NEM NYOMTATÁSRA!

Differenciálegyenletek

Ebben a részben I legyen mindig pozitív hosszúságú intervallum

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: differenciálegyenlet

Ha $D \subset R^{n+1}$ nyílt halmaz, $f: D \to R$ folytonos függvény, akkor az

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

avagy

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

egyenletet n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük.

Megjegyzés

Mivel a továbbiakban csak közönséges explicit differenciálegyenletekkel foglalkozunk, ezért e két jelzőt a továbbiakban nem fogjuk kiírni.

NEM NYOMTATÁSRA!

Elsőrendű differenciálegyenlet

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = f\left(x, y(x)\right)$$

Másodrendű differenciálegyenlet

$$y''(x) = f\left(x, y(x), y'(x)\right)$$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: Newton II. törvénye

$$m \cdot a(t) = F(t, s(t), v(t))$$

Mivel a sebesség-idő függvény az út-idő függvény első deriváltja ($v(t)=s'(t)$), a gyorsulás-idő függvény pedig a második deriváltja ($a(t)=s''(t)$), Newton II. törvénye az út-idő függvényre egy másodrendű differenciálegyenlet:

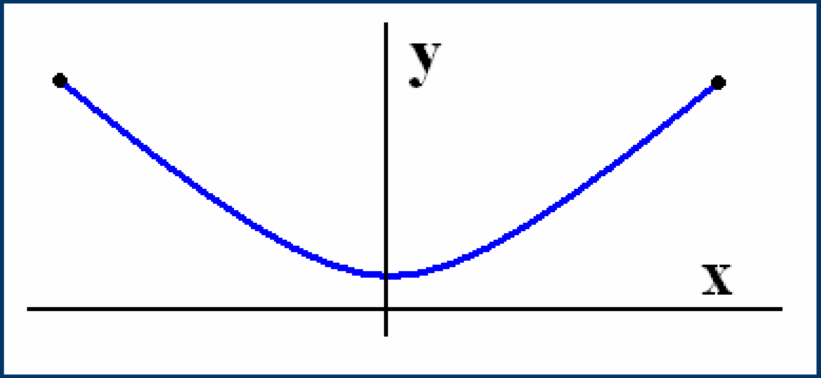
$$\ddot{s}(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t, s(t), \dot{s}(t)) = f(t, s(t), \dot{s}(t))$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: felfüggesztett hajlékony kötél

Két végén felfüggesztett, hajlékony, nyújthatatlan kőtél alakját leíró függvény (y(x)) a következő differenciál-egyenletnek tesz eleget:

$$y''(x) = k \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$



Definíció: differenciálegyenlet megoldása

A $\varphi : I \to \mathbf{R}$ függvény megoldása az

$$y^{(n)}(x) = f\,(\,x\,,\,y(x)\,,\,y'(x)\,,\,\ldots\,,\,y^{(n-1)}(x)\,)$$

n-edrendű differenciálegyenletnek, ha

- **φ n-szer differenciálható az I-n**
- **minden $x \in I$ esetén $(\,x\,,\,\varphi(x)\,,\,\varphi'(x)\,,\,\ldots\,,\,\varphi^{(n-1)}(x)\,) \in D_f$**
- **minden $x \in I$ esetén $\varphi^{(n)}(x) = f\,(\,x\,,\,\varphi(x)\,,\,\varphi'(x)\,,\,\ldots\,,\,\varphi^{(n-1)}(x)\,)$**

Definíció: kezdeti érték probléma

Legyen $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$. Az

$$y^{(n)}(x) = f\,(\,x\,,\,y(x)\,,\,y'(x)\,,\,\ldots\,,\,y^{(n-1)}(x)\,)$$

d.e.-re vonatkozó kezdeti érték problémán azt a feladatot értjük, amikor az egyenletnek azokat a $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldásait keressük, melyekre:

- $x_0 \in I$
- $\varphi(x_0) = y_0\,,\ \varphi'(x_0) = y_1\,,\ \varphi''(x_0) = y_2\,, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Megjegyzés

A feltételek száma azonos a d.e. rendjével.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Ha a differenciálegyenletben szereplő f függvény folytonos, akkor az k.é.p.-nak van megoldása.

Tétel

Ha a differenciálegyenletben szereplő f függvény folytonosan differenciálható (azaz az f összes elsőrendű parciális derivált függvénye folytonos), akkor a k.é.p.-nak pontosan egy megoldása van.

Iránymező

Egy elsőrendű differenciálegyenlet y'=f(x,y) alakja összefüggést ad az x-y sík egy (x_0,y_0) pontja és a ponton áthaladó megoldásfüggvények pontbeli differenciálhányadosa (meredeksége) között. Ha az x-y sík néhány pontjában kis szakaszokkal ábrázoljuk a megoldásfüggvény ottani meredekségét, akkor a differenciálegyenlet iránymezejét kapjuk.

Példa

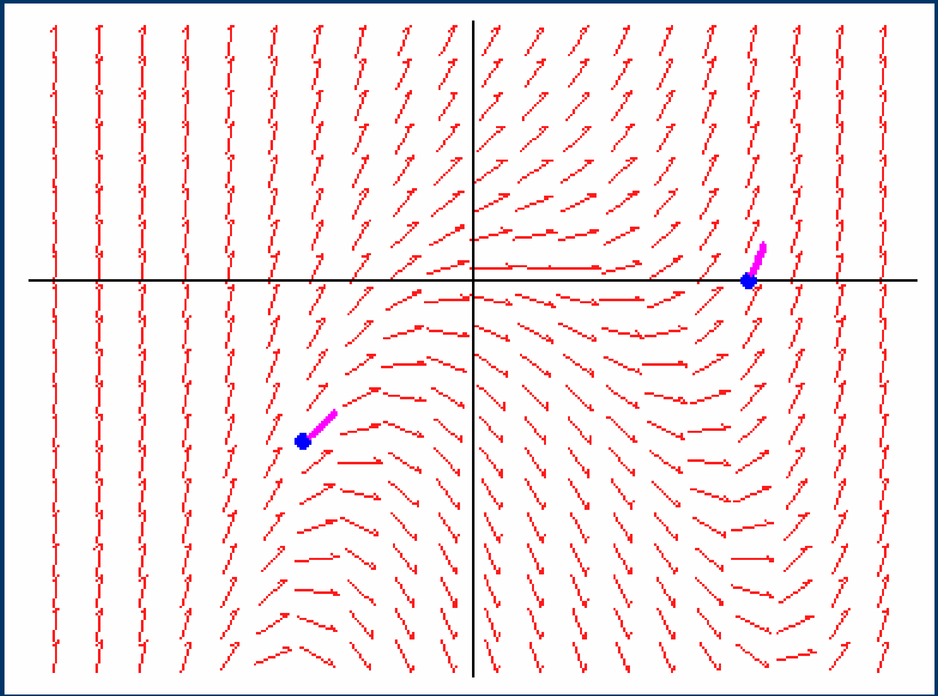
$$y'(x) = y(x) + x^2 - x$$

$$P_1=(x_1,y_1)=(-1,-1)$$

$$\Rightarrow y'=1+1^2-1=1$$

$$P_2=(x_2,y_2)=(2,0)$$

$$\Rightarrow y'=0+2^2-2=2$$

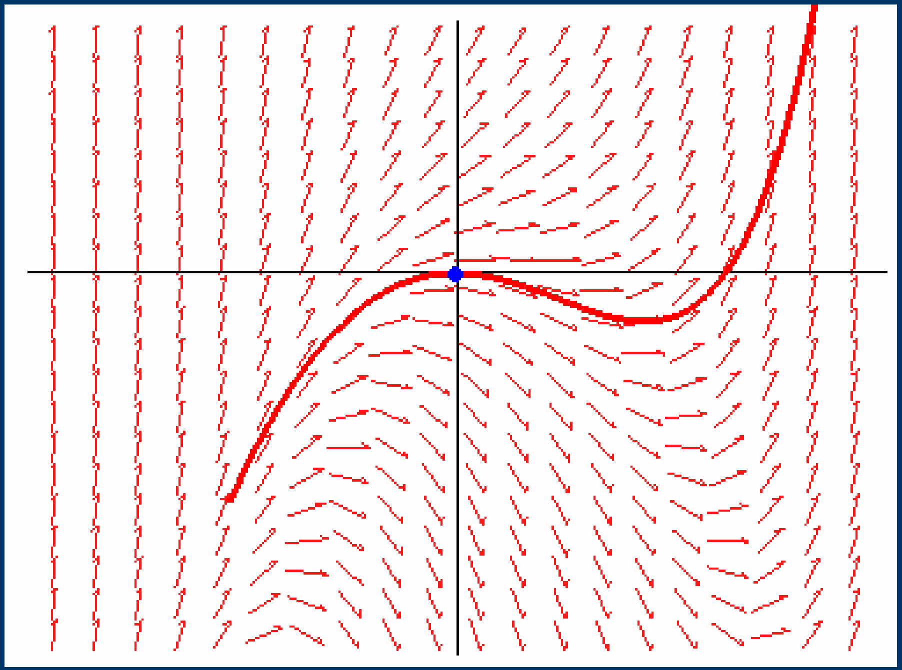


NEM NYOMTATÁSRA!

