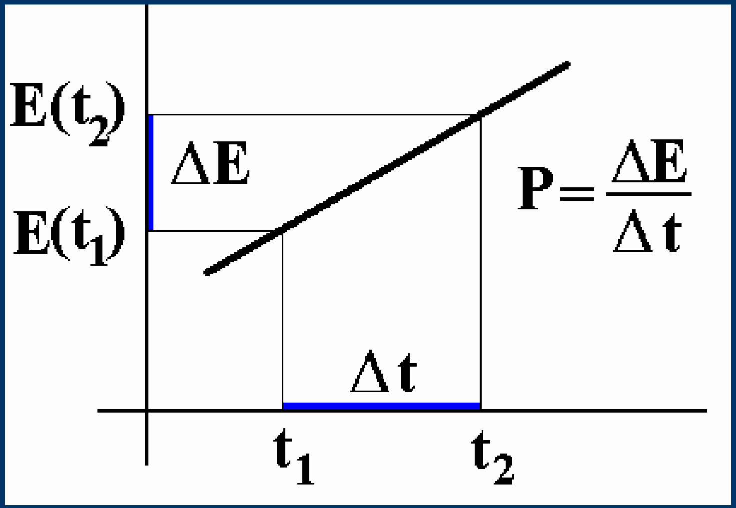
$$v(t_0) = \frac{ds}{dt}(t_0)$$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Teljesítmény egyenletes energialeadás esetén

Ha egy rendszer egyenletesen (állandó teljesítménnyel) ad le energiát, akkor a teljesítmény egyenlő a $t \rightarrow E(t)$ (energia-idő) függvény meredekségével.



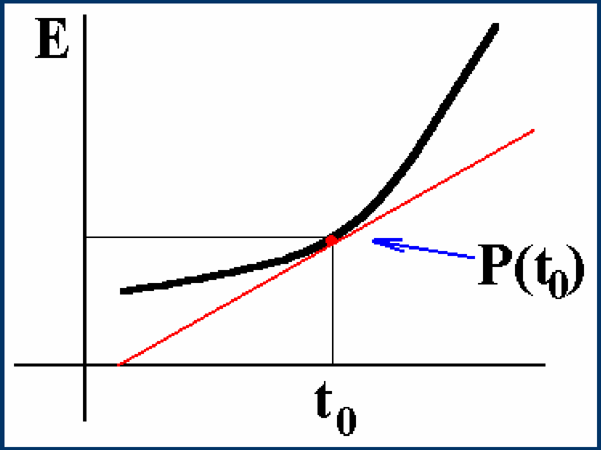
$[P] = J / s$

NEM NYOMTATÁSRA!

Pillanatnyi teljesítmény nem egyenletes energialeadás esetén

Mennyi a teljesítmény egy adott pillanatban, ha a t→E(t) függvény grafikonja nem egyenes?

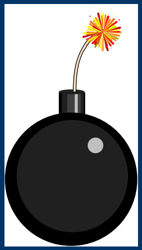
A pillanatnyi teljesítmény a t→E(t) függvény differenciálhányadosa (meredeksége).



$$P(t_0) = \dot{E}(t_0)$$

$$P(t_0) = \frac{dE}{dt}(t_0)$$

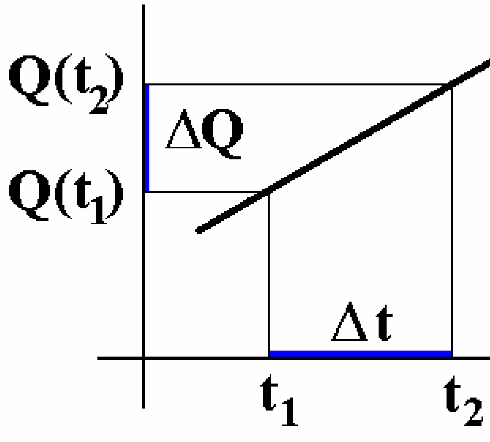
$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Áramerősség egyenletes töltésáramlás esetén

Ha egy vezető egy keresztmetszetén egyenletesen (állandó áramerősséggel) áramlik át töltés, akkor az áramerősség egyenlő a t→Q(t) függvény meredekségével.



$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$[I] = C / s$

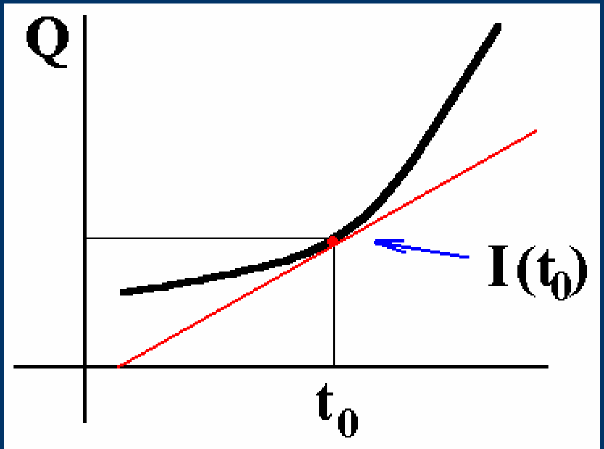
NEM NYOMTATÁSRA!

Pillanatnyi áramerősség nem egyenletes töltésáramlás esetén

Mennyi az áramerősség egy adott pillanatban, ha a $t \to Q(t)$ függvény grafikonja nem egyenes?

A pillanatnyi áramerősség a $t \to Q(t)$ függvény differenciálhányadosa (meredeksége).

$$I(t_0) = \dot{Q}(t_0)$$



$$I(t_0) = \frac{dQ}{dt}(t_0)$$

$$I(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

A fenti példákban közös, hogy mindegyikben két mennyiség megváltozása közti pillanatnyi kapcsolatot keressük:

az egyik mennyiség egységnyi megváltozása egy másik mennyiség mekkora megváltozását eredményezi,

vagyis, hogy mennyi a VÁLTOZÁSI GYORSASÁG pillanatnyi értéke?

A válasz minden esetben a DIFFERENCIÁLHÁNYADOS.

Megjegyzések

1. A differenciálhatóság pontbeli tulajdonság.

2. A differenciálhányados geometriai jelentése: az érintő meredeksége

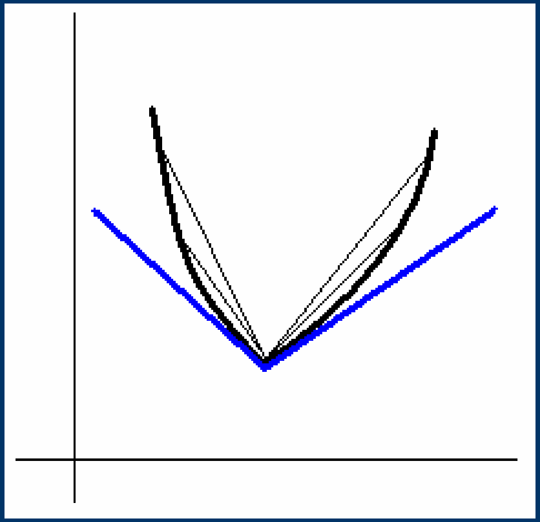
Valójában helyesebb a következőképpen fogalmazni:

ha az f függvény x_0 helyen differenciálható, akkor

az (x_0 , $f(x_0)$) ponton átmenő, f ’ (x_0) iránytangensű (meredekségű) egyenest

az f függvény x_0 pontbeli érintőjének nevezzük.

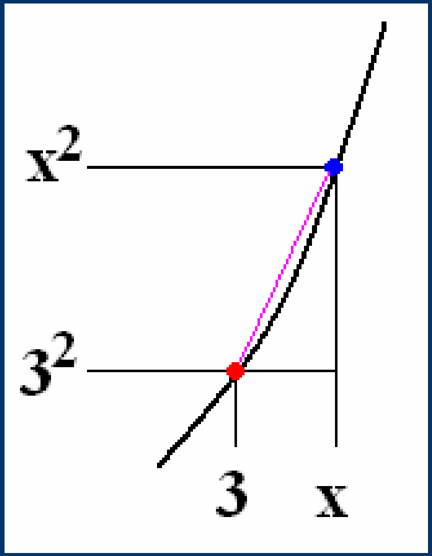
3. Beszélhetünk külön bal illetve jobb oldali differenciálhatóságról is, amennyiben a differencia-hányados függvény határértékének létezését csak egy oldalról vizsgáljuk.

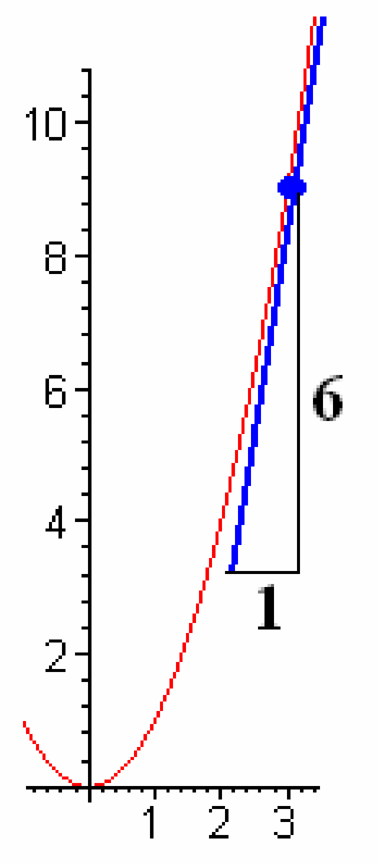


4. Ahol egy függvény differenciálható, ott folytonos is.

Példa: a differenciálhányados kiszámítása

$$f(x) = x^2 \, , \; x_0 = 3$$



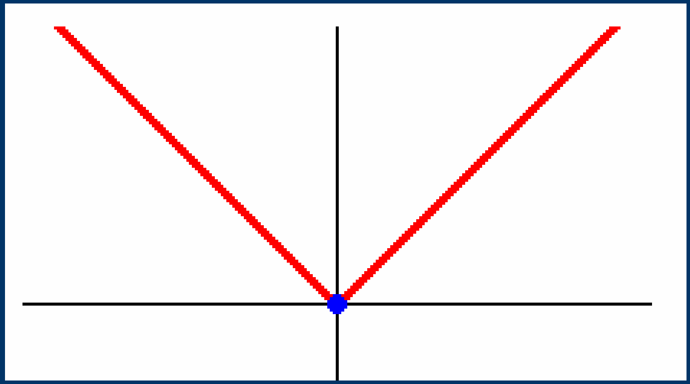


$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: egy pontban nem differenciálható függvény

$$f(x) = |x|$$



$$\lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1$$

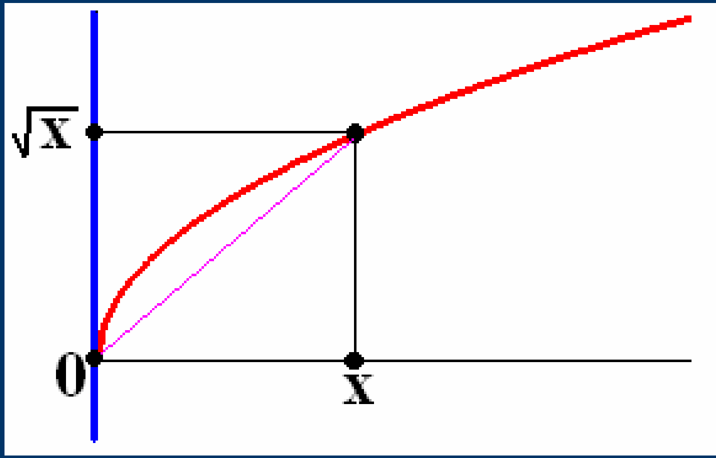
$$\lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{x}{x} = 1$$

f nem differenciálható az x_0=0 helyen

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: egy pontban nem differenciálható függvény

$$f(x) = \sqrt{x}$$



$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

f nem differenciálható az $x_0=0$ helyen

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: derivált függvény

A $g:I\to\mathbf{R}$ függvényt az $f:I\to\mathbf{R}$ függvény derivált függvényének nevezzük, ha az I intervallum bármely x_0 pontjában $f'(x_0) = g(x_0)$. Jelölés: $g = f'$

A derivált függvény értékei tehát mindenhol az eredeti függvény differenciálhányadosát adják.

A derivált függvény meghatározását szokás deriválásnak nevezni.

Megjegyzés

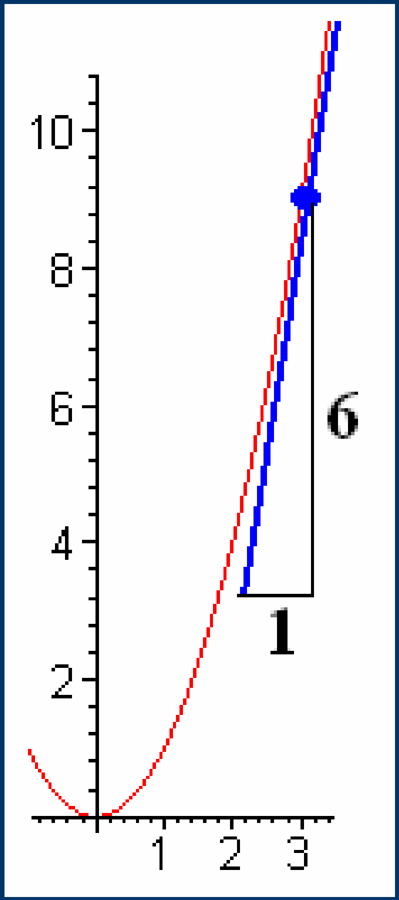
A derivált függvény nem feltétlenül folytonos. Ha egy függvény deriváltja folytonos, akkor azt mondjuk, hogy a függvény folytonosan differenciálható.

Példa: a derivált függvény meghatározása

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$



$$f'(x) = 2x$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x$$

$$\frac{df}{dx}(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Néhány elemi függvény derivált függvénye

Konstans függvények

Ha $f(x) = c,\ c \in \mathbf{R}$ **akkor** $f'(x) = 0$

Indoklás:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Megjegyzés

A konstans függvény érintője bármely pontban egybeesik a függvény grafikonjával. Így az érintő mindenhol „vízszintes”, azaz 0 meredekségű, ezért a derivált függvény a konstans 0 függvény.

NEM NYOMTATÁSRA!

Exponenciális függvények

$f(x) = a^x,\ 0<a\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = a^x \cdot \ln a$

Indoklás:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \ln a$$

Speciálisan: $f(x) = e^x$ $\Rightarrow$ $f'(x) = e^x$

Példa

$$\left(5^x\right)' = 5^x \cdot \ln 5$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Hatványfüggvények

$f(x) = x^n, \; n \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Indoklás, amennyiben n pozitív egész:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \ldots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} = n \cdot x_0^{n-1}$$

Példák

$$\left(x^7\right)' = 7 \cdot x^6$$

$$\left(\sqrt[5]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5} \cdot x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3 \cdot x^{-4}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Szinusz függvény

$f(x) = \sin x$ $\Rightarrow$ **$f'(x) = \cos x$**

Indoklás:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos x_0$$

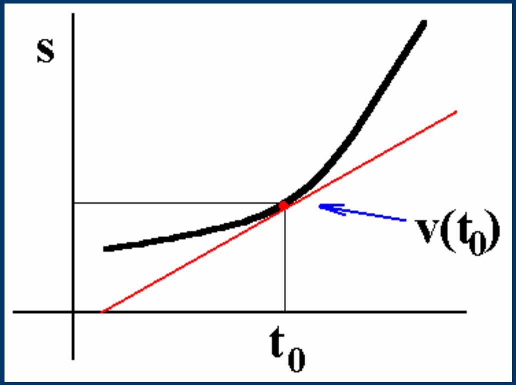
Az elemei függvények deriváltjainak táblázata megtalálható bármely, a diferenciálszámítással foglalkozó műben, például a Matematikai Feladatgyűjtemény III. c. segédlet végén is.

NEM NYOMTATÁSRA!