A megoldásfüggvények az iránymező szakaszaihoz „érintőlegesen” haladnak.

Az ábrán a differenciálegyenletnek az a megoldásfüggvénye (integrálgörbéje) látható, mely áthalad az origón :

$$y(x) = e^x - x^2 - x - 1$$



A levezetés részletezése nélkül közöljük, hogy az adott (elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásfüggvényei az

$$y(x) = c \cdot e^x - x^2 - x - 1$$

alakú függvények, ahol c tetszőleges valós szám.

Az **y(0) = 0** kezdeti értéknek megfelelő megoldásfüggvény:

$$y(x) = e^x - x^2 - x - 1$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az integrálgörbe közelítése – Euler módszer

Az elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldását előállító Euler módszer ún. numerikus módszer, alkalmazása nem igényli integrál kiszámítását.

A módszer lényege, hogy a keresett integrálgörbét olyan szakaszokból állítjuk elő, amelyek meredeksége meghatározott helyeken megegyezik az iránymező szerinti meredekséggel.

Az Euler módszer hátterében is iránymező fogalma áll: az x-y sík pontjaiban az d.e. formulájából kiszámítható a ponton áthaladó integrálgörbe meredeksége.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

Az Euler módszerrel határozzuk meg közelítőleg az

$$y'(x) = y(x) + x^2 - x, \quad y(0) = -1$$

k.é.p. integrálgörbéjét a [0,3] intervallumon!

Megoldás

A közelítő megoldáshoz a következő helyeken fogjuk a meredekséget kiszámítani:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + 1 \cdot 0,5 = 0,5$$

$$x_2 = x_0 + 2 \cdot 0,5 = 1$$

$$x_3 = x_0 + 3 \cdot 0,5 = 1,5$$

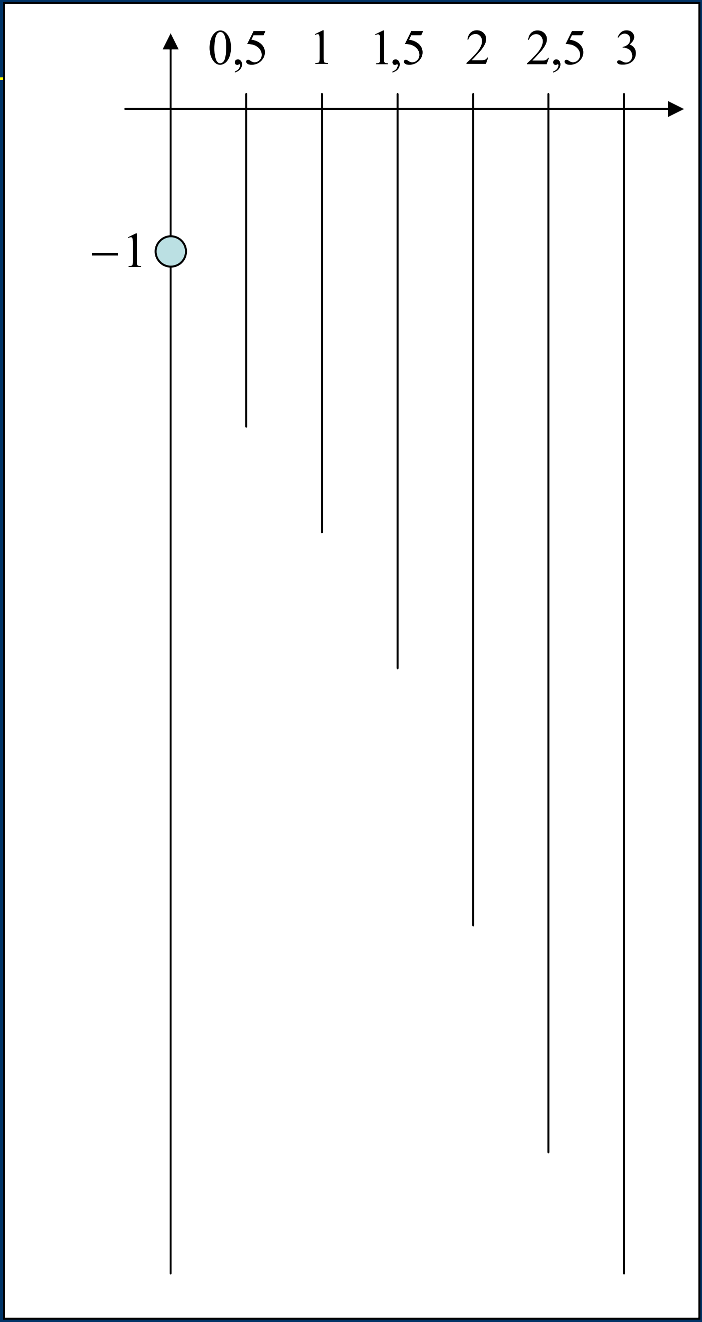
$$x_4 = x_0 + 4 \cdot 0,5 = 2$$

$$x_5 = x_0 + 5 \cdot 0,5 = 2,5$$

Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x, \quad y(0) = -1$$

$x_0 = 0$ $\quad y_0 = -1 \Rightarrow y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

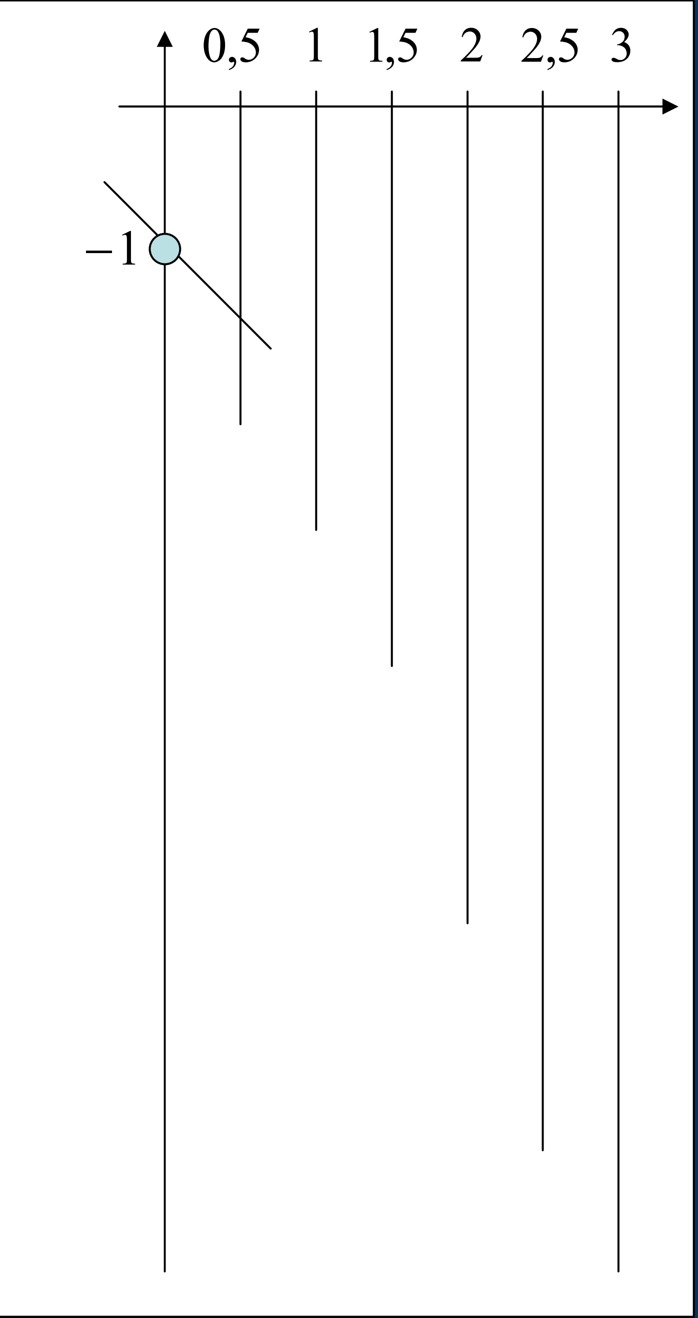


Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $y_0 = -1$ $\Rightarrow$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$