$f(x) =$	$f'(x) =$	$f(x) =$	$f'(x) =$
c	0	$c \cdot x$	c
x^n	$n \cdot x^{n-1}$		
a^x	$a^x \cdot \ln a$	e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$	$\mathrm{cth}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{cth}^2 x - 1$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arsh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arcth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Fizikai példa derivált függvényre:
sebességfüggvény



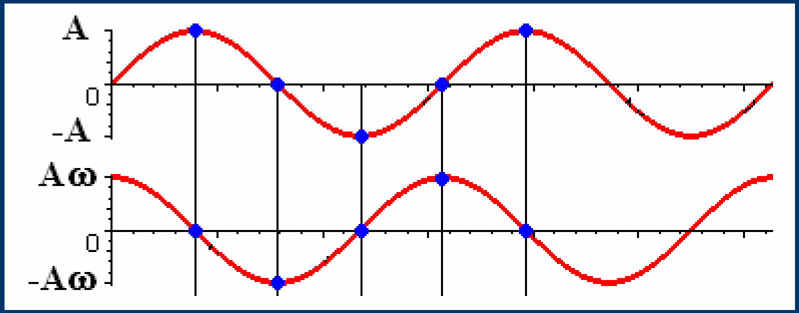
Korábban láttuk, hogy a pillanatnyi sebesség a $t \to s(t)$ függvény differenciálhányadosa.

Ebből következik, hogy a $t \to s(t)$ út-idő függvény derivált függvénye a $t \to v(t)$ sebesség-idő függvény.

Példa: harmonikus rezgőmozgás

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

$$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t)$$



NEM NYOMTATÁSRA!

A differenciálás és az alapműveletek kapcsolata

Tétel: összeg függvény differenciálása

Ha az $f:I\to R$ és a $g:I\to R$ függvények differenciálhatók az x helyen, akkor az

$$f+g$$

függvény is differenciálható az x helyen és

$$(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$$

Példa

$$\left(x^8+4^x+\sqrt{x}\right)'=\left(x^8\right)'+\left(4^x\right)'+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=8\cdot x^7+4^x\cdot\ln 4+\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Indoklás:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: függvény konstansszorosának differenciálása

Ha az f:I→R függvény differenciálható az x helyen és c∈R, akkor a

$c \cdot f$

függvény is differenciálhatók az x helyen és

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Példa

$$(7 \cdot \sin x)' = 7 \cdot (\sin x)' = 7 \cdot \cos x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Indoklás:

$$(c \cdot f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(c \cdot f)(x) - (c \cdot f)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$\left(5 \cdot x^8 - 3 \cdot \sin x + 7 \cdot 4^x + \sqrt{x} - 15 \cdot x + 6\right)' =$$

$$= \left(5 \cdot x^8\right)' - \left(3 \cdot \sin x\right)' + \left(7 \cdot 4^x\right)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(15 \cdot x\right)' + (6)' =$$

$$= 5 \cdot 8 \cdot x^7 - 3 \cdot \cos x + 7 \cdot 4^x \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 15 + 0 =$$

$$= 40 \cdot x^7 - 3 \cdot \cos x + 7 \cdot 4^x \cdot \ln 4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 15$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: szorzat függvény differenciálása

Ha az $f: I \to R$ és a $g: I \to R$ függvények differenciálhatók az x helyen, akkor az

$$f \cdot g$$

függvény is differenciálható az x helyen és

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Példa

$$(\ln x \cdot \mathrm{tg}\, x)' = (\ln x)' \cdot \mathrm{tg}\, x + \ln x \cdot (\mathrm{tg}\, x)' =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \mathrm{tg}\, x + \ln x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Indoklás:

$$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)\cdot g(x))-(f(x_0)\cdot g(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_0)+f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: törtfüggvény differenciálása

Ha az $f: I \to \mathbf{R}$ és a $g: I \to \mathbf{R}$ függvények differenciálhatóak az x helyen és $g(x) \neq 0$, ha $x \in I$, akkor az

f / g

függvény is differenciálható az x helyen és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{3-\cos x}{5\cdot e^x + \mathrm{tg}x - 1}\right)' =$$

$$= \frac{(3-\cos x)'\cdot\left(5\cdot e^x + \mathrm{tg}x - 1\right) - (3-\cos x)\cdot\left(5\cdot e^x + \mathrm{tg}x - 1\right)'}{\left(5\cdot e^x + \mathrm{tg}x - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{\sin x\cdot\left(5\cdot e^x + \mathrm{tg}x - 1\right) - (3-\cos x)\cdot\left(5\cdot e^x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{\left(5\cdot e^x + \mathrm{tg}x - 1\right)^2}$$

Tétel: az összetett függvények differenciálása (lánc-szabály)

Ha a g:I→J függvény differenciálható az x helyen, továbbá az f:J→R függvény differenciálható az g(x) helyen, akkor az f∘g:I→R összetett függvény is differenciálható az x helyen és

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$$

vagy másképpen írva:

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(\sin(x^2+3x)\right)' = \cos(x^2+3x) \bullet \left(x^2+3x\right)' =$$

$$= \cos(x^2+3x) \bullet (2x+3)$$

deriválási séma, amikor a külső függvény $\sin$

$$\left(\sin(g)\right)' = \cos(g) \bullet (g)'$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1-x^3}{\sqrt{3-x}}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1-x^3}{\sqrt{3-x}}\right)} \bullet \left(\frac{1-x^3}{\sqrt{3-x}}\right)' =$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1-x^3}{\sqrt{3-x}}\right)} \bullet \frac{-3x^2 \cdot \sqrt{3-x} - (1-x^3) \cdot \frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)}{3-x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

deriválási séma, amikor a külső függvény $\boxed{\operatorname{tg}}$

$$(\operatorname{tg} g)' = \frac{1}{\cos^2 g} \cdot g'$$

deriválási séma, amikor a külső függvény $\boxed{\sqrt{}}$

$$\left(\sqrt{g}\right)' = \left(g^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \cdot g'$$

deriválási sémák egyes külső függvények esetén

f (g)	f ' (g) · g'	f (g)	f ' (g) · g'
$g^n \quad (n \neq -1)$	$n \cdot g^{n-1} \cdot g'$	$\sqrt{g}$	$\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot g'$
a^g	$a^g \cdot \ln a \cdot g'$	$\log_a g$	$\frac{1}{g \cdot \ln a} \cdot g'$
e^g	$e^g \cdot g'$	$\ln g$	$\frac{1}{g} \cdot g'$
$\sin g$	$\cos g \cdot g'$	$\mathrm{sh}\, g$	$\mathrm{ch}\, g \cdot g'$
$\cos g$	$-\sin g \cdot g'$	$\mathrm{ch}\, g$	$\mathrm{sh}\, g \cdot g'$
$\mathrm{tg}\, g$	$\frac{1}{\cos^2 g} \cdot g'$	$\mathrm{th}\, g$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 g} \cdot g'$
$\mathrm{ctg}\, g$	$\frac{-1}{\sin^2 g} \cdot g'$	$\mathrm{cth}\, g$	$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 g} \cdot g'$
$\arcsin g$	$\frac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$	$\mathrm{arsh}\, g$	$\frac{1}{\sqrt{g^2+1}} \cdot g'$
$\arccos g$	$-\frac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$	$\mathrm{arch}\, g$	$\frac{1}{\sqrt{g^2-1}} \cdot g'$
$\mathrm{arctg}\, g$	$\frac{1}{1+g^2} \cdot g'$	$\mathrm{arth}\, g$	$\frac{1}{1-g^2} \cdot g'$
$\mathrm{arcctg}\, g$	$-\frac{1}{1+g^2} \cdot g'$	$\mathrm{arcth}\, g$	$\frac{1}{1-g^2} \cdot g'$

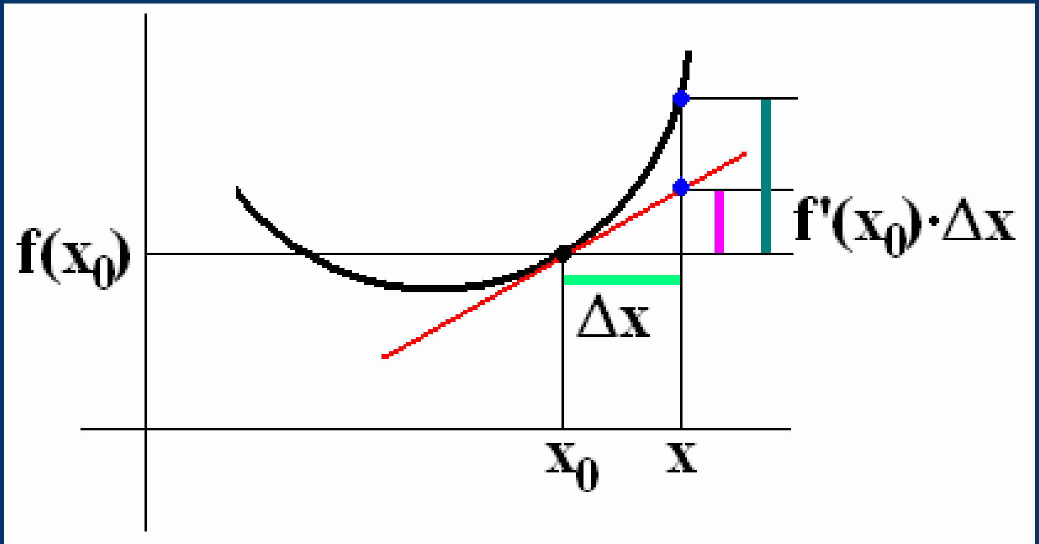
NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: differenciál

Ha az $f:I\to\mathbb{R}$ függvény differenciálható az x_0 helyen, akkor az

$$f'(x_0)\cdot(x-x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

értéket az f függvény x_0 helyen vett, Δx eltéréshez tartozó differenciáljának nevezzük.



NEM NYOMTATÁSRA!

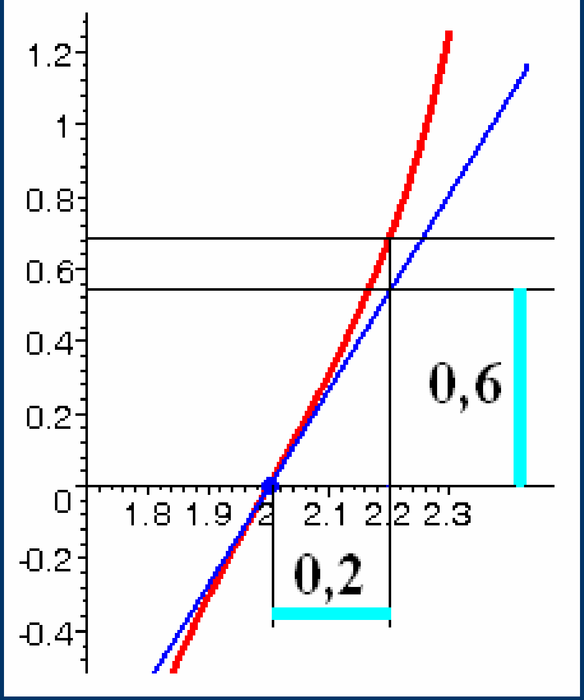
Példa

Határozzuk meg az f függvény Δx-hez tartozó differenciálját az x_0 helyen!

$$f(x) = \mathrm{tg}(3x-6), \quad x_0=2, \quad \Delta x=0{,}2$$

$$f(x_0)=f(2)=\mathbf{0}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2(3x-6)}$$



A differenciálhányados az x_0=2 helyen:

$$f'(x_0)=f'(2)=\mathbf{3}$$

A differenciál:

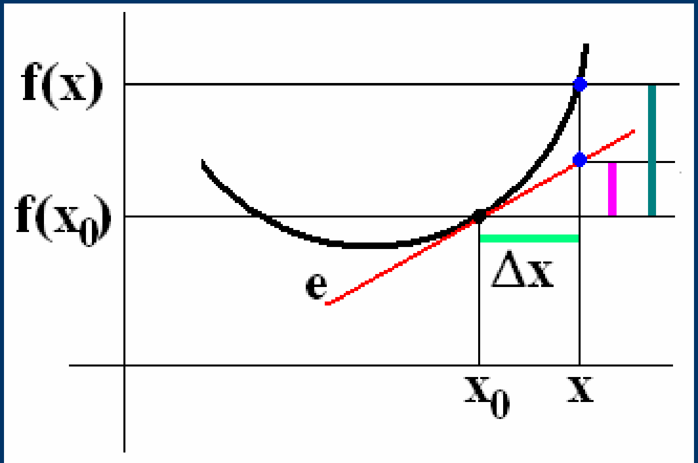
$$f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(2)\cdot\Delta x = 3\cdot 0{,}2 = \mathbf{0{,}6}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: érintő

Ha az f:I→R függvény differenciálható az x_0 helyen, akkor az x_0-beli érintője:

$$e(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Megjegyzés

Az érintő formulája könnyen érthető az alábbiak alapján:

1. **az (x_0,y_0) pontokon átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete: $y = y_0 + m\cdot(x-x_0)$**
2. **az érintő egyenes átmegy az $(x_0,f(x_0))$ ponton, meredeksége pedig: $f'(x_0)$.**

NEM NYOMTATÁSRA!

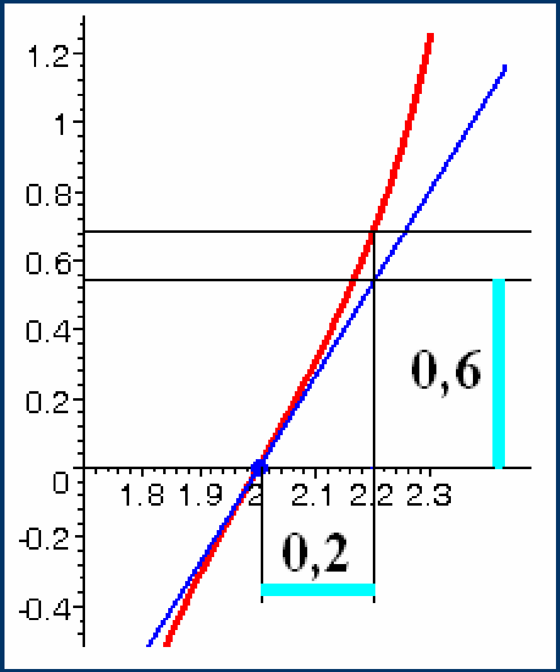
Példa

Határozzuk meg az f függvény érintőjét az x_0 helyen!

$$f(x) = \mathrm{tg}(3x-6), \quad x_0=2$$

$$f(x_0)=f(2)=\mathbf{0}$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\mathbf{3}$$



Az érintő:

$$e(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

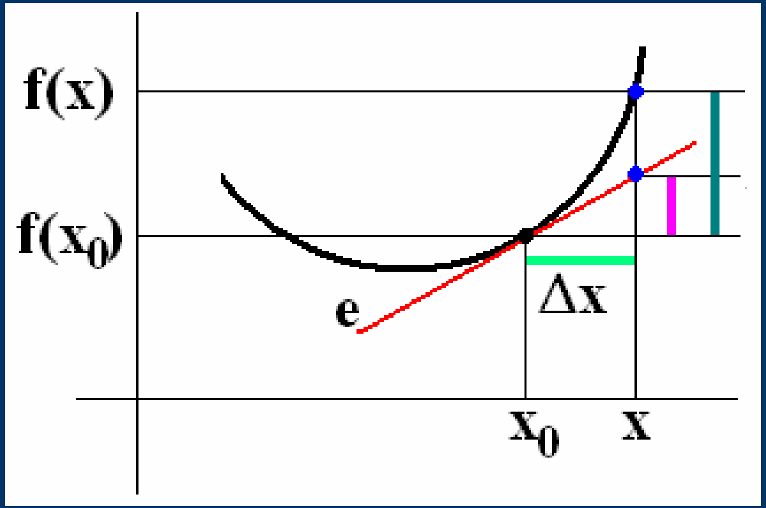
$$e(x)= f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) = 0+3\cdot(x-2) = 3x-6$$

Definíció: lineáris közelítés

Ha az $f: I \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az x_0 helyen, akkor f-nek az x_0-beli lineáris közelítésén a következőt értjük:

$$f(x) \approx e(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

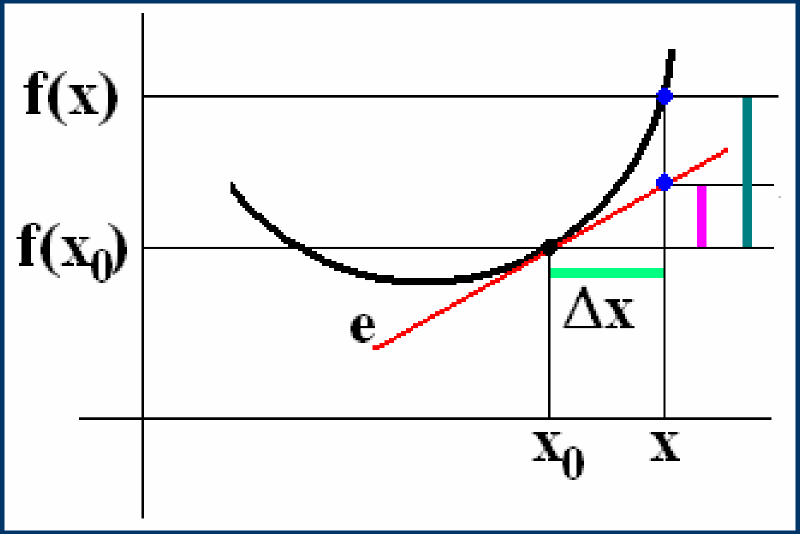
A lineáris közelítés az érintővel való közelítést jelenti.



Definíció: lineáris közelítés

A lineáris közelítés másképpen úgy is megfogalmazható, hogy a függvény megváltozását a differenciállal közelítjük:

$$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot(x-x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Határozzuk meg a f(2.2) függvényértéket közelítőleg a függvény $x_0=2$ helyen vett lineáris közelítésével!

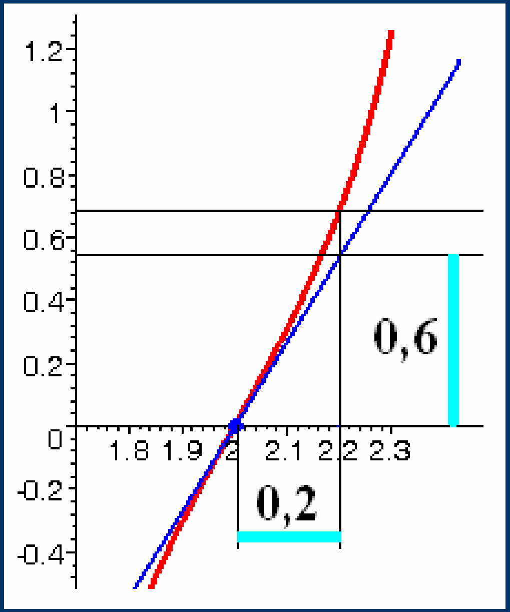
$$f(x) = tg(3x-6), \quad x_0=2, \quad \Delta x=0{,}2$$

$$f(x_0)=f(2)=\mathbf{0}$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\mathbf{3}$$

$$e(x) = f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) = 3(x-2)$$

$$f(2.2) \approx e(2.2) = 3\cdot(2.2-2) = 3\cdot 0.2 = \mathbf{0.6}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

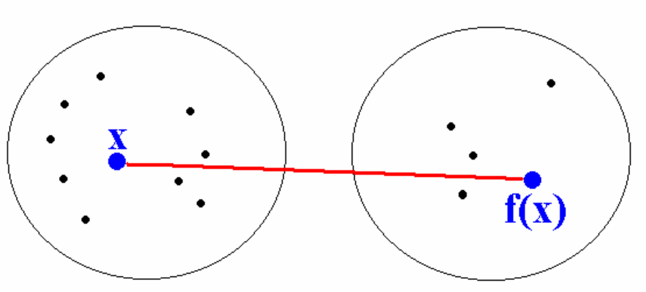
Tétel: függvények inverzének differenciálhányadosa

Ha az $f:I\rightarrow J$ függvény

- **szigorúan monoton az I intervallumon**
- **folytonos az I intervallumon**
- **differenciálható az $x\in I$ helyen és $f'(x)\neq 0$**

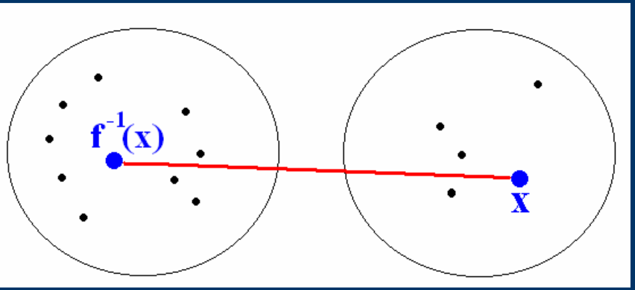
akkor az f^{-1} inverz függvény differenciálható az f(x) helyen és

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$



avagy

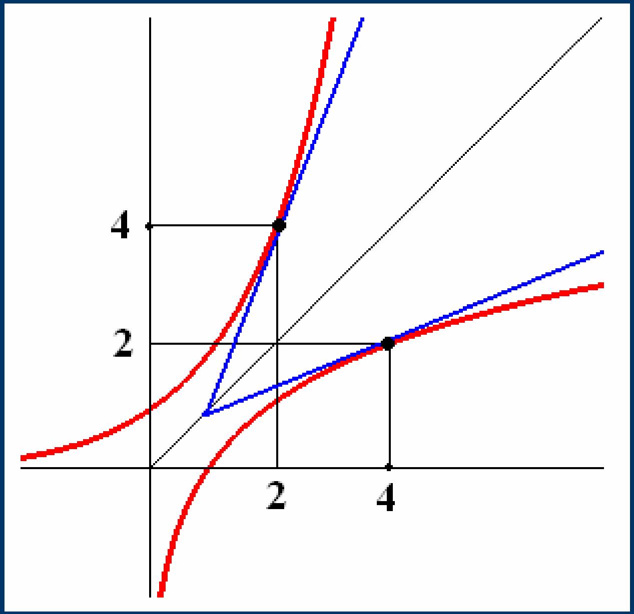
$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

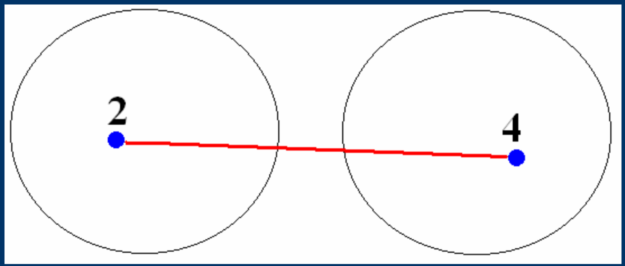


Példa

$f(x) = 2^x$ $\boxed{f(2) = 4}$

$f^{-1}(x) = \log_2 x$ $\boxed{f^{-1}(4) = 2}$





Az előző tétel szerint összefüggés van az f függvény 2 helyen vett és az f^{-1} függvény 4 helyen vett differenciálhányadosa (meredeksége között)

Példa

$$f(x) = 2^x$$

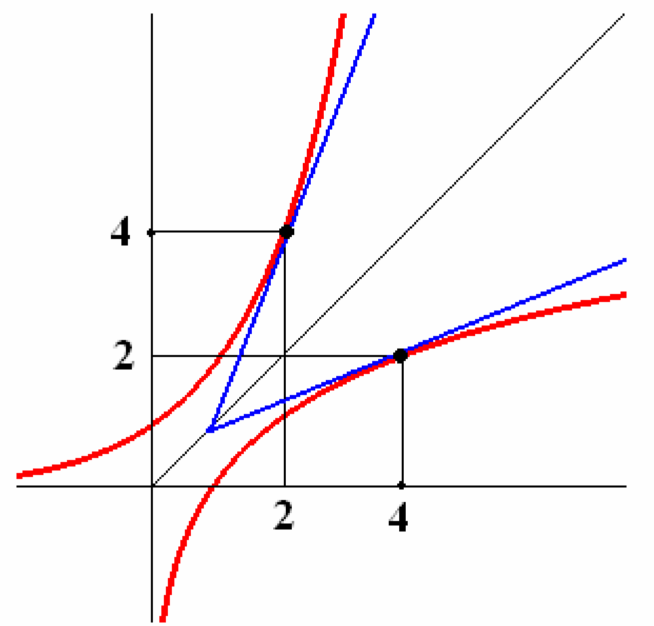
$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

$$f'(2) = 4 \cdot \ln 2$$

$$\left(f^{-1}\right)'(4) = \frac{1}{4 \cdot \ln 2}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Elemi függvény inverzének derivált függvénye

Az inverzfüggvény differenciálhányadosára vonatkozó formulával egy függvény deriváltjának ismeretében meghatározható az inverzfüggvény deriváltja. Például:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

logaritmus függvény

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{a^{\log_a x}\cdot\ln a}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

arcsin függvény

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Magasabb rendű deriváltak

Ha az f:I→R függvény differenciálható az I intervallumon, továbbá a derivált függvénye differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható x_0-ban. Jelölés:

$$(f')'(x_0) = f''(x_0)$$

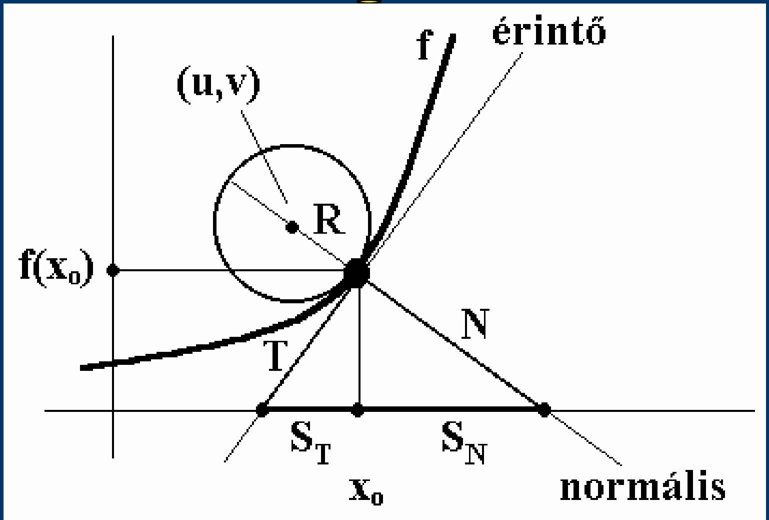
Ha az f:I→R függvény (k-1)-szer differenciálható az I intervallumon (k pozitív egész), továbbá a (k-1)-edik derivált függvénye differenciálható az $x_0 \in I$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f k-szor differenciálható x_0-ban.

Jelölés:

$$\left(f^{(k-1)}\right)'(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Differenciálható függvények néhány lokális jellemzője



A normális egyenes egyenlete

$$y = f(x_o) - \frac{1}{f'(x_o)} \cdot (x - x_o)$$

A tangens szakasz hossza

$$T = \left| f(x_o) \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x_o))^2}}{f'(x_o)} \right|$$

Szubtangens

$$S_T = \left| \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} \right|$$

A normális szakasz hossza

$$N = \left| f(x_o) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_o))^2} \right|$$

Szubnormális

$$S_N = \left| f(x_o) \cdot f'(x_o) \right|$$

Kétszer differenciálható függvények néhány lokális jellemzője

Definíció: görbület

$$g = \frac{f''(x_o)}{\left(1 + [f'(x_o)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Megjegyzés

Egyenes görbülete (bármely pontjában) 0.

Egy R sugarú kör görbületének nagysága (a kör bármely pontjában) 1/R.

Definíció: simulókör

Egy kétszer differenciálható függvény simulóköre adott függvénypontban az a kör, amely illeszkedik a függvénypontra, ebben a pontban a függvénnyel közös az érintője, továbbá a pontbeli görbületük is egyenlő.

Kétszer differenciálható függvények néhány lokális jellemzője

Simulókör

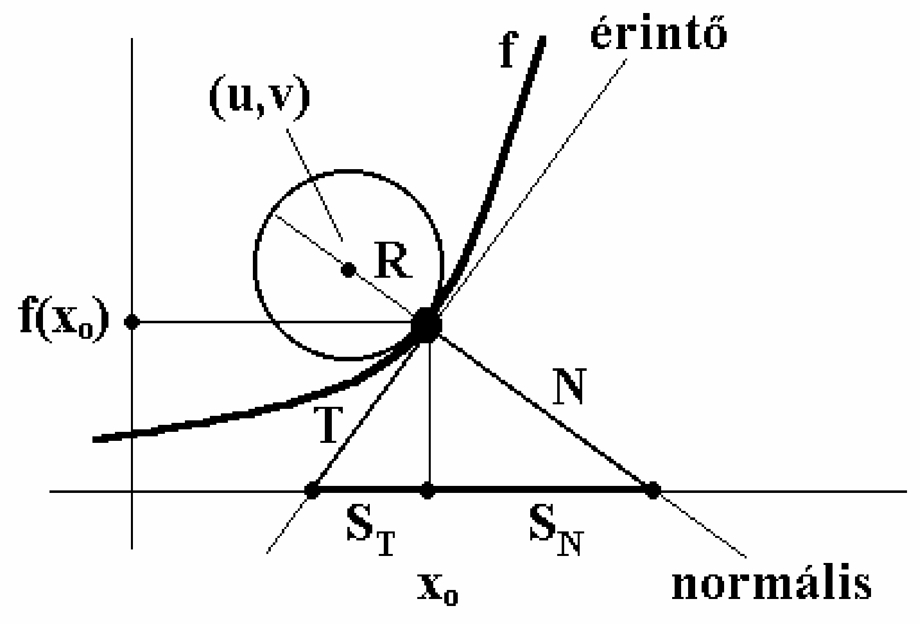
$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$$

ahol

$$u = x_o - f'(x_o) \cdot \frac{1 + [f'(x_o)]^2}{f''(x_o)}$$

$$v = f(x_o) + \frac{1 + [f'(x_o)]^2}{f''(x_o)}$$

$$R = \left| \frac{\left(1 + [f'(x_o)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_o)} \right|$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Differenciálható függvények közelítése polinommal

Definíció: Taylor polinomok

Legyen a∈R, 0<r∈R, n pozitív egész.

Ha az f:]a-r,a+r[→R függvény n-szer differenciálható az]a-r,a+r[intervallumon, akkor a

$$T_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomot az f függvény a alapponthoz tartozó n-edfokú Taylor polinomjának nevezzük.

Megjegyzés

Az elsőfokú Taylor polinom azonos az érintővel.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Határozzuk meg a sin függvény Taylor polinomjait az a=0 helyen az elsőfokútól az ötödfokúig!

$$a = 0$$

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(a) = f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f''(a) = f''(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f'''(a) = f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(a) = f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(a) = f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$a = 0$ $f(a) = 0$ $f'(a) = 1$ $f''(a) = 0$ $f'''(a) = -1$ $f^{(4)}(a) = 0$ $f^{(5)}(a) = 1$

$$T_{5,a=0}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{n!}(x-a)^3 +$$

$$+ \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{f^{(5)}(a)}{5!}(x-a)^5$$

$$T_{1,a=0} = x \qquad T_{2,a=0} = x$$

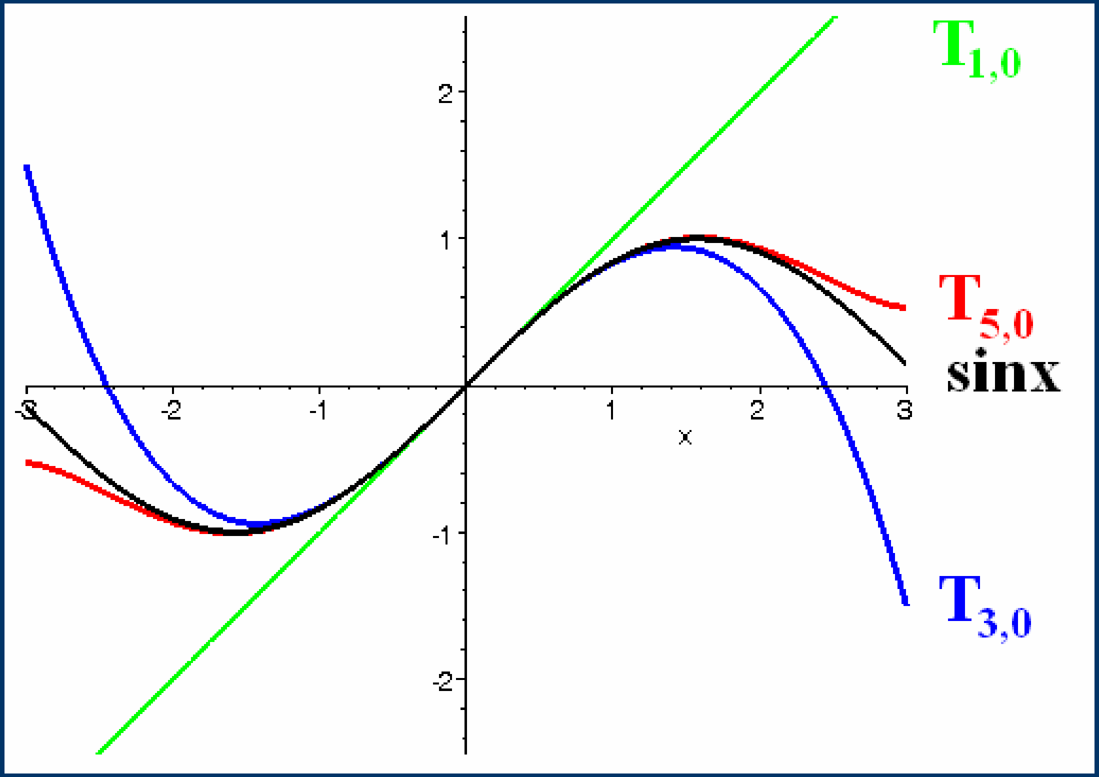
$$T_{3,a=0} = x - \frac{1}{6}\cdot x^3 \qquad T_{4,a=0} = x - \frac{1}{6}\cdot x^3$$

$$T_{5,a=0} = x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5$$

$$T_{1,a=0} = x$$

$$T_{3,a=0} = x - \frac{1}{6}\cdot x^3$$

$$T_{5,a=0} = x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: Taylor tétel

Legyen $a\in\mathbf{R}$, $0<r\in\mathbf{R}$, n pozitív egész.