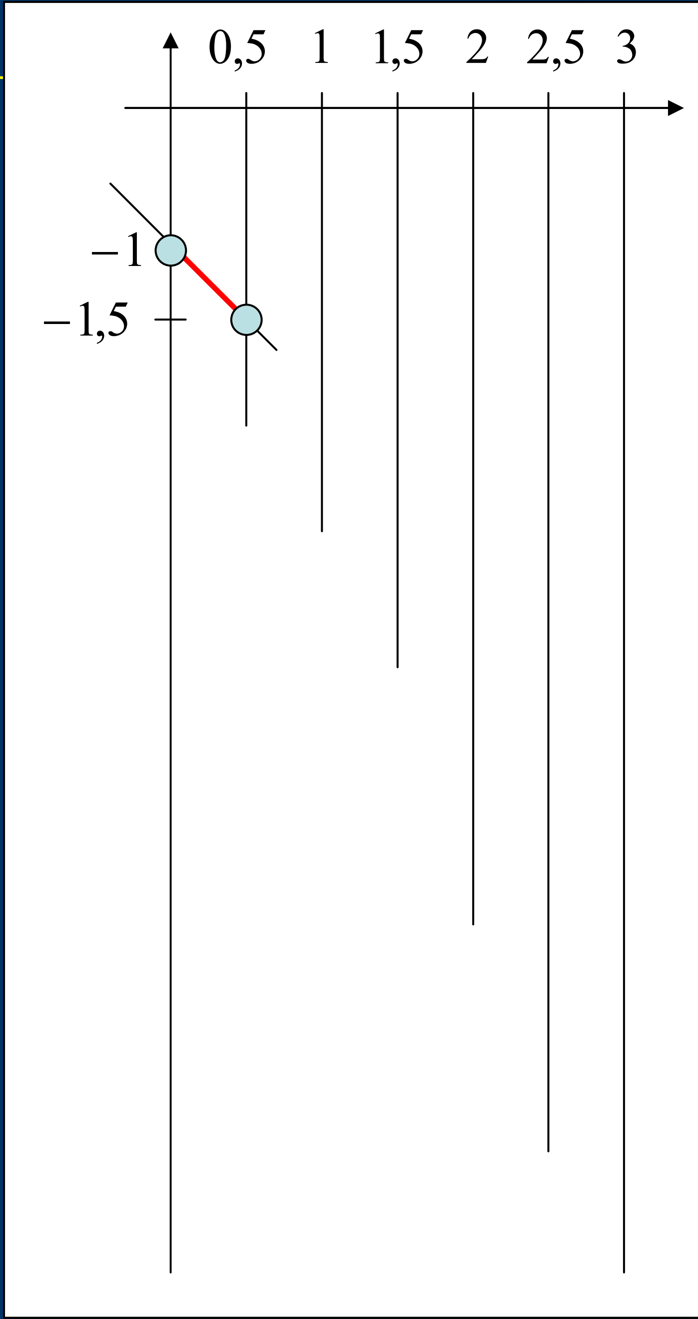
Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $y_0 = -1$ $\Rightarrow$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$



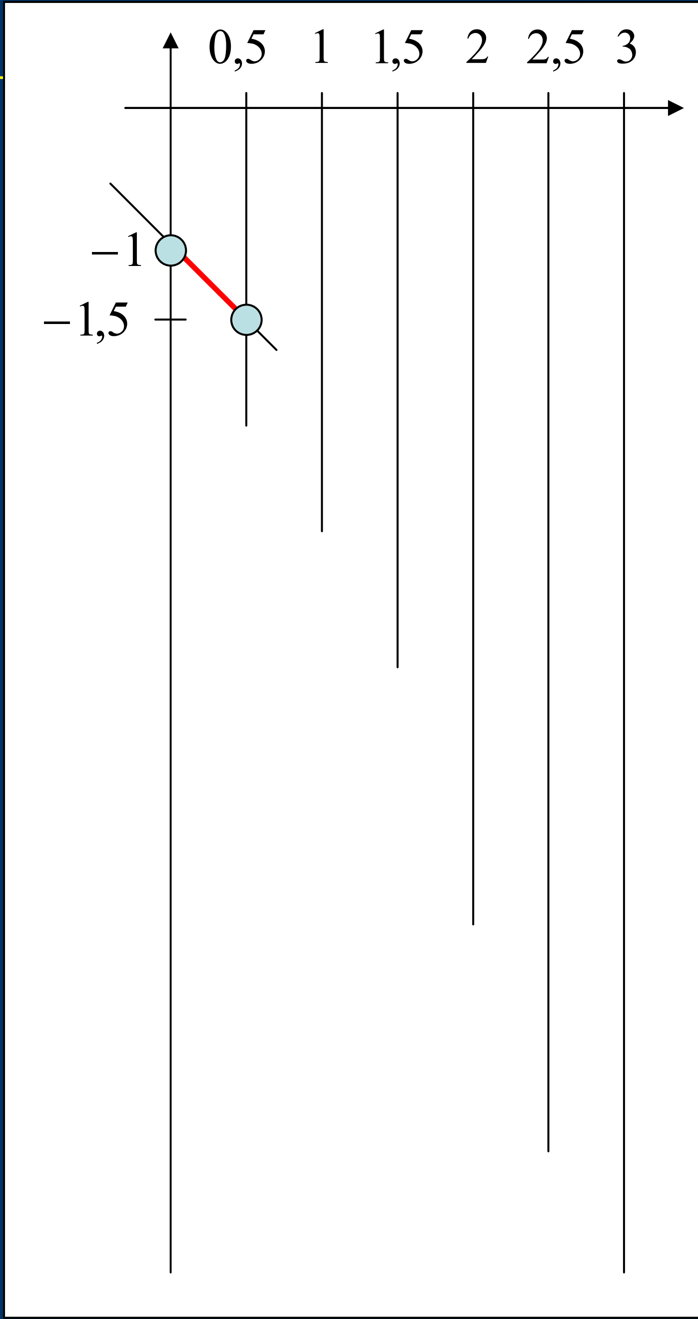
$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $y_0 = -1$ $\Rightarrow$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

$x_1 = 0{,}5$ $y_1 = -1{,}5$ $\Rightarrow$ $y'_1 = y'(x_1, y_1) = -1{,}75$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

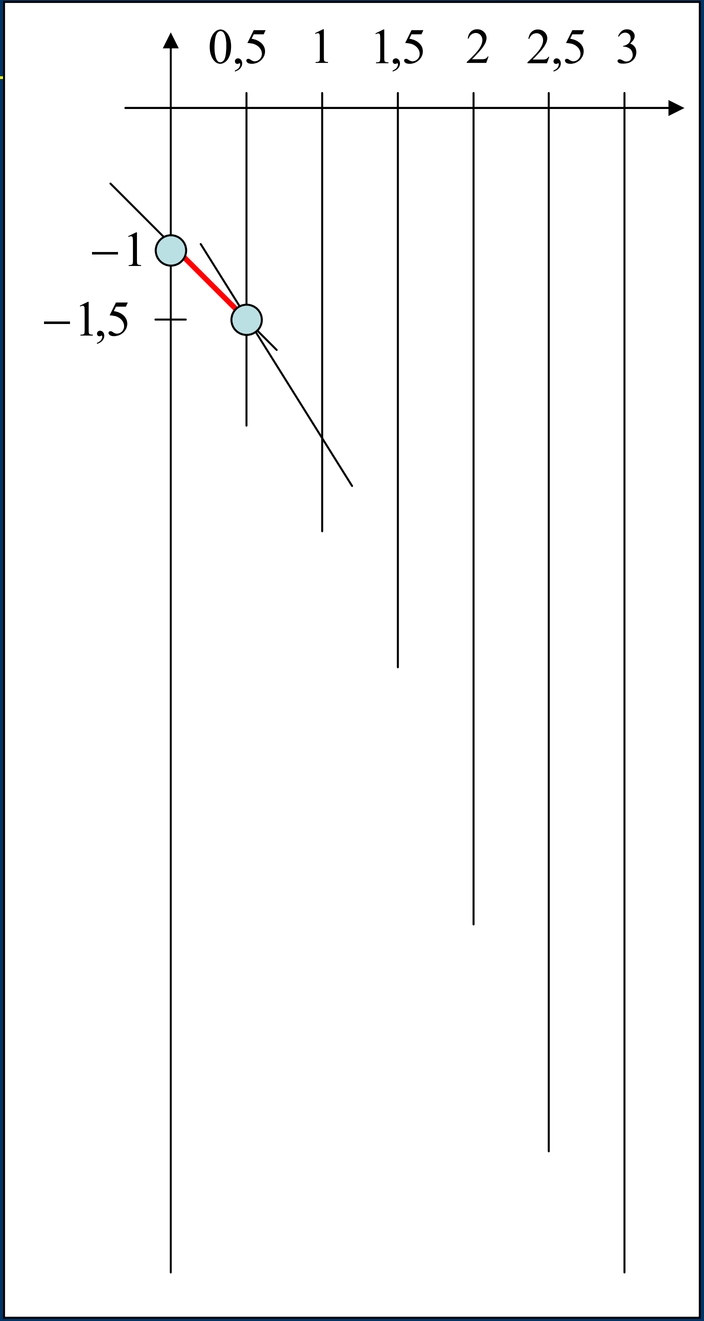
$x_0 = 0$ $y_0 = -1$ $\Rightarrow$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