Ha az $f:]a-r,a+r[\to\mathbf{R}$ függvény n-szer differenciálható az $]a-r,a+r[$ intervallumon, akkor bármely $x\in]a-r,a+r[$ elemhez van olyan ξ az x és az a között, melyre fennáll, hogy

$$f(x)=T_{n-1,a}(x)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Megjegyzés

Hibatag:

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n=f(x)-T_{n-1,a}(x)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$f(x) = T_{n-1,a}(x) + \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Megjegyzés

A Taylor tétel szerint egy n-szer differenciálható f függvény esetén az f(x) függvényérték becsülhető az f-nek egy a helyen vett (első, második, … , (n-1).) deriváltjaival úgy, hogy a becslés maximális hibája az n-edik derivált függvénnyel kifejezhető:

ha az $f^{(n)}$ függvény korlátja az x és az a helyek között K, akkor a becslés hibája legfeljebb

$$\frac{K}{n!}(x-a)^n$$

ugyanis

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n\right| \le \frac{K}{n!}(x-a)^n$$

Definíció: Taylor sor

Ha az f:]a-r,a+r[→R függvény akárhányszor differenciálható az]a-r,a+r[intervallumon, akkor az

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

hatványsort az f függvény a alapponthoz tartozó Taylor sorának nevezzük.

Egy f függvény Taylor sorával kapcsolatban alapvető kérdés, hogy f egyenlő-e a hatványsorának összegfüggvényével.

A Taylor tételből következik, hogy ha az f függvény deriváltjai közös korláttal rendelkeznek, akkor f egyenlő a Taylor sorának összegfüggvényével.

Definíció

A 0 alapponthoz tartozó Taylor sort MacLaurin sornak is nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Az $x \to e^x$, $x \to \sin x$, $x \to \cos x$ függvényeknek MacLaurin sora azonos a függvényeket definiáló hatványsorral.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Példa

Határozzuk meg az x→sin(e^x) függvény harmadfokú Taylor polinomját az a=1 helyen!

$$a = 1$$

$$f(x) = \sin(e^x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = \sin(e) \approx 0{,}411$$

$$f'(x) = e^x \cdot \cos(e^x) \quad \Rightarrow \quad f'(1) = e \cdot \cos(e) \approx -2{,}478$$

$$f''(x) = -e^{2x} \cdot \sin(e^x) + e^x \cdot \cos(e^x)$$

$$\Rightarrow \quad f''(1) = -e^2 \cdot \sin(e) + e \cdot \cos(e) \approx -5{,}515$$

$$f'''(x) = -e^{3x} \cdot \cos(e^x) - 3e^{2x} \cdot \sin(e^x) + e^x \cdot \cos(e^x)$$

$$\Rightarrow \quad f'''(1) = -e^3 \cdot \cos(e) - 3e^2 \cdot \sin(e) + e \cdot \cos(e) \approx 6.716$$

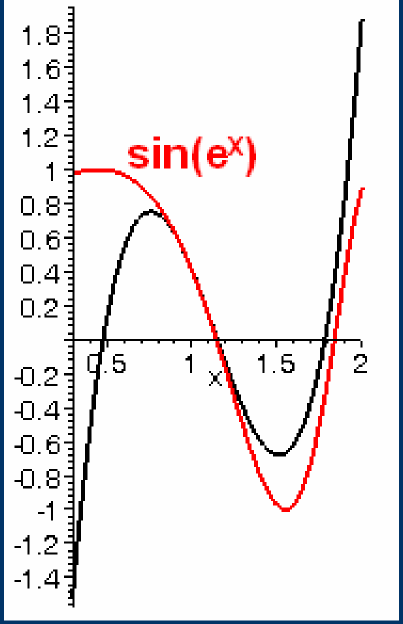
$a = 1$ $f(1) \approx 0{,}411$ $f'(1) \approx -2{,}478$ $f''(1) \approx -5{,}515$ $f'''(1) \approx 6.716$

$$T_{3,a=1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{n!}(x-a)^3$$

$$T_{3,a=1}(x) = 0{,}411 - 2{,}478 \cdot (x-1) - \frac{5{,}515}{2}(x-1)^2 + \frac{6{,}716}{6}(x-1)^3$$

$$\sin(e^x) \approx 0{,}411 - 2{,}478 \cdot (x-1) - 2{,}758 \cdot (x-1)^2 + 1{,}119 \cdot (x-1)^3$$

$$\sin(e^x) \approx 0{,}411 - 2{,}478 \cdot (x-1) - 2{,}758 \cdot (x-1)^2 + 1{,}119 \cdot (x-1)^3$$



NEM NYOMTATÁSRA!

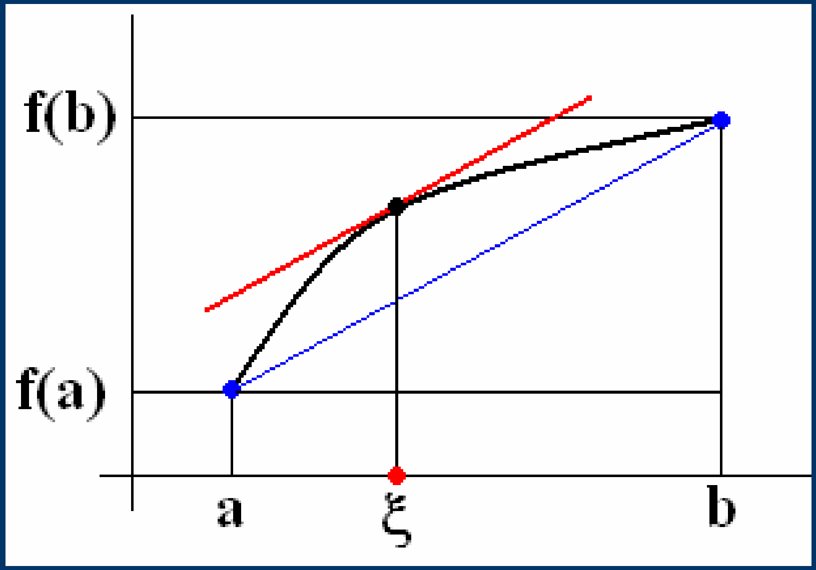
Tétel: Lagrange tétel

Ha az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény

- **folytonos az [a,b] intervallumon**
- **differenciálható az]a,b[intervallumon,**

akkor van olyan $\xi\in]a,b[$, melyre fennáll, hogy

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Megjegyzés

A Lagrange tételnek nagy jelentősége van a differenciálható függvények vizsgálatában.

A tétel alapján könnyen belátható például, hogy ha egy differenciálható függvény derivált függvénye egy I intervallumon nemnegatív, akkor a függvény monoton növekvő az adott intervallumon: tetszőleges $[x,y] \subseteq I$ részintervallumra alkalmazva a tételt kapuk, hogy $f(x) \leq f(y)$.

Hasonlóan kapjuk, hogy ha egy differenciálható függvény derivált függvénye egy intervallumon nempozitív, akkor a függvény monoton növekvő ezen az intervallumon.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: L'Hospital szabály (határérték-számítás differenciálással)

Ha

- $f:]a,b[\to \mathbf{R}$ és $g:]a,b[\to \mathbf{R}$ differenciálható függvények
- $g(x) \neq 0$, ha $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a,b[$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$
- létezik a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték,

akkor létezik a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték is és

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^{x}-1-x-\frac{x^{2}}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^{x}-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^{x}}=1$$

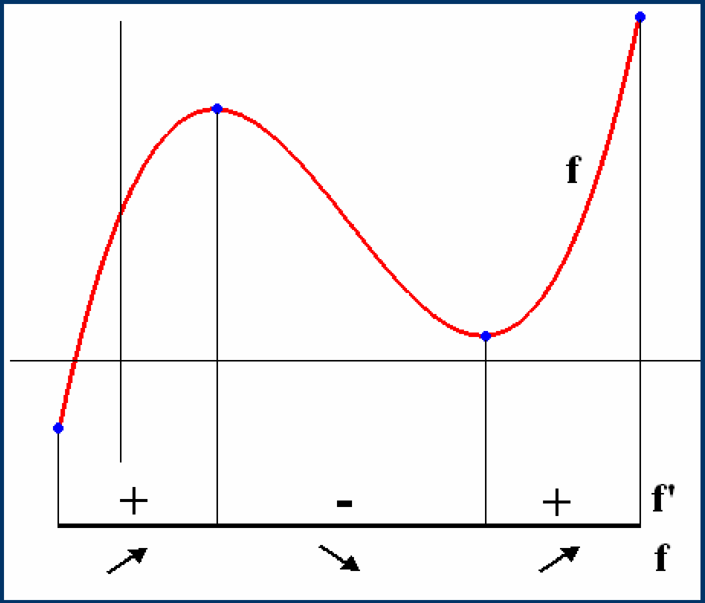
NEM NYOMTATÁSRA!

Differenciálható függvények vizsgálata

Tétel: A monotonitás és az első derivált előjele

Ha az $f: I \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható, akkor

f monoton növekvő az I intervallumon $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$, $x \in I$
f monoton csökkenő az I intervallumon $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$, $x \in I$



Megjegyzés

Az állítások a Lagrange tétel következményei.

Tétel: Helyi szélsőértékek létezésének szükséges és elegendő feltétele

Ha az f:I→R differenciálható függvényre fennáll, hogy

- **$f'(x_0) = 0$**
- **az f ' függvény x_0-ban előjelet vált,**

azaz van x_0-nak olyan $]\, x_0-r\,,\, x_0+r\,[\subseteq I$ környezete, hogy

$$f'(x_0) \geq 0\,,\ \text{ha } x \in]\, x_0-r\,,\, x_0\,[$$

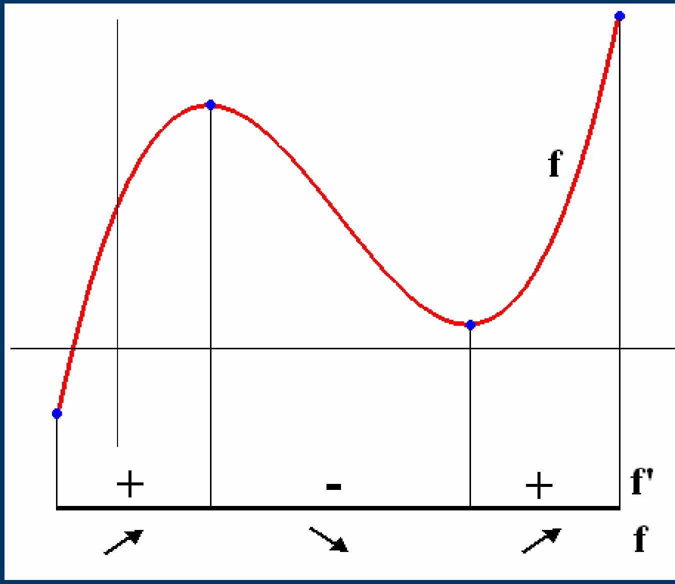
$$f'(x_0) \leq 0\,,\ \text{ha } x \in]\, x_0\,,\, x_0+r\,[$$

vagy fordítva:

$$f'(x_0) \leq 0\,,\ \text{ha } x \in]\, x_0-r\,,\, x_0\,[$$

$$f'(x_0) \geq 0\,,\ \text{ha } x \in]\, x_0\,,\, x_0+r\,[$$

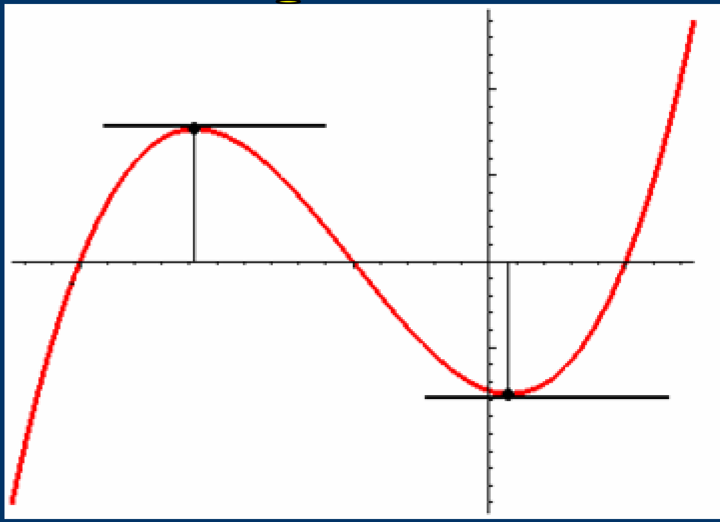
akkor f-nek x_0-ban helyi szélsőértéke van.



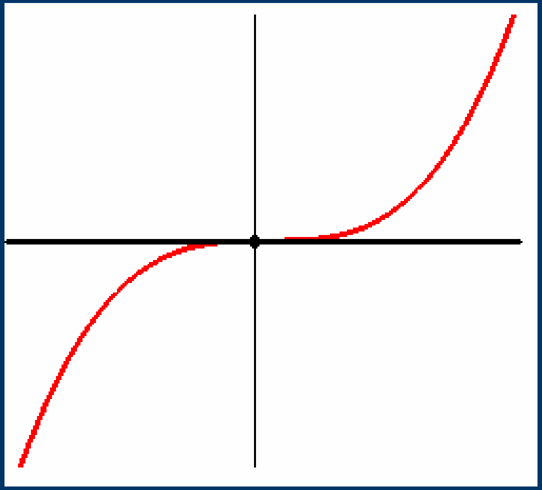
NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzések

Egy f differenciálható függvény esetén az $f'(x_0)=0$ egyenlőség szükséges feltétele annak, hogy f-nek x_0-ban helyi szélsőértéke legyen.



Az $f'(x_0)=0$ egyenlőség azonban nem elegendő a helyi szélsőérték létezéséhez: az $f(x)=x^3$ függvény esetén például $f'(0)=0$, pedig f-nek a 0-ban nincs helyi szélsőértéke.

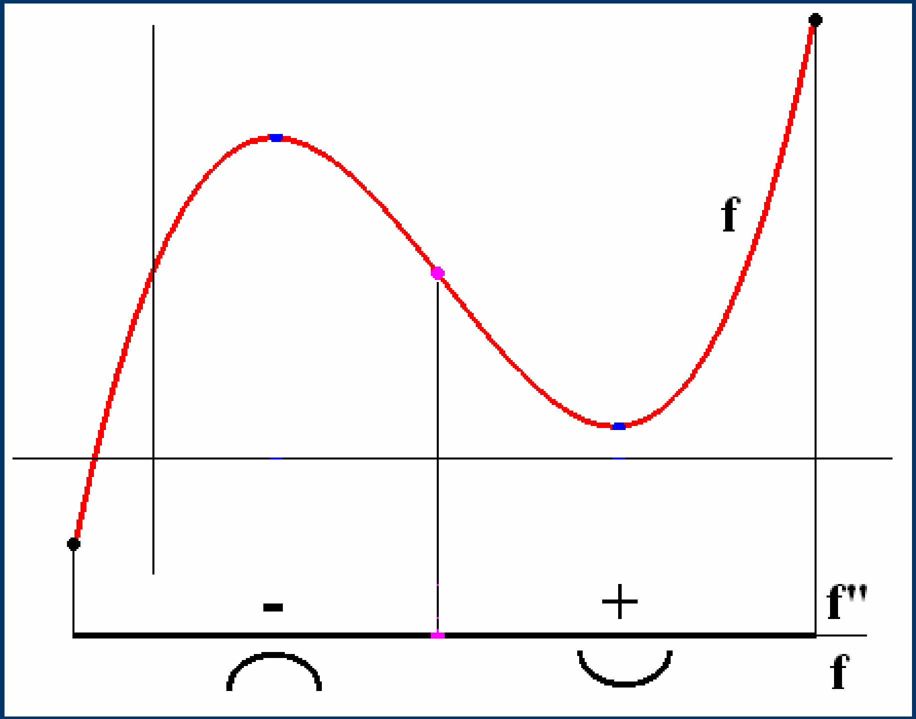


Tétel: A konvexitás és a második derivált előjele

Ha az $f: I \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható, akkor

$$f \text{ **konvex** az } I \text{ intervallumon} \iff f''(x) \geq 0, \quad x \in I$$

$$f \text{ **konkáv** az } I \text{ intervallumon} \iff f''(x) \leq 0, \quad x \in I$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzések

1. **Egy differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha a deriváltja monoton növekvő.**

2. **Egy differenciálható függvény pontosan akkor konkáv, ha a deriváltja monoton csökkenő.**

3. **Egy $f: I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha bármely $x \in I$ és $x_0 \in I$ esetén**

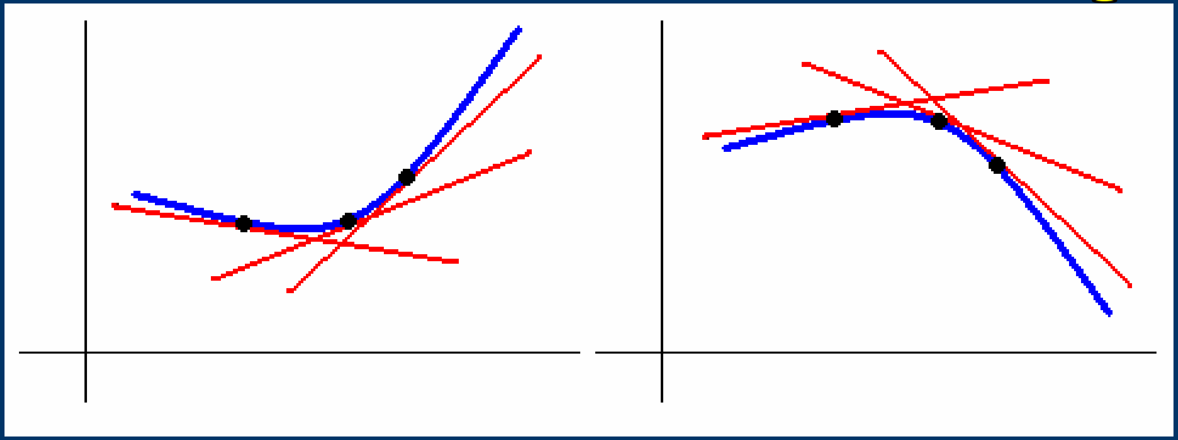
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

azaz a függvény bármely pontbeli érintője „felett" halad,

4. **Egy $f: I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konkáv, ha bármely $x \in I$ és $x_0 \in I$ esetén**

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

azaz a függvény bármely pontbeli érintője „alatt" halad.



konvex függvény **konkáv függvény**

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: Inflexiós pont létezésének szükséges és elegendő feltétele

Ha az f: I→R kétszer differenciálható függvényre fennáll, hogy

- **f ”(x_0) = 0**
- **az f ” függvény x_0-ban előjelet vált,**

azaz van x_0-nak olyan] x_0–r , x_0+r [⊆ I környezete, hogy

f ”(x_0) ≥ 0 , ha x ∈] x_0–r , x_0 [

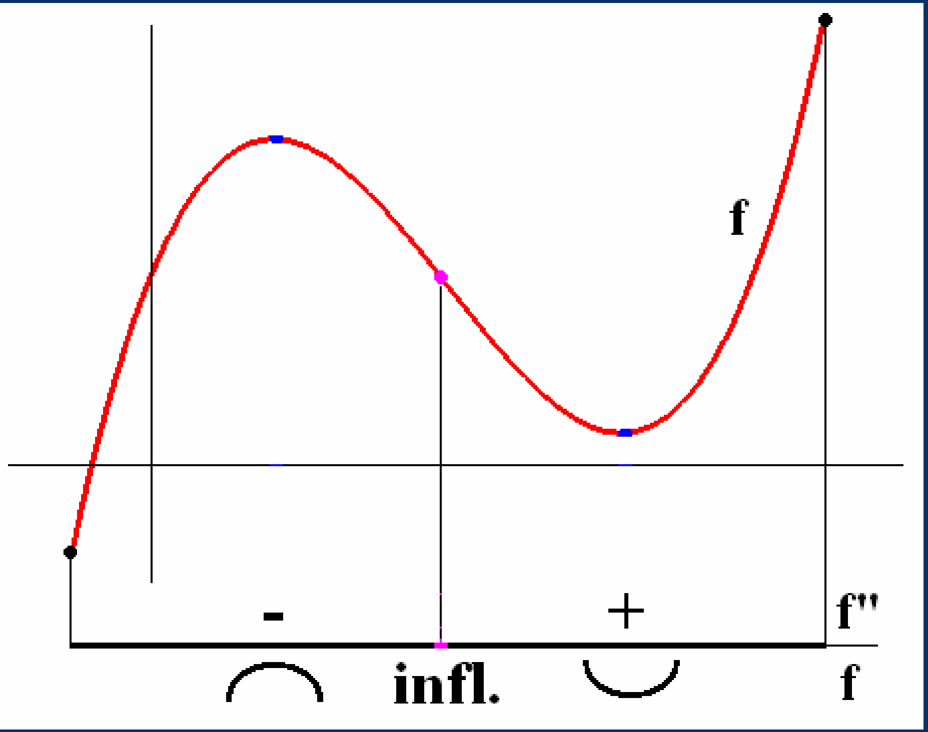
f ”(x_0) ≤ 0 , ha x ∈] x_0, x_0+r [

vagy fordítva

f ”(x_0) ≤ 0 , ha x ∈] x_0–r , x_0 [

f ”(x_0) ≥ 0 , ha x ∈] x_0, x_0+r [

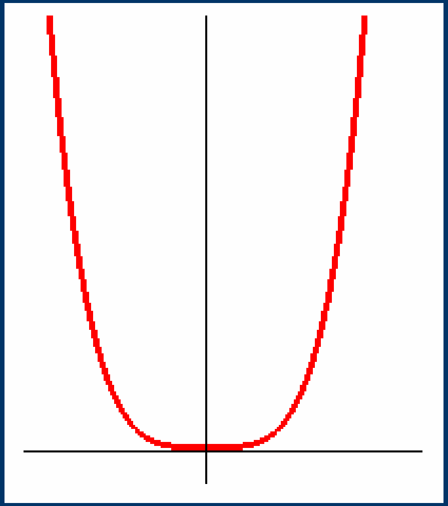
akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.



NEM NYOMTATÁSRA!

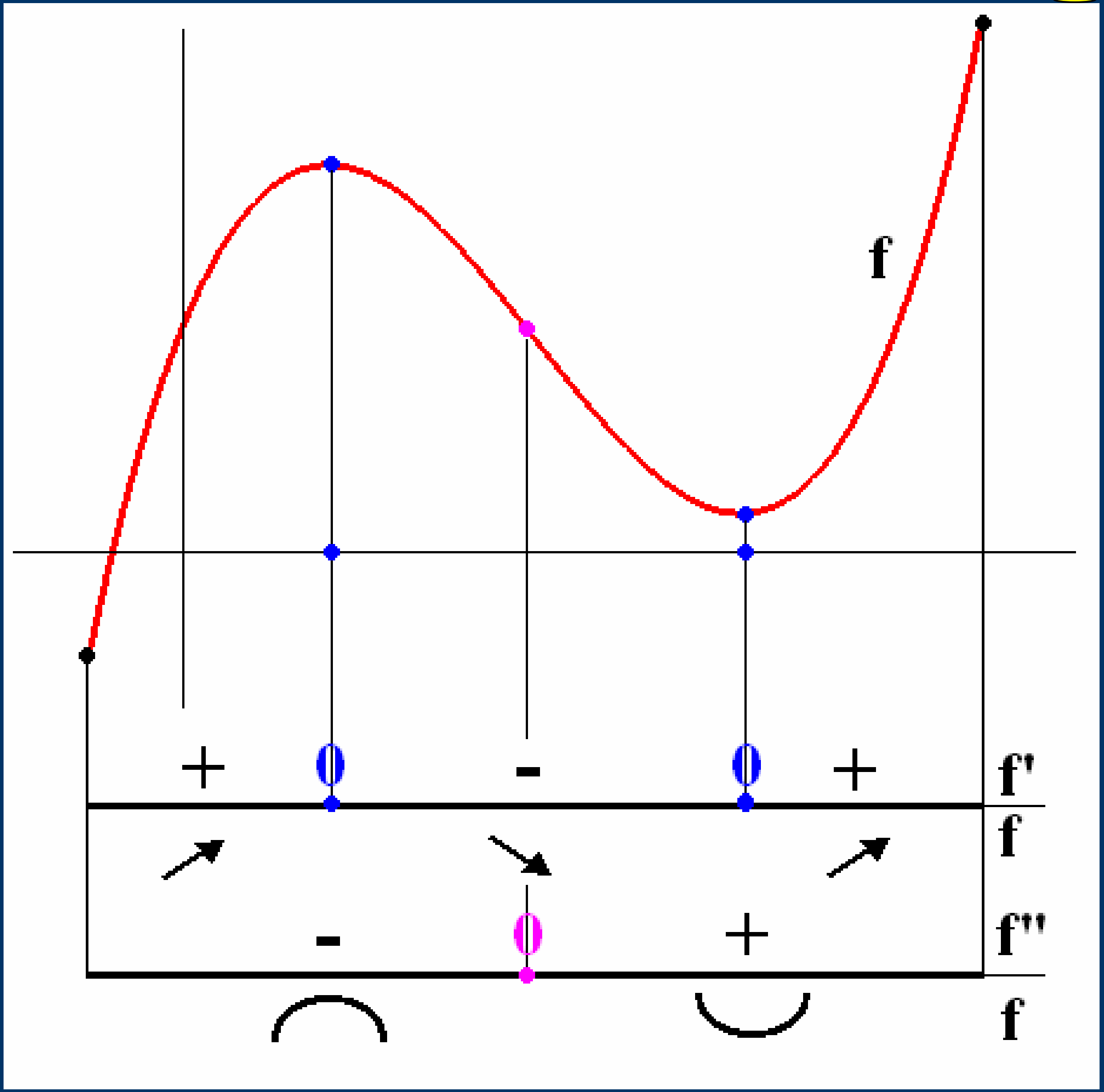
Megjegyzések

1. Egy f kétszer differenciálható függvény esetén az $f''(x_0)=0$ egyenlőség szükséges feltétele annak, hogy f-nek x_0-ban inflexiós pontja legyen.



2. Az $f''(x0)=0$ egyenlőség azonban nem elegendő az inflexiós pont létezéséhez: az $f(x)=x^4$ függvény esetén például $f''(0)=0$, pedig f-nek a 0-ban nincs inflexiós pontja.

NEM NYOMTATÁSRA!



NEM NYOMTATÁSRA!

A függvényvizsgálat szempontjai

1. Amennyiben az **értelmezési tartomány** nem adott, a legbővebb valós számhalmaz megkeresése, amelyen a függvény értelmezhető.
2. A **zérushelyek** megkeresése.
3. A **szakadási helyek** megkeresése.
4. A **határérték** meghatározása a szakadási helyeknél, valamint az értelmezési tartomány „széleinél”.

5. A **monotonitás** vizsgálata és a **helyi szélsőértékek** meghatározása.
6. A **konvexitás** vizsgálata és az **inflexiós pontok** meghatározása.
7. A függvény **felvázolása** a megállapított tulajdonságok alapján.
8. Az **értékkészlet** meghatározása, a **korlátosság** vizsgálata.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

1. A legbővebb valós számhalmaz, amelyen a függvény értelmezhető:

R (ez minden polinom esetén így van)

2. Zérushelyek:

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x = x\cdot(x^2-7x+10) = x\cdot(x-2)\cdot(x-5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5$$

3. Szakadási helyek:

Szakadási hely nincs, mivel a polinomok folytonosak a teljes számegyenesen.

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

4. A határérték az értelmezési tartomány „széleinél”:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 7x^2 + 10x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 7x^2 + 10x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}\right) = +\infty$$

Megjegyzés

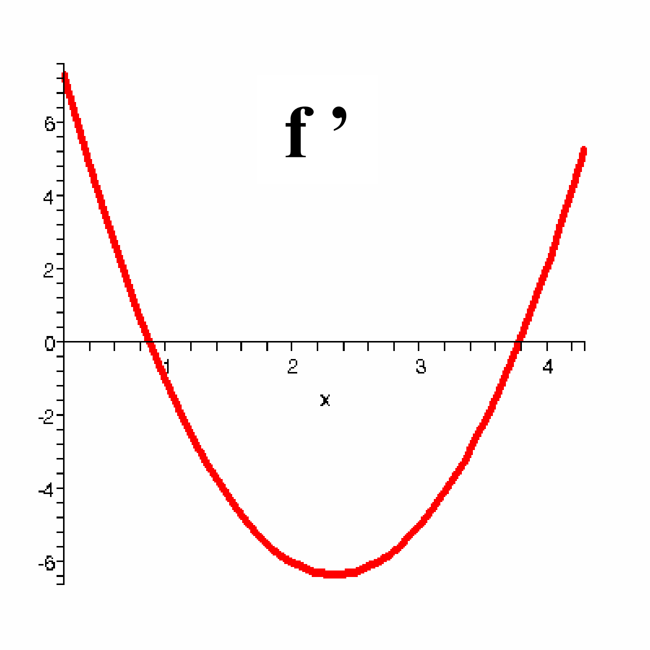
Amint azt a fenti számolások is mutatják, egy polinom (-∞)-beli, illetve (+∞)-beli „viselkedését” a legmagasabb fokszámú tag (annak kitevője és együtthatója) határozza meg.

NEM NYOMTATÁSRA!