$x_1 = 0{,}5$ $y_1 = -1{,}5$ $\Rightarrow$ $y'_1 = y'(x_1, y_1) = -1{,}75$

$$L_2(x) = y_1 + y'_1 \cdot (x - x_1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot (x - 0{,}5)$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $y_0 = -1$ $\Rightarrow$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

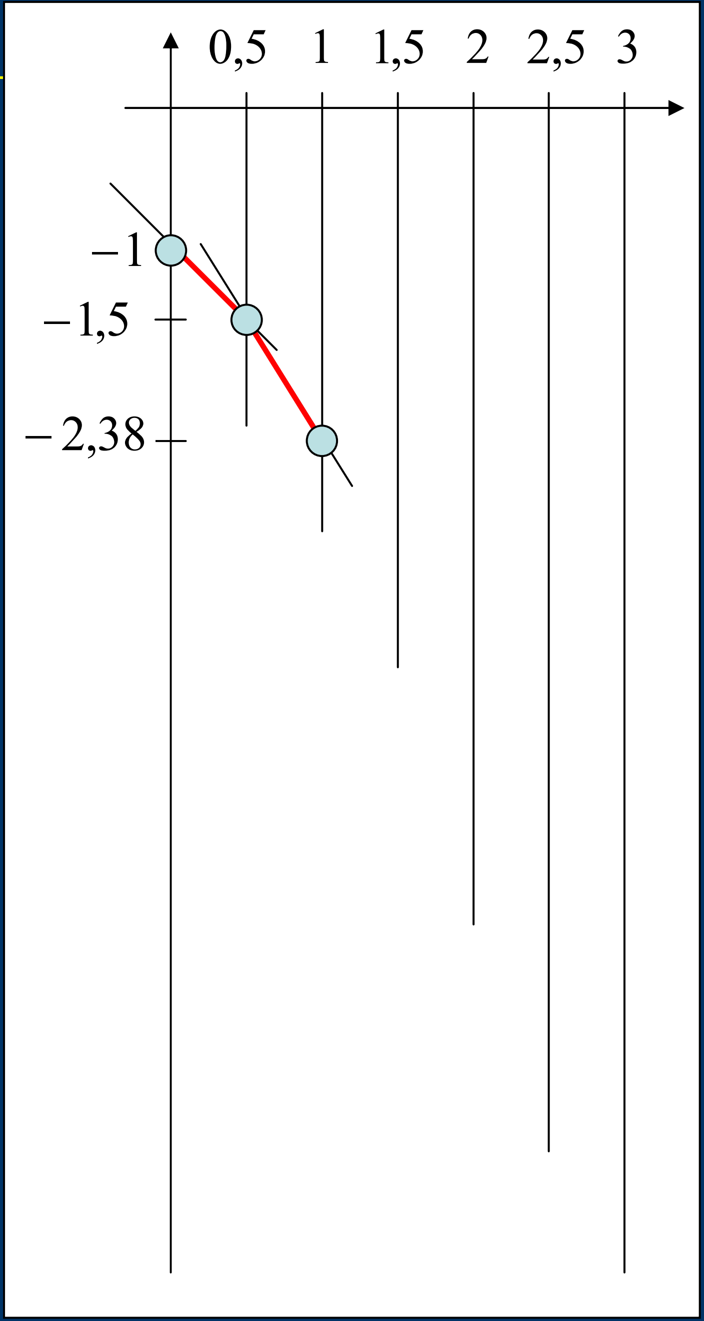
$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

$x_1 = 0{,}5$ $y_1 = -1{,}5$ $\Rightarrow$ $y'_1 = y'(x_1, y_1) = -1{,}75$

$$L_2(x) = y_1 + y'_1 \cdot (x - x_1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot (x - 0{,}5)$$

$$y_2 = L_2(x_2) = L_2(1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot 0{,}5 = -2{,}38$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $y_0 = -1$ $\Rightarrow$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

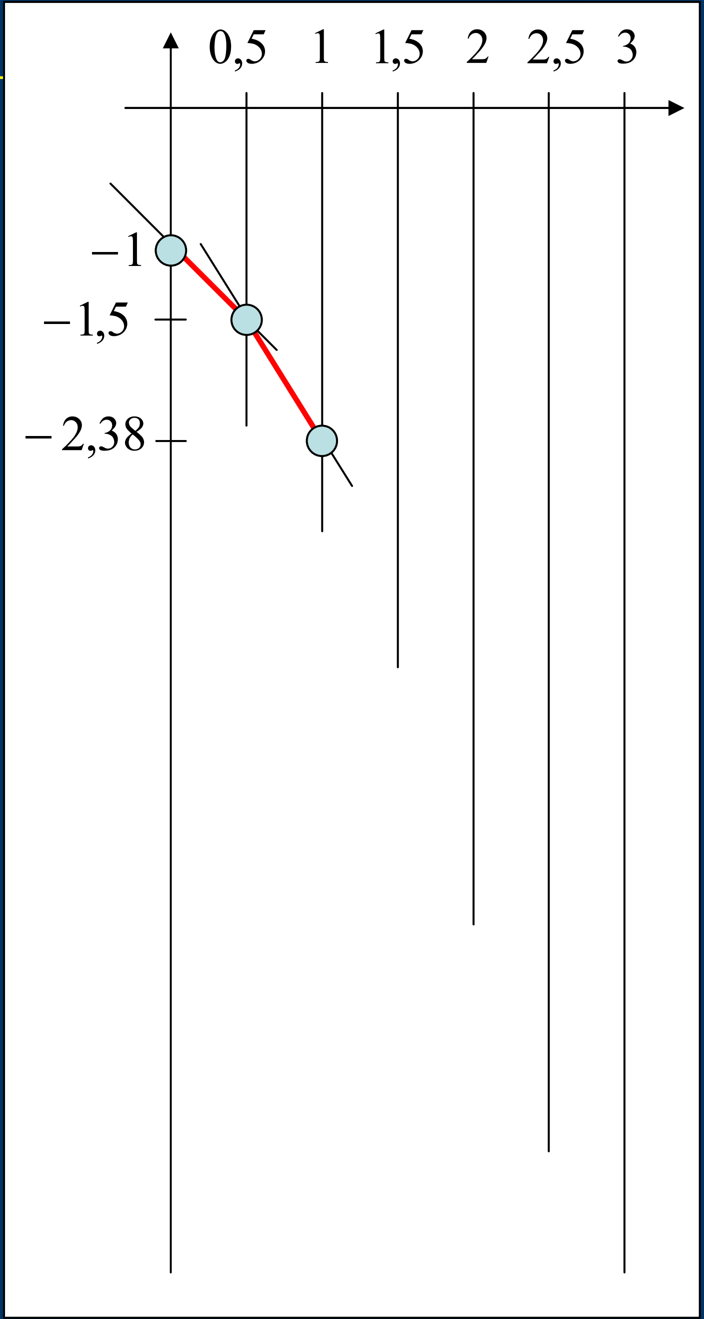
$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

$x_1 = 0{,}5$ $y_1 = -1{,}5$ $\Rightarrow$ $y'_1 = y'(x_1, y_1) = -1{,}75$

$$L_2(x) = y_1 + y'_1 \cdot (x - x_1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot (x - 0{,}5)$$

$$y_2 = L_2(x_2) = L_2(1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot 0{,}5 = -2{,}38$$

$x_2 = 1$ $y_2 = -2{,}38$ $\Rightarrow$ $y'_2 = y'(x_2, y_2) = -2{,}38$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $\quad y_0 = -1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

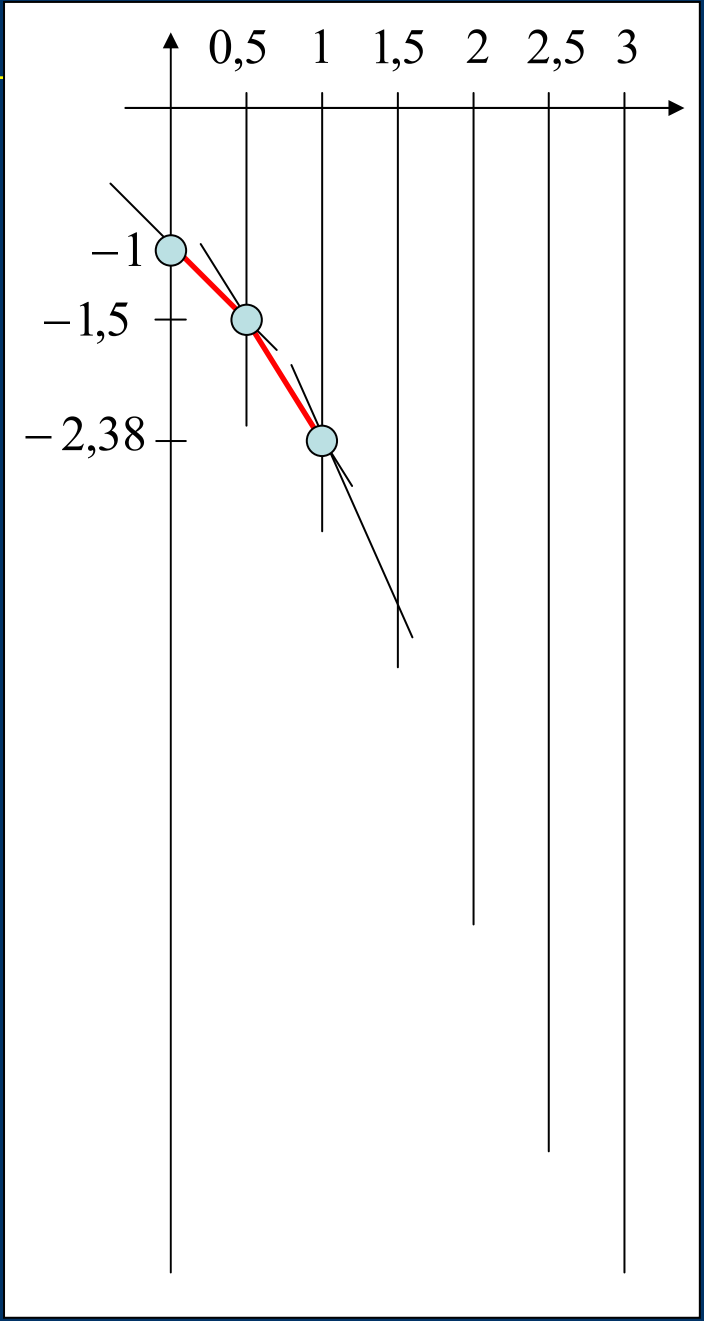
$x_1 = 0{,}5$ $\quad y_1 = -1{,}5$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y'_1 = y'(x_1, y_1) = -1{,}75$

$$L_2(x) = y_1 + y'_1 \cdot (x - x_1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot (x - 0{,}5)$$

$$y_2 = L_2(x_2) = L_2(1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot 0{,}5 = -2{,}38$$

$x_2 = 1$ $\quad y_2 = -2{,}38$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y'_2 = y'(x_2, y_2) = -2{,}38$

$$L_3(x) = y_2 + y'_2 \cdot (x - x_2) = -2{,}38 - 2{,}38 \cdot (x - 1)$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $y_0 = -1$ $\Rightarrow$ $y'_0 = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1(x) = y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

$x_1 = 0{,}5$ $y_1 = -1{,}5$ $\Rightarrow$ $y'_1 = y'(x_1, y_1) = -1{,}75$

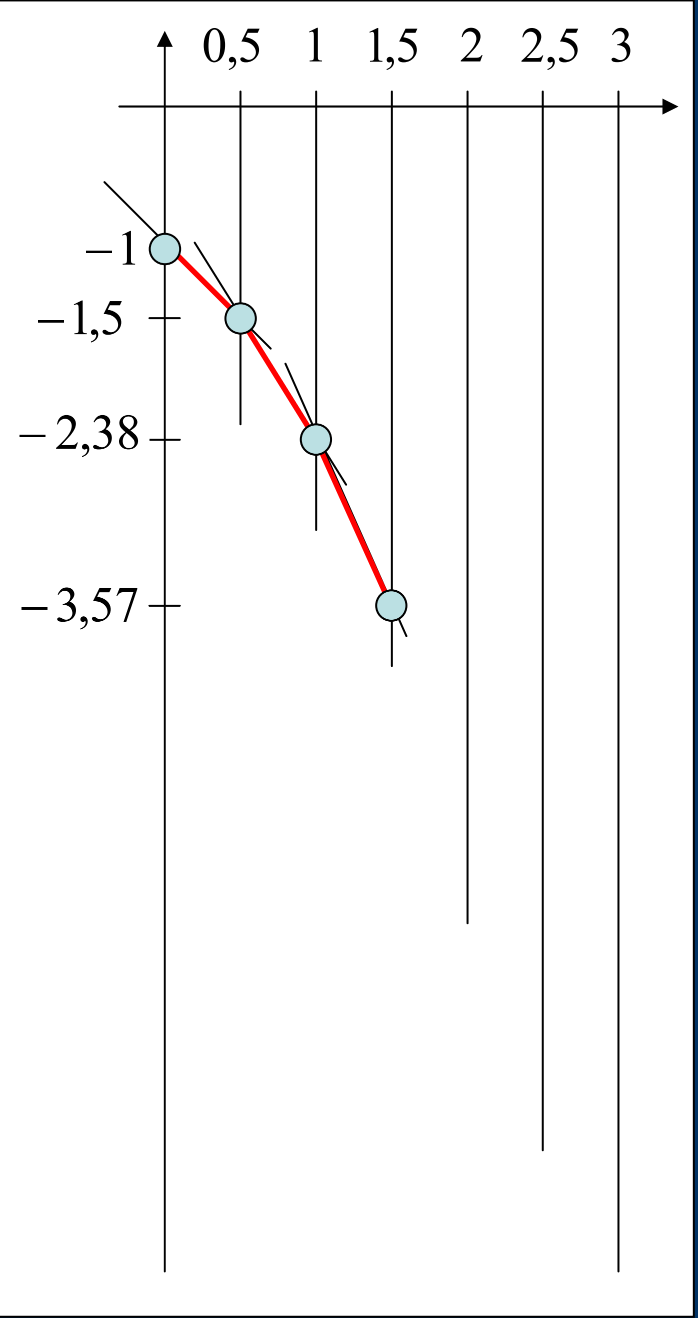
$$L_2(x) = y_1 + y'_1 \cdot (x - x_1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot (x - 0{,}5)$$

$$y_2 = L_2(x_2) = L_2(1) = -1{,}5 - 1{,}75 \cdot 0{,}5 = -2{,}38$$

$x_2 = 1$ $y_2 = -2{,}38$ $\Rightarrow$ $y'_2 = y'(x_2, y_2) = -2{,}38$

$$L_3(x) = y_2 + y'_2 \cdot (x - x_2) = -2{,}38 - 2{,}38 \cdot (x - 1)$$

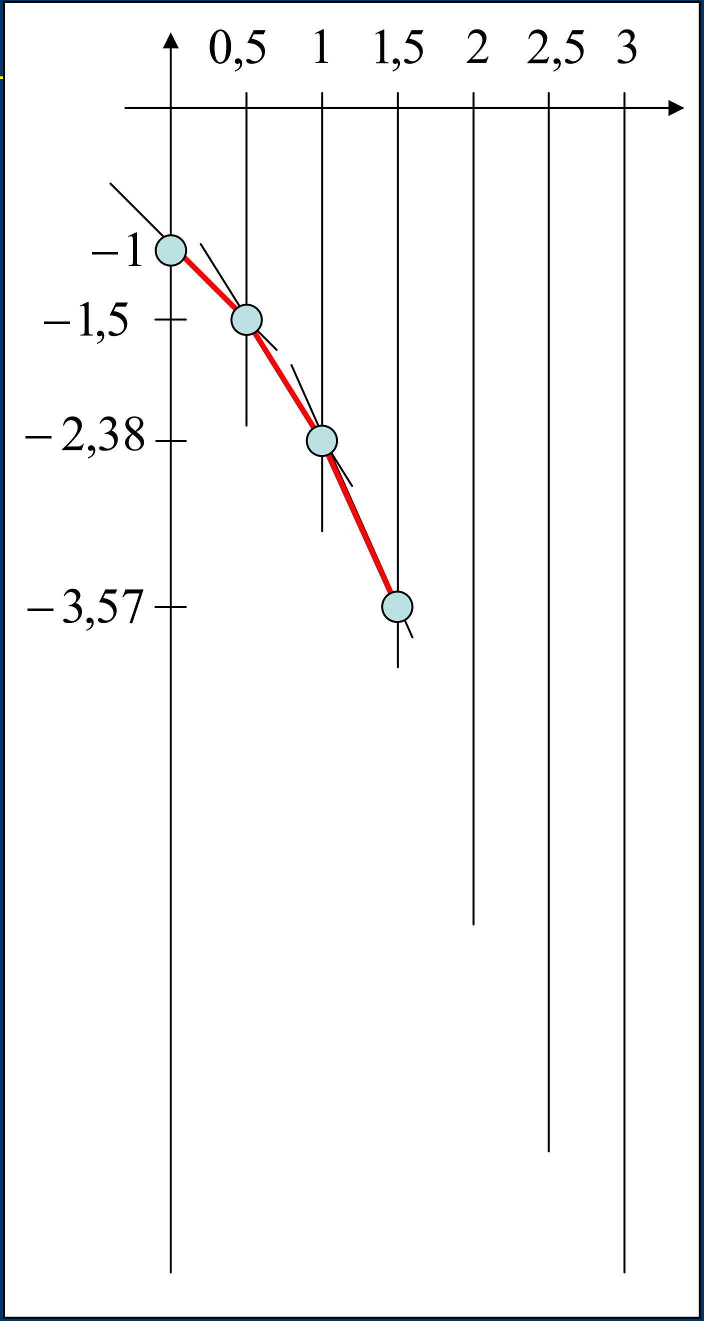
$$y_3 = L_3(x_3) = L_3(1{,}5) = -2{,}38 - 2{,}38 \cdot 0{,}5 = -3{,}57$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_3 = 1,5$ $y_3 = -3,57$ $\Rightarrow$ $y_3' = y'(x_3, y_3) = -2,82$