5. Monotonitás, helyi szélsőértékek

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 10$$



$\boxed{f'(x) = 0}$

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 10 = 0$$

gyökök: $x_1 = 0{,}88$, $x_2 = 3{,}79$

$\boxed{f'(x) \geq 0}$

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 10 \geq 0$$

$x \leq 0{,}88$, vagy $x \geq 3{,}79$

$\boxed{f'(x) \leq 0}$

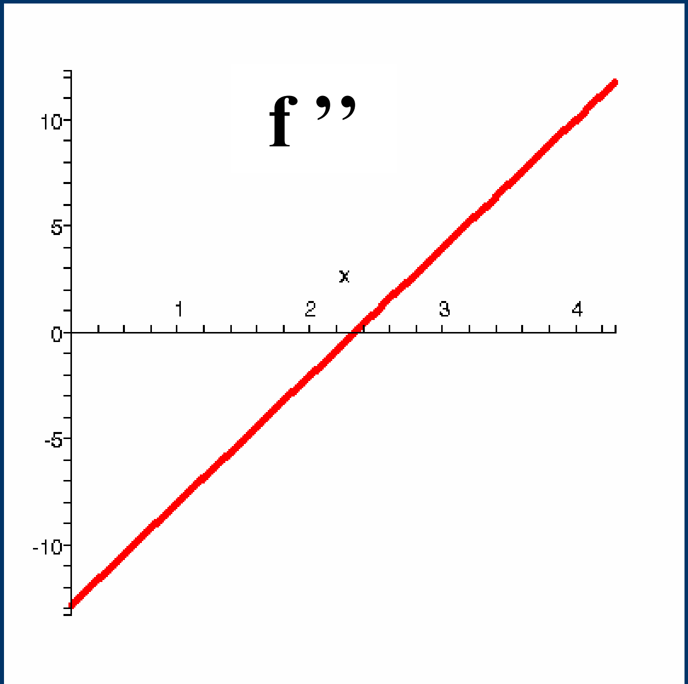
$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 10 \leq 0$$

$0{,}88 \leq x \leq 3{,}79$

6. Konvexitás, inflexiós pontok

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

$$f''(x) = 6x - 14$$



$\boxed{f''(x) = 0}$

$$f''(x) = 6x - 14 = 0$$

gyök: $x = 2{,}33$

$\boxed{f''(x) \geq 0}$

$$f''(x) = 6x - 14 \geq 0$$

$$x \geq 2{,}33$$

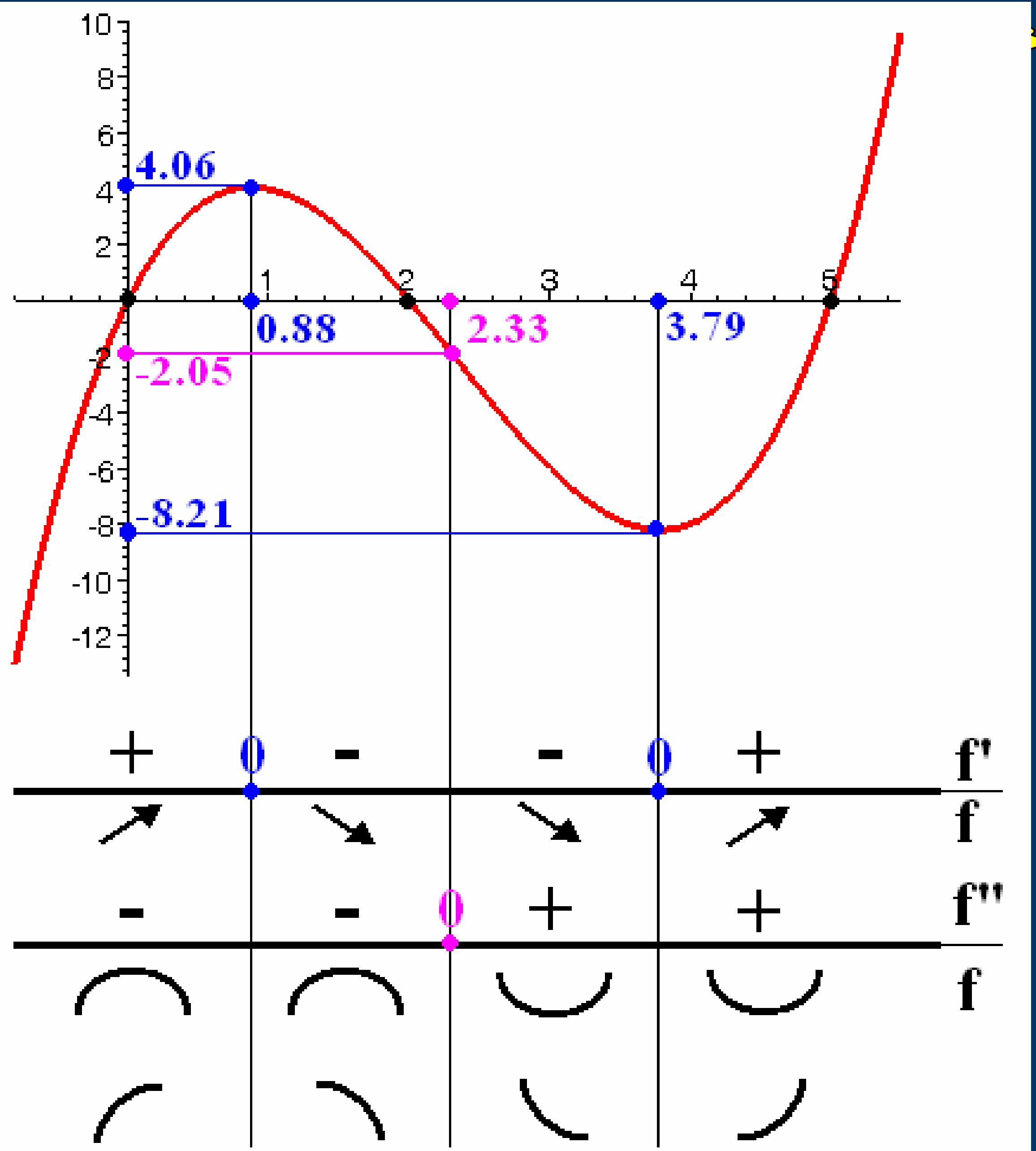
$\boxed{f''(x) \leq 0}$

$$f''(x) = 6x - 14 \leq 0$$

$$x \leq 2{,}33$$

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$

7. Felvázolás



A helyi maximum értéke:

$f(0.88) = 4.06$

A helyi minimum értéke:

$f(3.79) = -8.21$

Inflexiós pont:

$f(2.33) = -2.05$

$f'(x) = 3x^2 - 14x + 10$

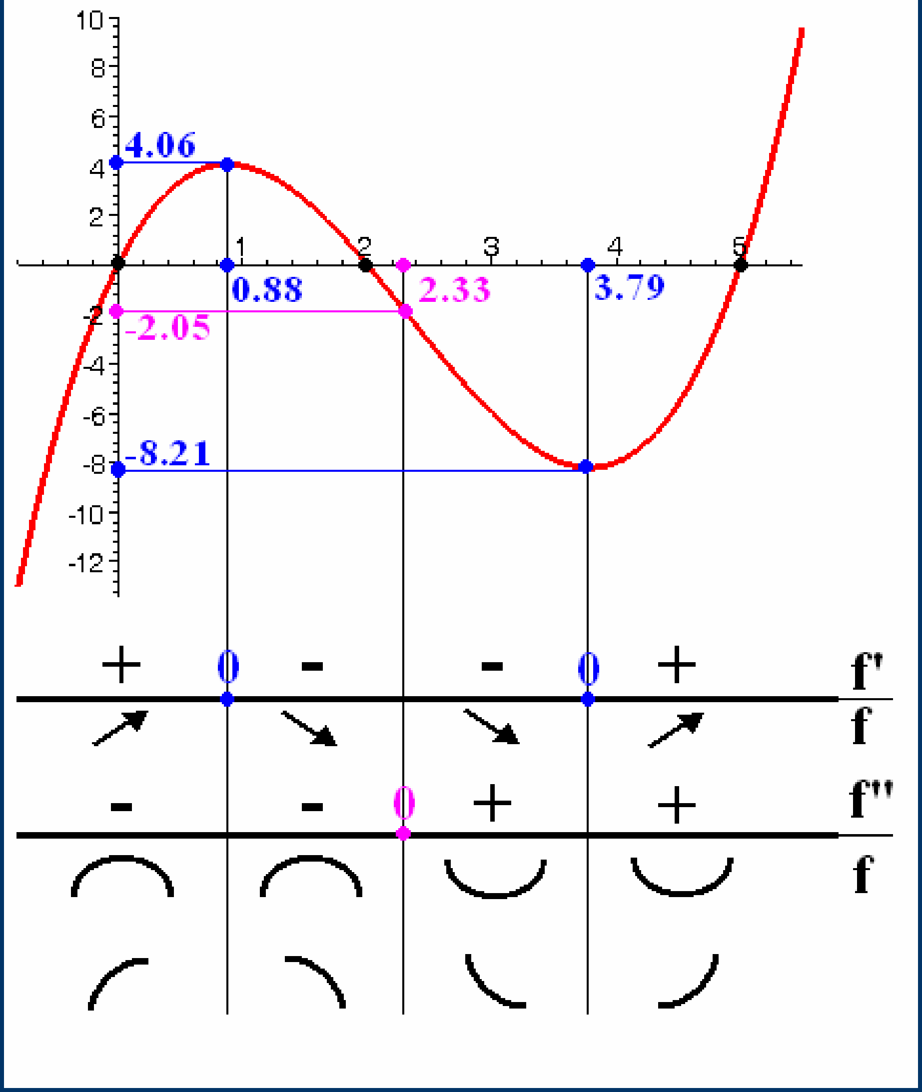
$f''(x) = 6x - 14$

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

8. Értékkészlet:

R

A függvény alulról sem, felülről sem korlátos.



Példa

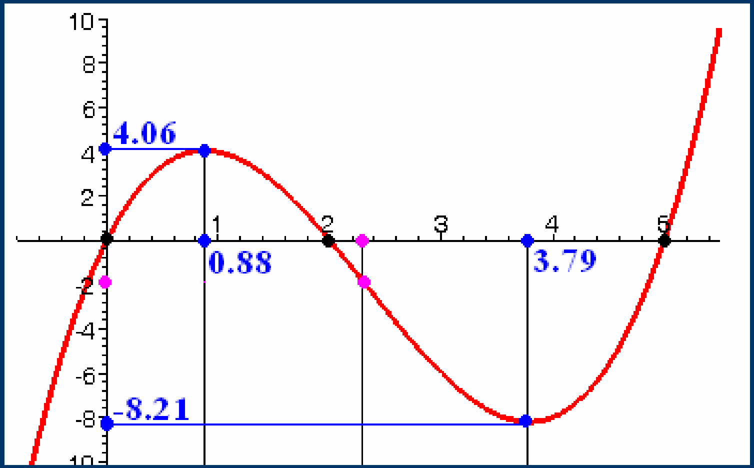
Keressük meg az $f(x)=x^3-7x^2+10x$, $x\in[0,6]$ függvény (globális) minimumát és maximumát!

Emlékeztetőül: zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és maximumát vagy az intervallum belsejében helyi szélsőérték formájában, vagy az intervallum határán.

Ezért a feladat megoldásának menete:

1. **megkeressük a helyi szélsőértékeket a [0,6] intervallumon**
2. **meghatározzuk a függvény értékeit a végpontokban**
3. **a kapott értékeket összehasonlítva megkapjuk a keresett maximum és minimum értékeket.**

Mivel az előzőekben megvizsgáltuk az $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$ függvényt, ennek eredményét most felhasználhatjuk:



Eszerint helyi maximum van az x=0.88 helyen, melynek értéke 4.06, helyi maximum van az x=3.79 helyen, melynek értéke –8.21.

A végpontokban felvett értékek: f(0)=0, f(6)=24.

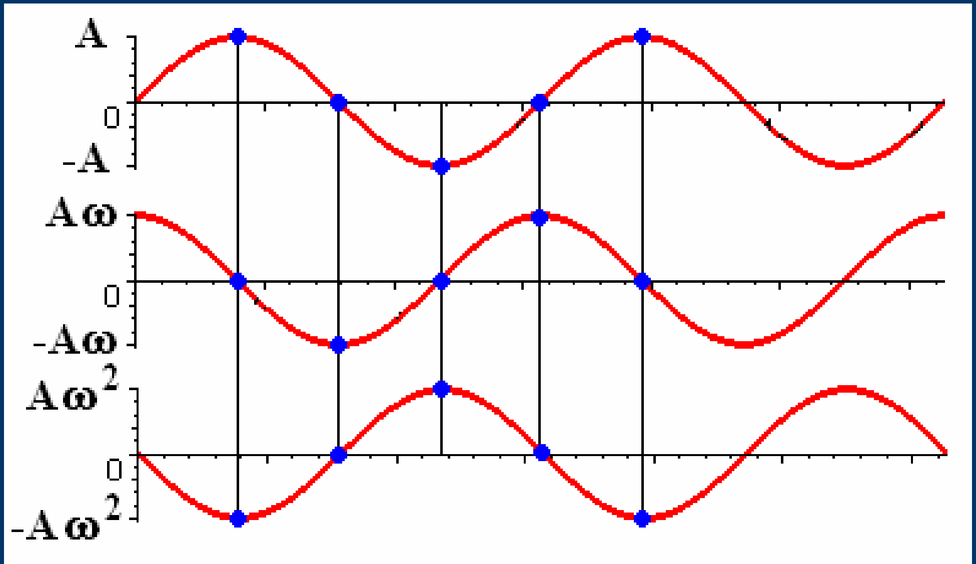
Tehát:

A maximum helye x=6, értéke 24.

A maximum helye x=3.79, értéke –8.21.

NEM NYOMTATÁSRA!

Harmonikus rezgőmozgás út-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvénye



$$y(t) = A\cdot\sin(\omega t)$$

$$v(t) = A\omega\cdot\cos(\omega t)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cdot\sin(\omega t)$$

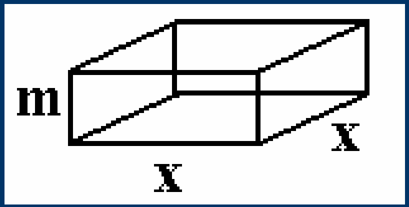
A sebesség-idő függvény az út-idő függvény derivált függvénye.

A gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény derivált függvénye.

Függvény szélsőértékének megkeresésével megoldható problémák

Példa

Egy 100 m^3-es víztároló medencét akarunk építeni. Milyenre kell választani a méreteit, hogy a megépítéséhez a legkevesebb anyagot kelljen felhasználni?



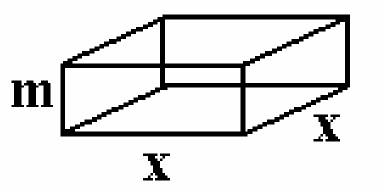
Megoldás

Először be kell vezetni egy olyan változót, melynek segítségével felírható az a mennyiség, melynek a szélsőértékét kell megkeresni. Itt egy lehetséges megoldás az alapél hosszának bevezetése változóként, jelölje ezt x.

A szükséges anyag mennyisége arányos a medence felületével (az alaplap és az oldallapok területének összegével), így a felület kell felírni az x függvényében.

NEM NYOMTATÁSRA!

$$F(x) = x^2 + 4 \cdot m \cdot x$$

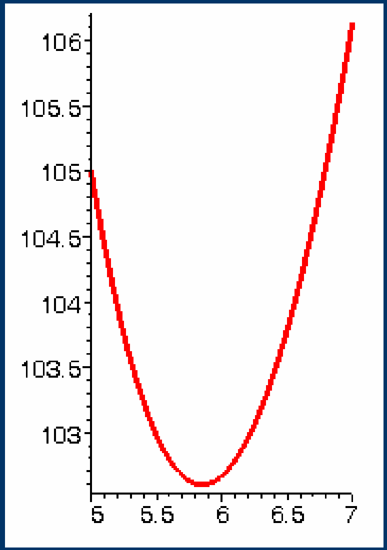


Itt látszólag két változó van, de a magasság kifejezhető az x segítségével, mivel a térfogat értéke rögzített:

$$V = 100 \qquad m = \frac{100}{x^2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = x^2 + \frac{400}{x}$$

(az x változó, a feladat jellegéből adódóan, csak pozitív értéket vehet fel)

$$F'(x) = 2x - \frac{400}{x^2}$$

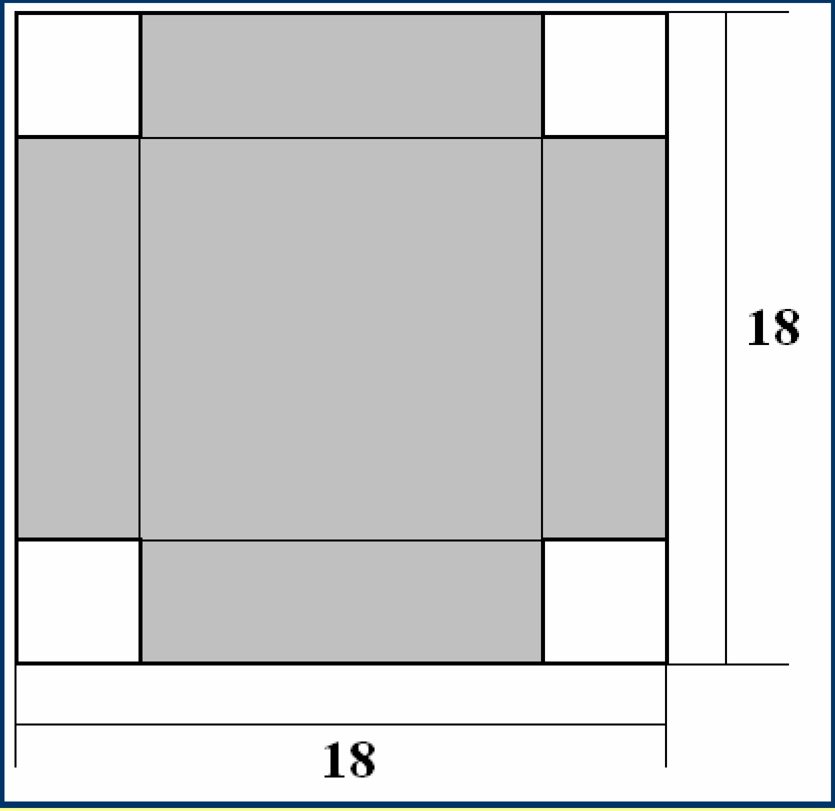


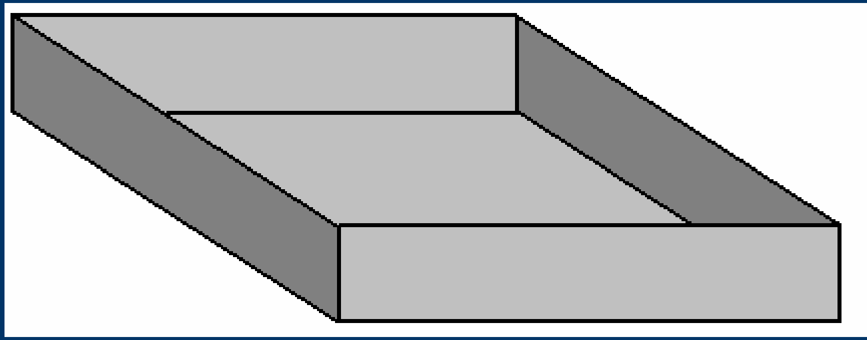
A minimum helye: $x = \sqrt[3]{200}$

A minimum értéke: $F(\sqrt[3]{200}) = \left(\sqrt[3]{200}\right)^2 + \dfrac{400}{\sqrt[3]{200}}$

Példa

18 cm oldalú, négyzet alakú lapból a rajzon látható módon felül nyitott dobozt készítünk. Határozza meg a doboz maximális térfogatát!