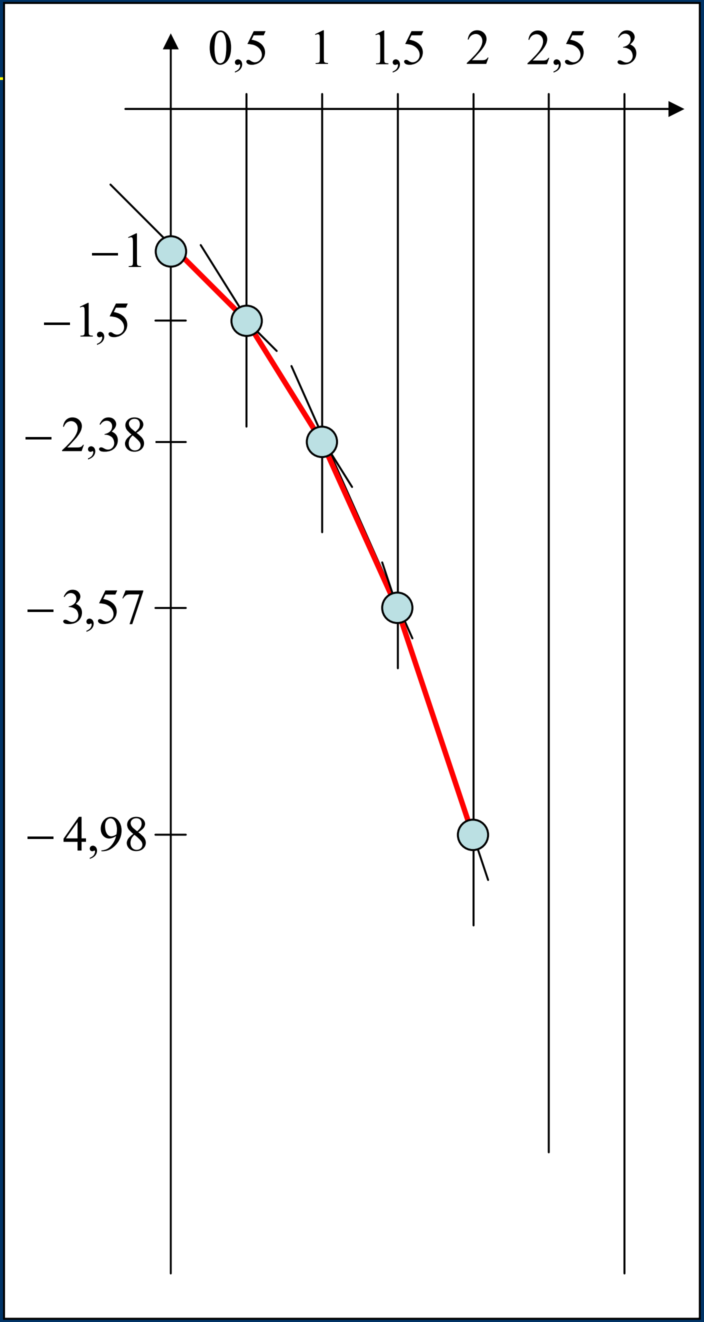
Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_3 = 1{,}5$ $y_3 = -3{,}57$ $\Rightarrow$ $y'_3 = y'(x_3, y_3) = -2{,}82$

$$L_4(x) = y_3 + y'_3 \cdot (x - x_3) = -3{,}57 - 2{,}82 \cdot (x - 1{,}5)$$

$$y_4 = L_4(x_4) = L_4(2) = -3{,}57 - 2{,}82 \cdot 0{,}5 = -4{,}98$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_3 = 1{,}5$ $y_3 = -3{,}57$ $\Rightarrow$ $y'_3 = y'(x_3, y_3) = -2{,}82$

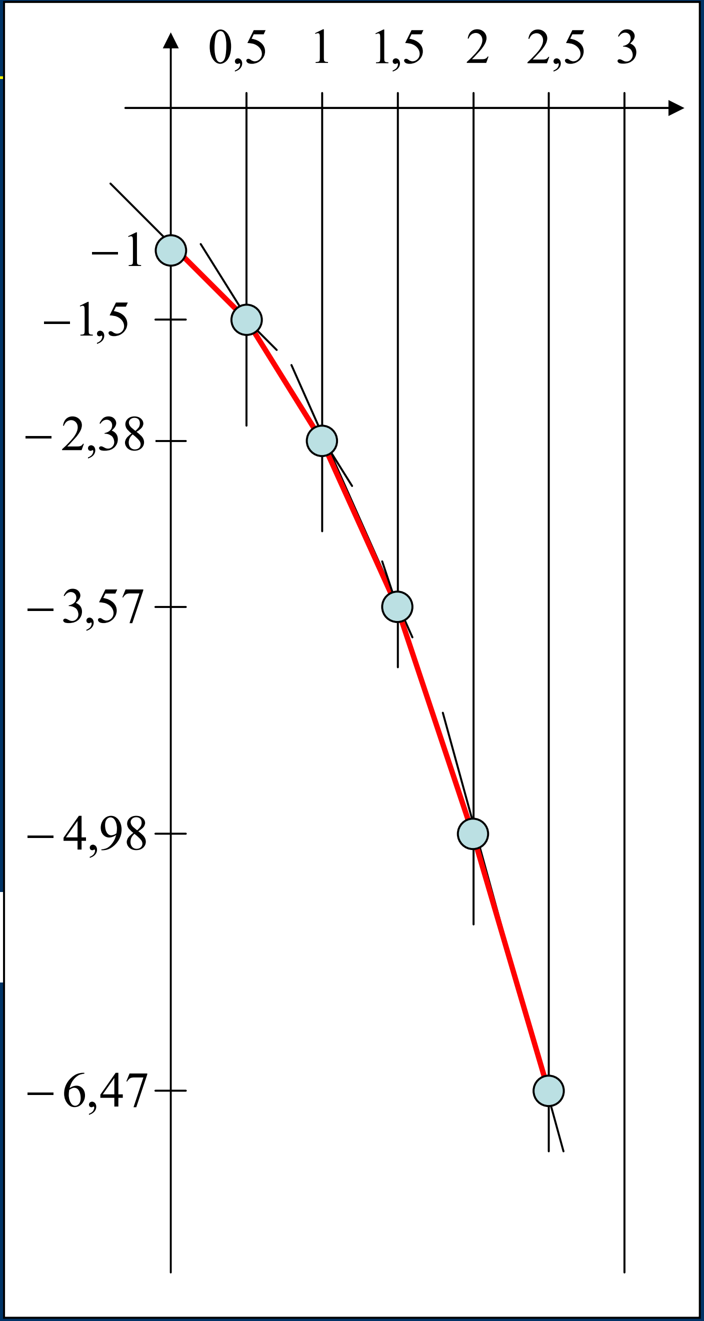
$$L_4(x) = y_3 + y'_3 \cdot (x - x_3) = -3{,}57 - 2{,}82 \cdot (x - 1{,}5)$$

$$y_4 = L_4(x_4) = L_4(2) = -3{,}57 - 2{,}82 \cdot 0{,}5 = -4{,}98$$

$x_4 = 2$ $y_4 = -4{,}98$ $\Rightarrow$ $y'_4 = y'(x_4, y_4) = -2{,}98$

$$L_5(x) = y_4 + y'_4 \cdot (x - x_4) = -4{,}98 - 2{,}98 \cdot (x - 2)$$

$$y_5 = L_5(x_5) = L_5(2{,}5) = -4{,}98 - 2{,}98 \cdot 0{,}5 = -6{,}47$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_3 = 1{,}5$ $\quad y_3 = -3{,}57 \quad \Rightarrow \quad y'_3 = y'(x_3, y_3) = -2{,}82$

$$L_4(x) = y_3 + y'_3 \cdot (x - x_3) = -3{,}57 - 2{,}82 \cdot (x - 1{,}5)$$

$$y_4 = L_4(x_4) = L_4(2) = -3{,}57 - 2{,}82 \cdot 0{,}5 = -4{,}98$$

$x_4 = 2$ $\quad y_4 = -4{,}98 \quad \Rightarrow \quad y'_4 = y'(x_4, y_4) = -2{,}98$

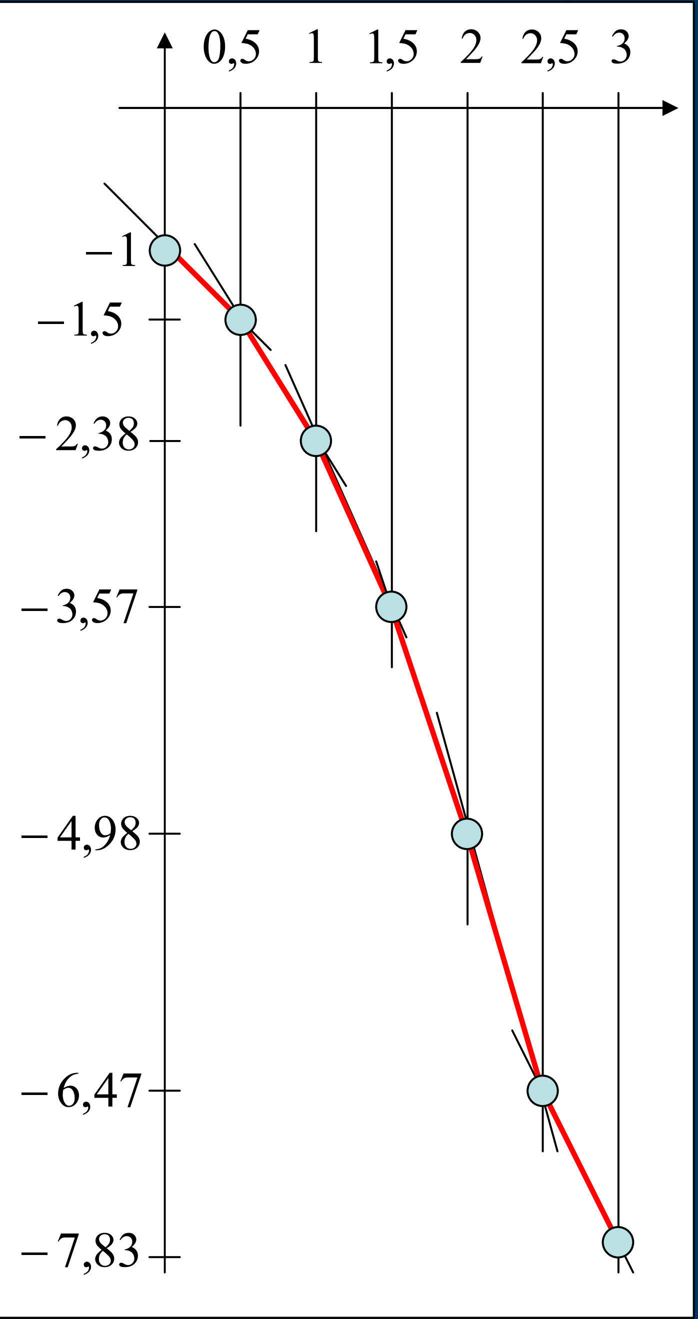
$$L_5(x) = y_4 + y'_4 \cdot (x - x_4) = -4{,}98 - 2{,}98 \cdot (x - 2)$$

$$y_5 = L_5(x_5) = L_5(2{,}5) = -4{,}98 - 2{,}98 \cdot 0{,}5 = -6{,}47$$

$x_5 = 2{,}5$ $\quad y_5 = -6{,}47 \quad \Rightarrow \quad y'_5 = y'(x_5, y_5) = -2{,}72$

$$L_6(x) = y_5 + y'_5 \cdot (x - x_5) = -6{,}47 - 2{,}72 \cdot (x - 2{,}5)$$

$$y_6 = L_6(x_6) = L_6(3) = -6{,}47 - 2{,}72 \cdot 0{,}5 = -7{,}83$$

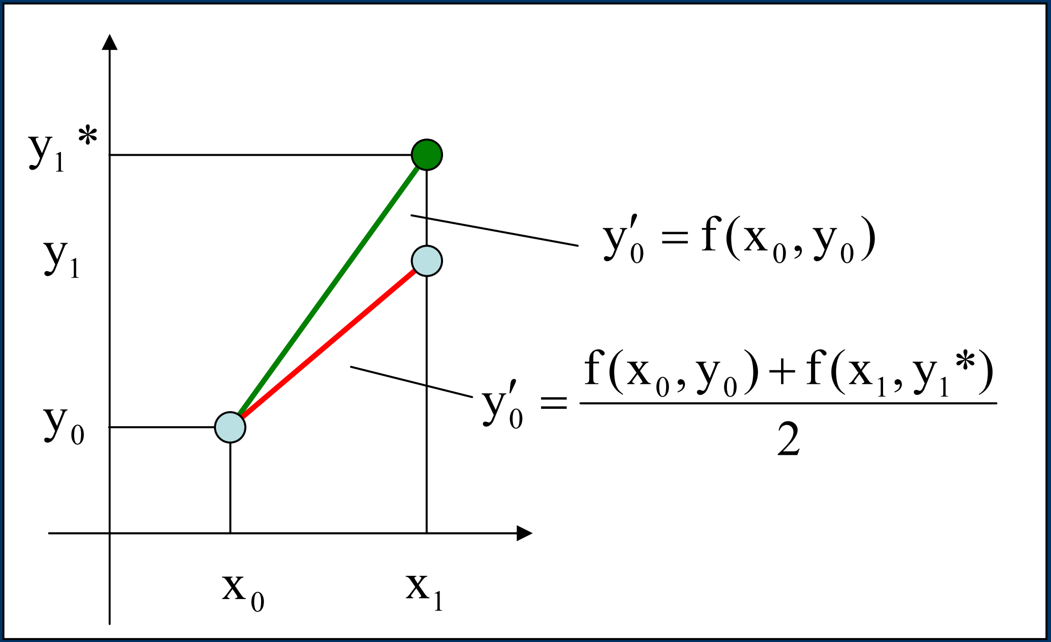


NEM NYOMTATÁSRA!

Az integrálgörbe közelítése – Runge-Kutta módszer

A Runge-Kutta módszer az Euler módszer javított változata.

Lényege, hogy a görbét közelítő szakaszokat nem a kezdőpontban érvényes meredekség alapján rajzoljuk/ számoljuk, hanem a következők szerint:



- **Kiszámítjuk, hogy az Euler módszer szerint mi lenne a következő pont. A rajzon: $(x_0,y_0{}^*)$.**
- **Vesszük az $f(x_0,y_0)$ és az $f(x_1,y_1{}^*)$ meredekségek átlagát.**
- **Ezzel a meredekséggel rajzoljuk meg a következő szakaszt, ill. számoljuk ki a következő pontot. A rajzon: (x_1,y_1).**

Példa

A Runge-Kutta módszerrel határozzuk meg közelítőleg az

$$y'(x) = y(x) + x^2 - x, \quad y(0) = -1$$

k.é.p. integrálgörbéjét a [0,3] intervallumon!

Megoldás

A következő alappontokkal fogunk számolni:

$x_0 = 0$

$x_1 = 0{,}5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1{,}5$

$x_4 = 2$

$x_5 = 2{,}5$

$x_6 = 3$

Differenciálegyenletek

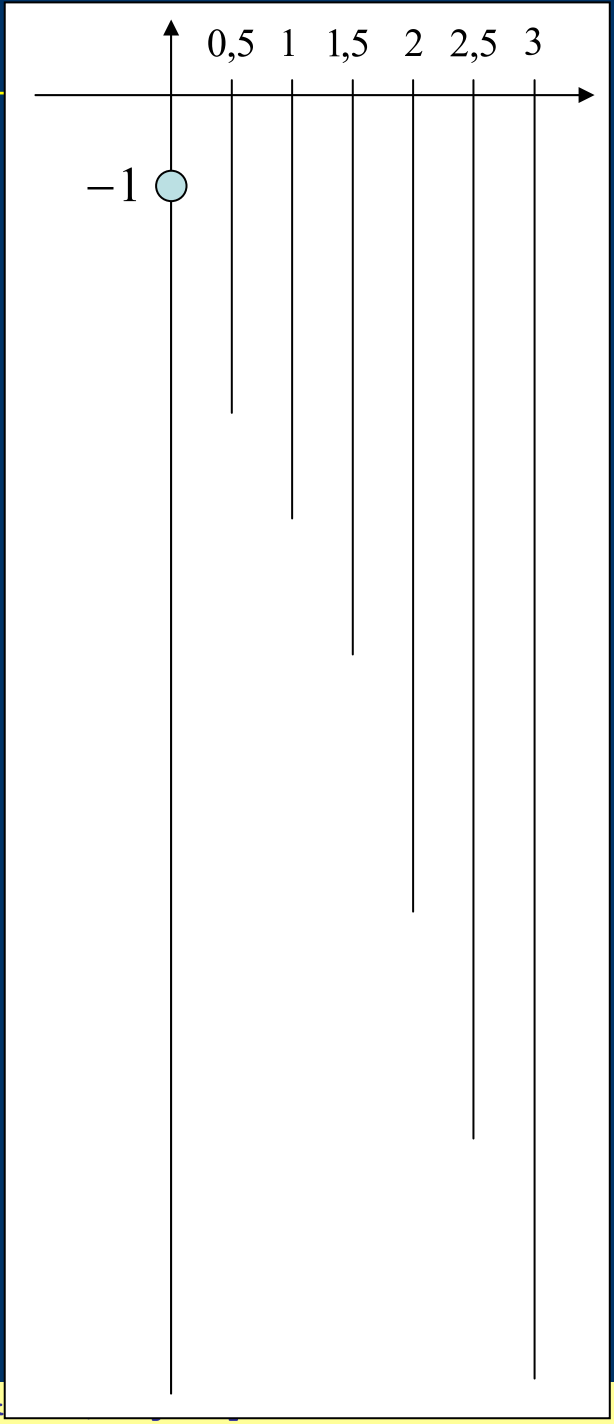
$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $\quad y_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad y'_0{}^* = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1^*(x) = y_0 + y_0'^* \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1^* = L_1^*(x_1) = L_1^*(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