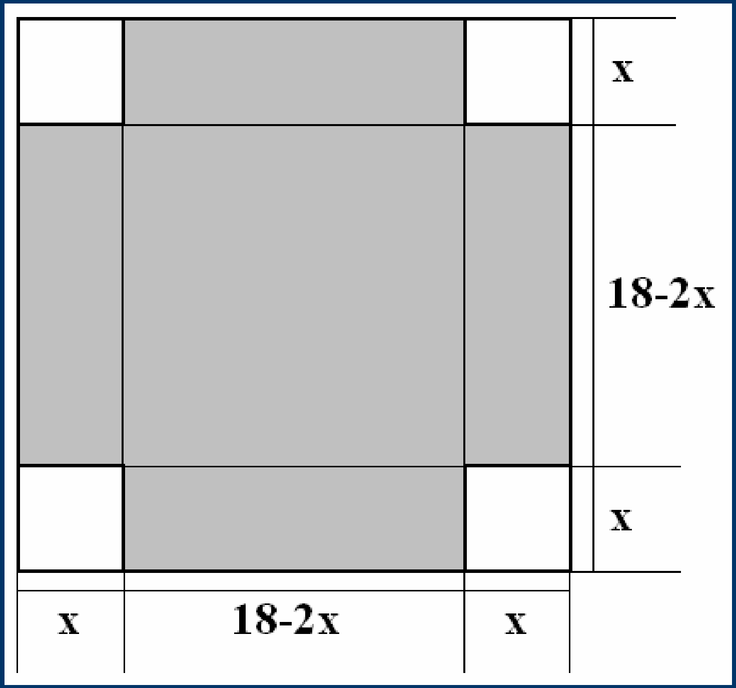


NEM NYOMTATÁSRA!

Megoldás

A térfogat:

$$V(x) = x \cdot (18 - 2x)^2$$

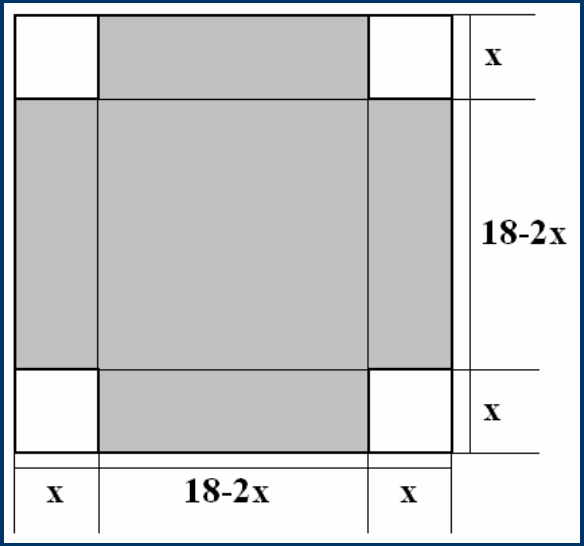


A térfogat néhány x érték mellett:

x (cm)	1	2	3	4	5
V(x) (cm^3)	256	392	432	400	320

A térfogat:

$$V(x) = x \cdot (18 - 2x)^2 = 4x^3 - 72x^2 + 324x$$



A V függvény értelmezési tartománya:

$$0 < x < 9$$

A V függvény maximumát kell megkeresni.

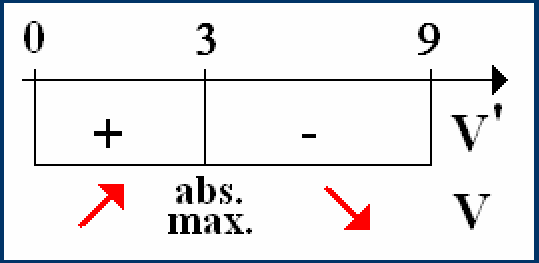
$$V\,'(x) = 12x^2 - 144x + 324$$

A V ' (x) = 0 egyenlet megoldása a]0,9[intervallumon:

$$x = 3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

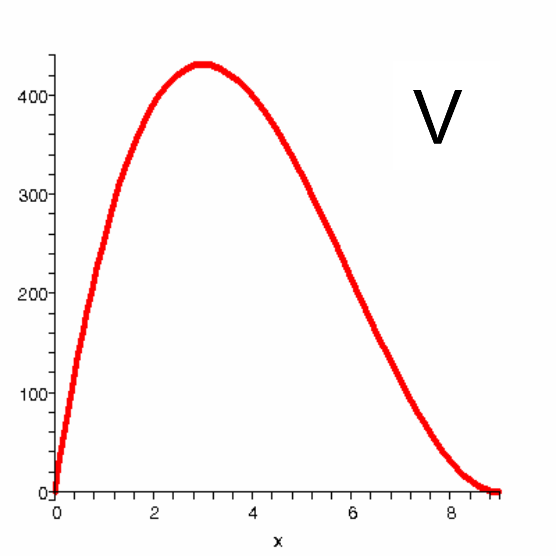
A derivált előjele:

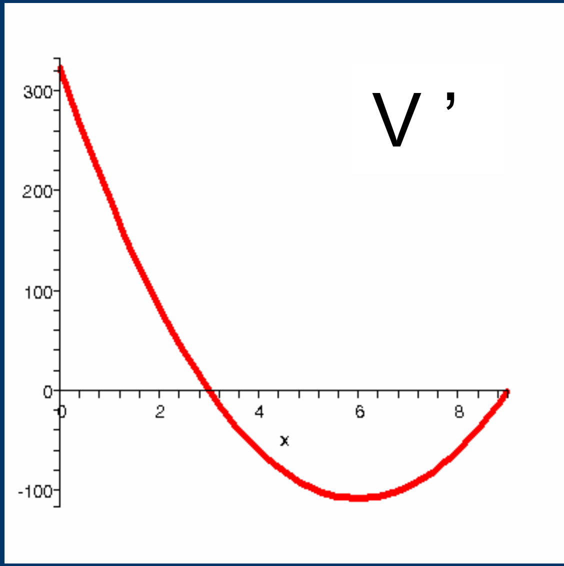


V-nek maximuma van x=3-nál.

A probléma megoldása:

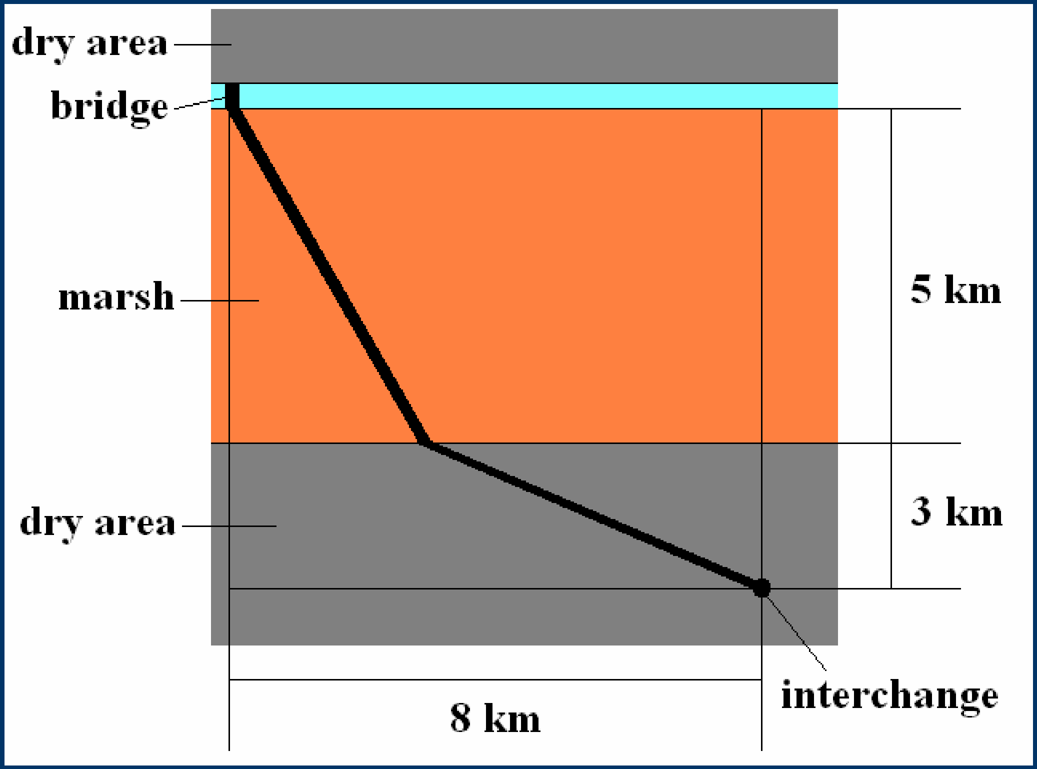
A maximális térfogat: $V(3) = 432\ (cm^3)$





NEM NYOMTATÁSRA!

Példa



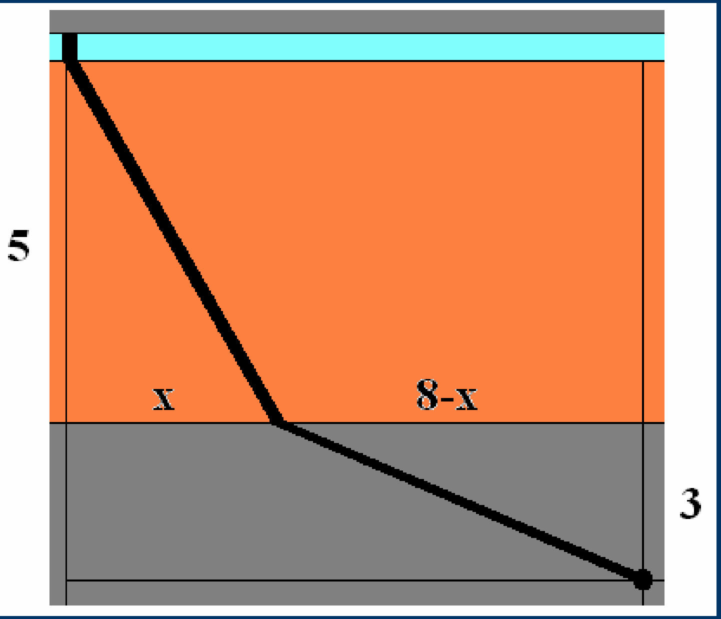
Egy hidat és egy csomópontot kell úttal összekötni. A csomópont a hídtól délkeletre van: 8 km keletre, 8 km délre. A folyó mellett 5 km széles mocsaras terület húzódik.

Ha az építési költség kilométerenként 10 millió Ft a mocsaras területen és 7 millió Ft a száraz területen, akkor milyen nyomvonal mellett lesz minimális az építési költség? Mennyi ez a minimális költség?

Megoldás

Az út költsége:

$$C(x) = 10 \cdot \sqrt{x^2 + 25} + 7 \cdot \sqrt{(8-x)^2 + 9}$$



A C függvény értelmezési tartománya:

$$0 \le x \le 8$$

A C függvény minimumát kell megkeresni.

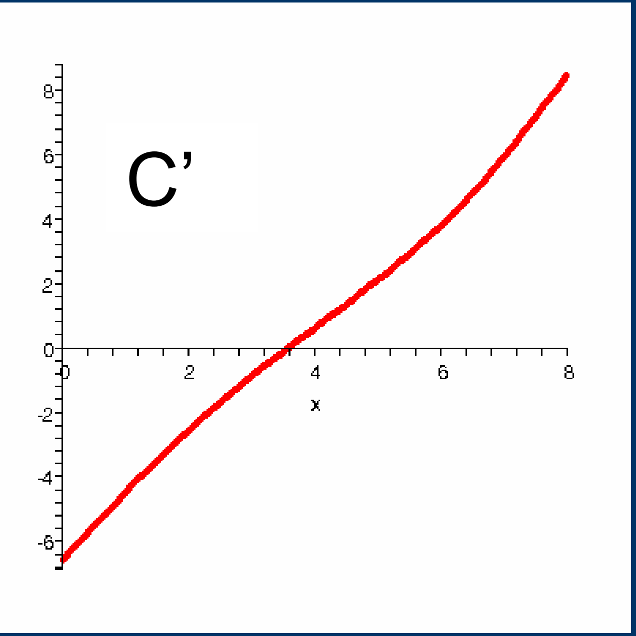
Az építési költség néhány x érték mellett:

x (km)	0	2	4	6	8
C(x) (million euro)	109.8	100.8	99.0	103.3	115.3

$$C(x) = 10 \cdot \left(x^2 + 25\right)^{\frac{1}{2}} + 7 \cdot \left((8 - x)^2 + 9\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C'(x) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + 25\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((8 - x)^2 + 9\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(8 - x) \cdot (-1)$$

$$C'(x) = \frac{10x}{\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{7 \cdot (8 - x)}{\sqrt{(8 - x)^2 + 9}}$$



A C’(x) = 0 egyenlet negyedfokú.

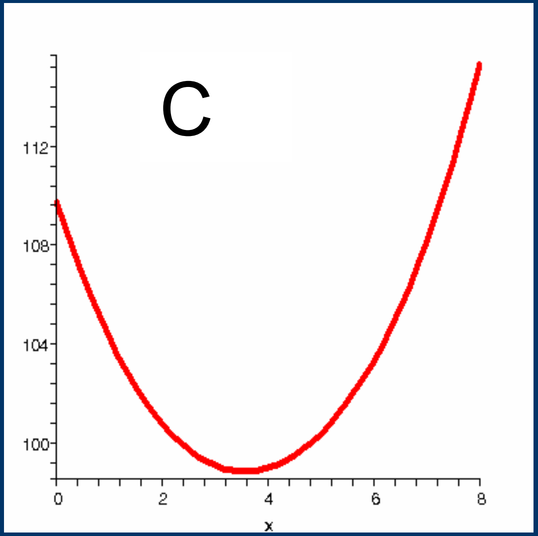
Az egyenlet közelítő megoldása a [0,8] intervallumon: $x \approx 3.56$

Mivel az értelmezési tartomány zárt intervallum, elegendő a függvényértékek ellenőrzési az x=0, x=3.56 és x=8 helyeken:

$C(0) = 109.8$ $C(3.56) = 98.9$ $C(8) = 115.3$

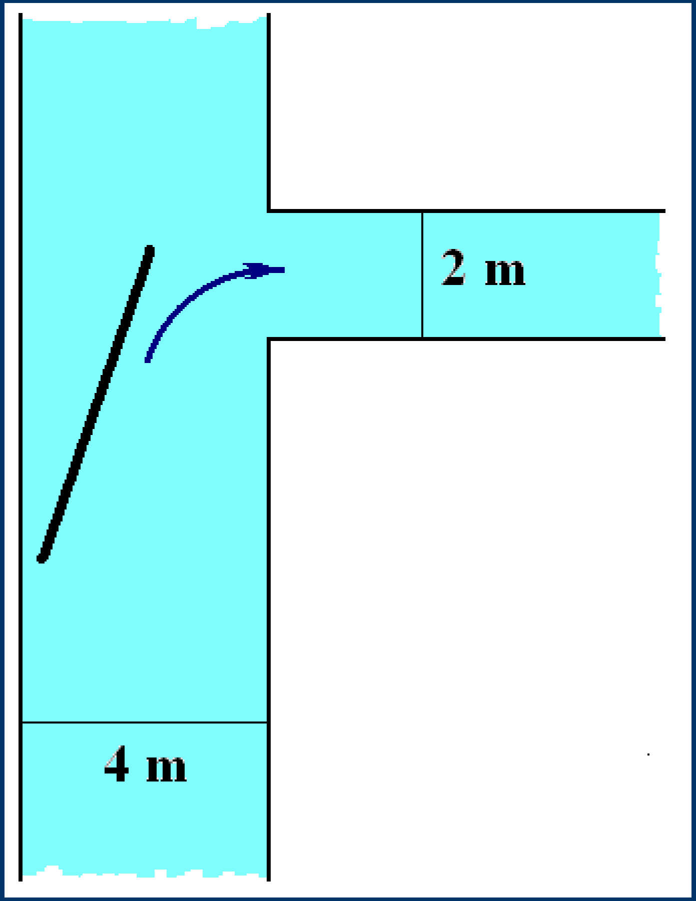
A függvényértékek alapján látható, hogy (közelítőleg) az x=3.56 helyen van minimuma a függvénynek

A minimum értéke: 98.9 million Ft



Példa

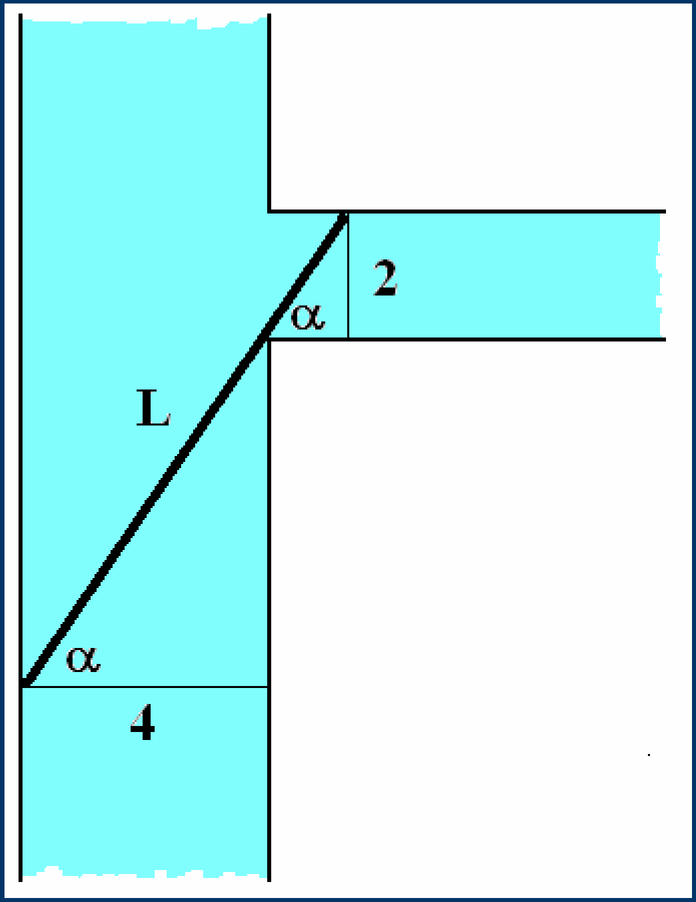
Legfeljebb milyen hosszú fa fordítható be a 4 m széles csatornából a rá merőleges 2 m széles csatornába? (A fa vastagságát hanyagoljuk el!)



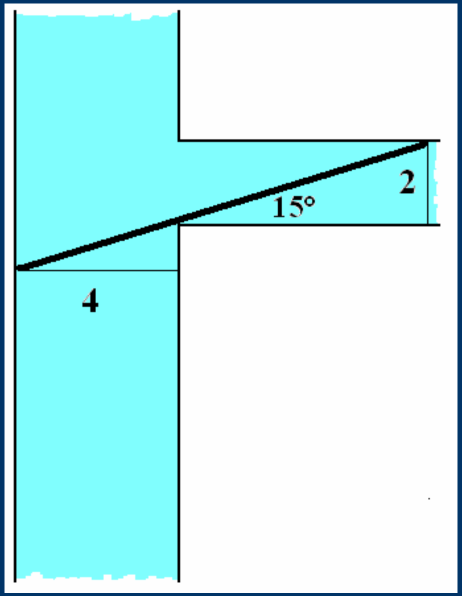
Megoldás

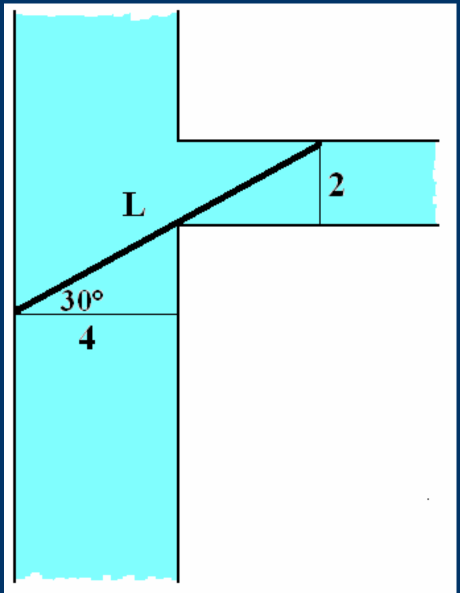
A rúd maximális hossza, mely adott α szög mellett elfér a rajzon látható pozícióban:

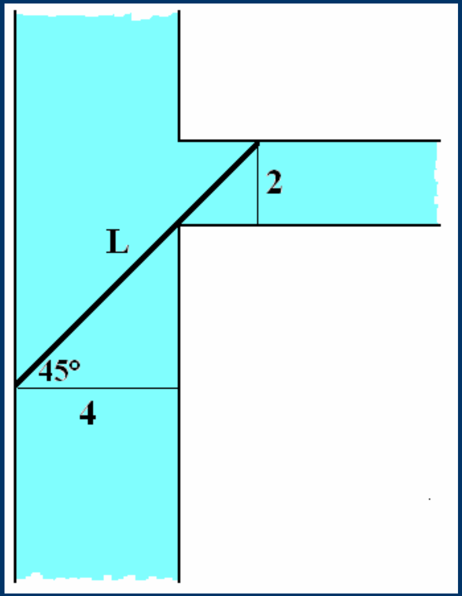
$$L(\alpha) = \frac{4}{\cos\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha}$$

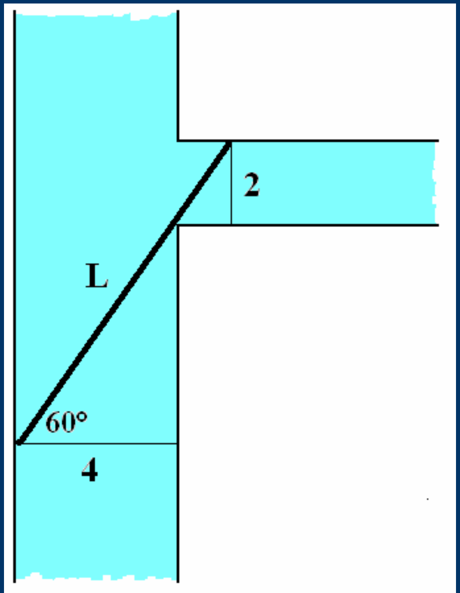


A maximális rúdhossz néhány szögérték mellett:

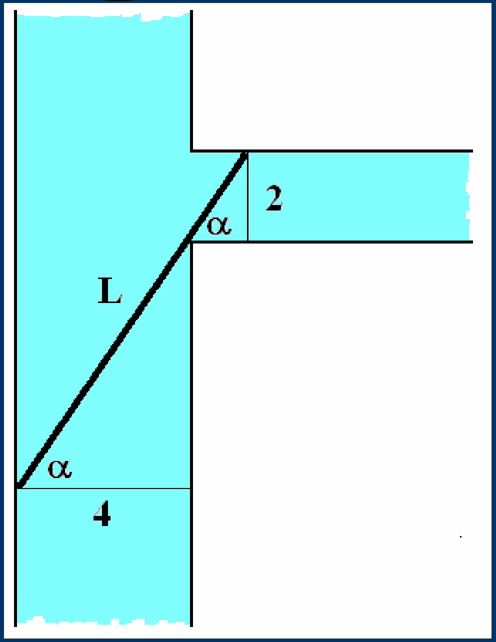








$\alpha = 15°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
L = 11.87 (m)	L = 8.62 (m)	L = 8.49 (m)	L = 10.31 (m)



$$L(\alpha) = \frac{4}{\cos\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha}$$

Az L függvény értelmezési tartománya:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Az L függvény minimumát kell megkeresni.

$$L'(\alpha) = \frac{0\cdot\cos\alpha - 4\cdot(-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha} + \frac{0\cdot\sin\alpha - 2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$L'(\alpha) = \frac{4\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

Az L'(α) = 0 egyenlet megoldása:

$$L'(\alpha) = 0$$

$$\frac{4\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

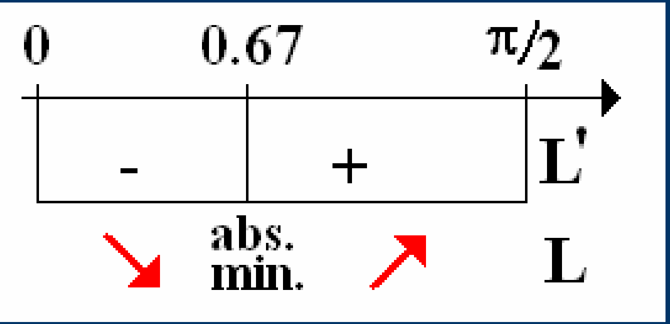
$$\frac{4\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.7937$$

$$\alpha = 0.67 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 38.4°$$

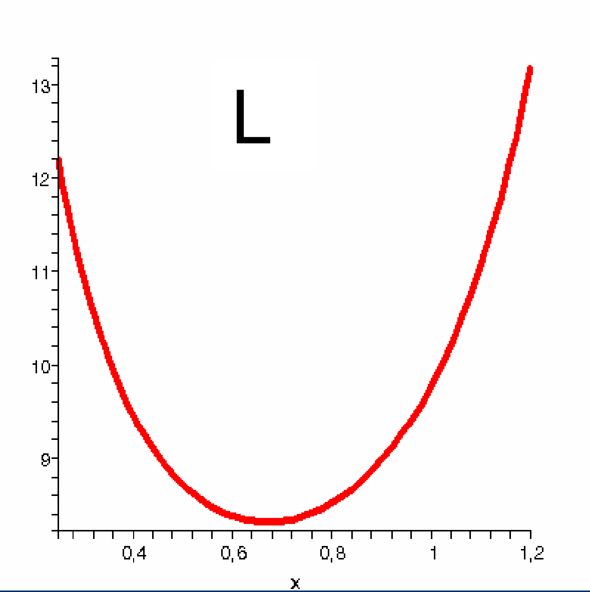


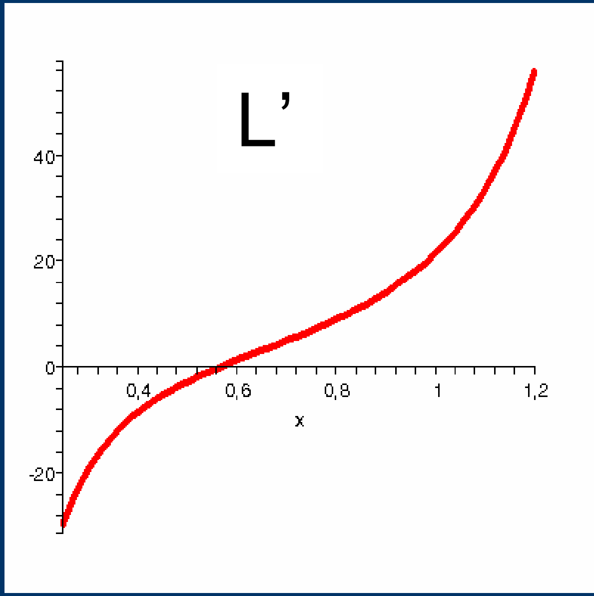
L-nek az α=0.67 szög mellett van minimuma.

A α=0.67 szög mellett a fa maximális hossza:

$$L(0.67) = \frac{4}{\cos 0.67} + \frac{2}{\sin 0.67} = 8.33$$

A maximális hossz: L = 8.33 m



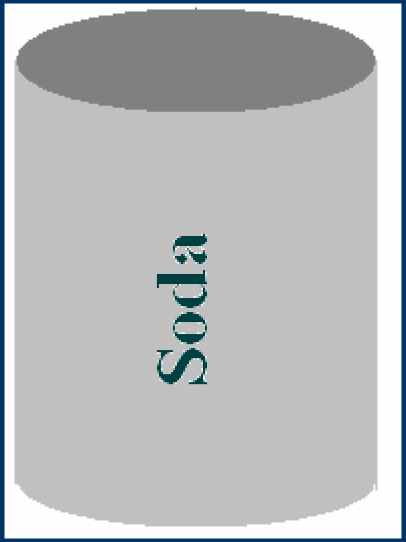


NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Egy italos doboz térfogata 400 cm^3.

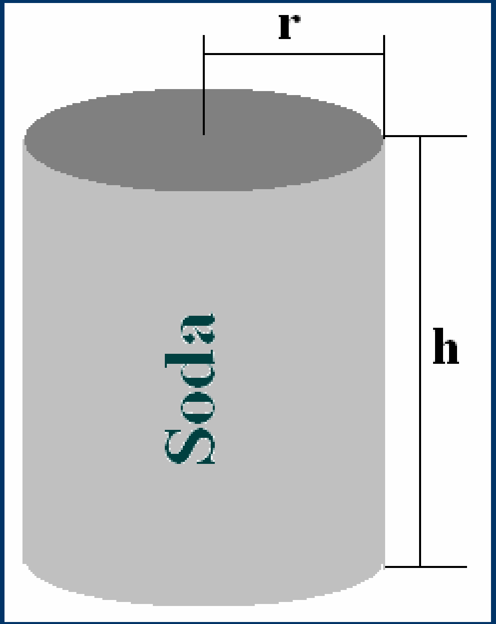
Ha a doboz alaplapja és a fedőlapja 2,23-szor olyan vastag anyagból készül, mint az oldala, akkor milyen méretek mellett lesz minimális az anyagfelhasználás?



Megoldás

A szükséges anyagmennyiség (térfogata) a sugár (r) és a magasság (h) függvényében (d az anyag vastagsága az oldalon):

$$M(r,h) = 2\cdot r^2 \cdot\pi\cdot 2.23\cdot d + h\cdot 2\cdot r\cdot\pi\cdot d$$



Az r és a h kapcsolata:

$$400 = r^2 \cdot\pi\cdot h \quad\Rightarrow\quad h = \frac{400}{r^2\cdot\pi}$$

A szükséges anyagmennyiség (térfogata) a sugár függvényében:

$$M(r) = 2\cdot\pi\cdot d\cdot\left(2.23\cdot r^2 + r\cdot\frac{400}{r^2\cdot\pi}\right) = 2\cdot\pi\cdot d\cdot\left(2.23\cdot r^2 + \frac{400}{r\cdot\pi}\right)$$

$$M(r) = 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(2.23 \cdot r^2 + \frac{400}{r \cdot \pi} \right)$$

Az M függvény értelmezési tartománya: $x \in \,]0,\infty[$

Az M függvény minimumát kell megkeresni.

$$M'(r) = 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(4.46 \cdot r - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{400}{r^2} \right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

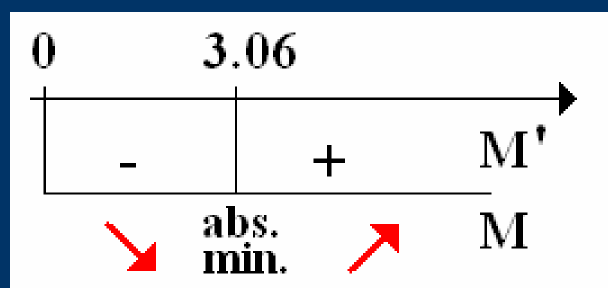
Az M'(x) = 0 egyenlet megoldása:

$$2\cdot\pi\cdot d\cdot\left(4.46\cdot r-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{400}{r^2}\right)=0$$

$$4.46\cdot r=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{400}{r^2}$$

$$r^3=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{400}{4.46}$$

$$r\approx 3.06$$



Az M függvénynek minimuma van at r = 3.06-nál.

Az r = 3.06 cm mellett minimális az anyagfelhasználás.