$$y'(x_1, y_1^*) = -1{,}75$$



$$y' = y + x^2 - x$$

$x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = -1$ $\quad \Rightarrow \quad$ $y'_0{}^* = y'(x_0, y_0) = -1$

$$L_1{}^*(x) = y_0 + y_0'{}^* \cdot (x - x_0) = -1 - x$$

$$y_1{}^* = L_1{}^*(x_1) = L_1{}^*(0{,}5) = -1 - 0{,}5 = -1{,}5$$

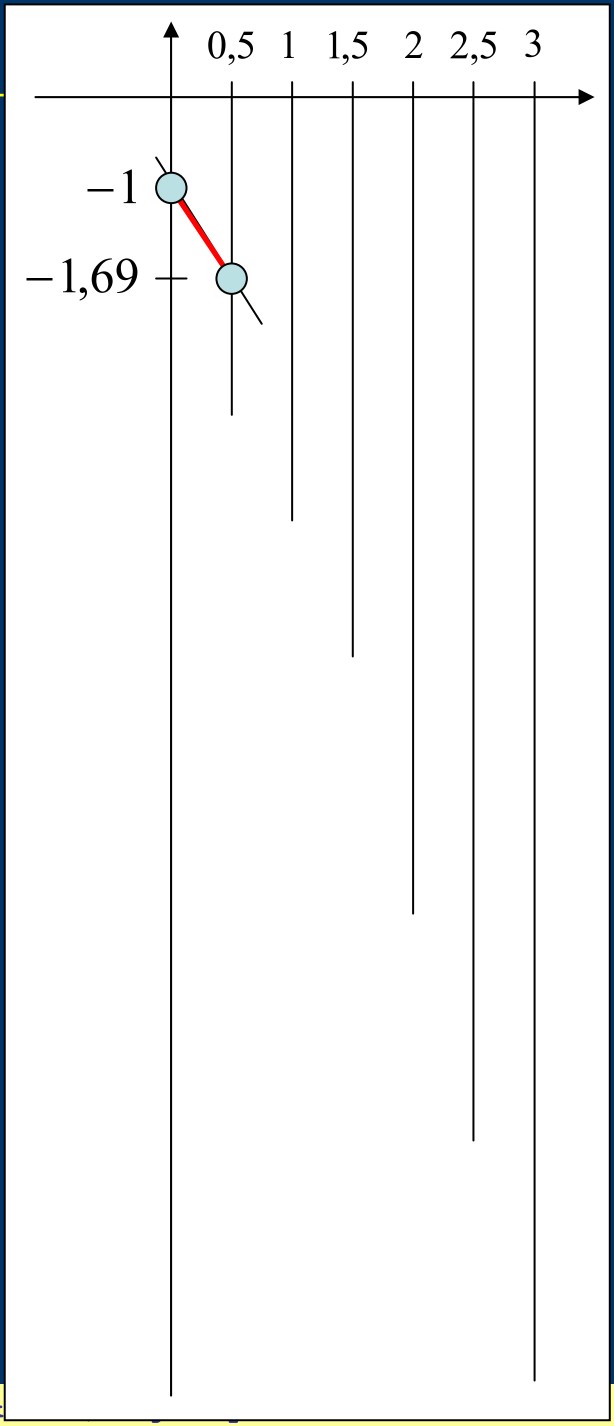
$$y'(x_1, y_1{}^*) = -1{,}75$$

$$y'_0 = \frac{y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1{}^*)}{2} = \frac{-1 - 1{,}75}{2} = -1{,}38$$

$$L_1(x) = y_0 + y_0' \cdot (x - x_0) = -1 - 1{,}38x$$

$$y_1 = L_1(x_1) = L_1(0{,}5) = -1 - 1{,}38 \cdot 0{,}5 = -1{,}69$$

$x_1 = 0{,}5$ $\quad$ $y_1 = -1{,}69$



Differenciálegyenletek

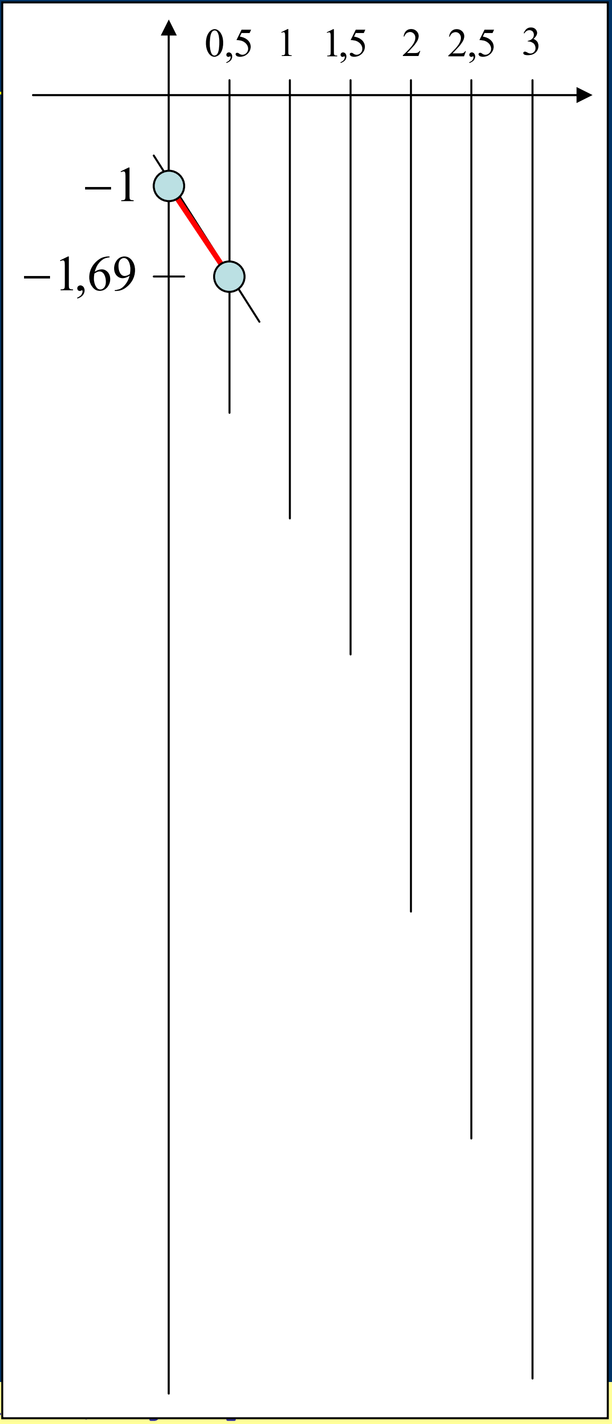
$$y' = y + x^2 - x$$

$x_1 = 0{,}5$ $y_1 = -1{,}69$ $\Rightarrow$ $y'_1{}^* = y'(x_1, y_1) = -1{,}94$

$$L_2{}^*(x) = y_1 + y_1'{}^* \cdot (x - x_1) = -1{,}69 - 1{,}94 \cdot (x - 0{,}5)$$

$$y_2{}^* = L_2{}^*(x_2) = L_2{}^*(1) = -1{,}69 - 1{,}94 \cdot 0{,}5 = -2{,}66$$

$$y'(x_2, y_2{}^*) = -2{,}66$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_1 = 0,5$ $y_1 = -1,69$ $\Rightarrow$ $y'_1{}^* = y'(x_1, y_1) = -1,94$

$$L_2{}^*(x) = y_1 + y_1'{}^* \cdot (x - x_1) = -1,69 - 1,94 \cdot (x - 0,5)$$

$$y_2{}^* = L_2{}^*(x_2) = L_2{}^*(1) = -1,69 - 1,94 \cdot 0,5 = -2,66$$

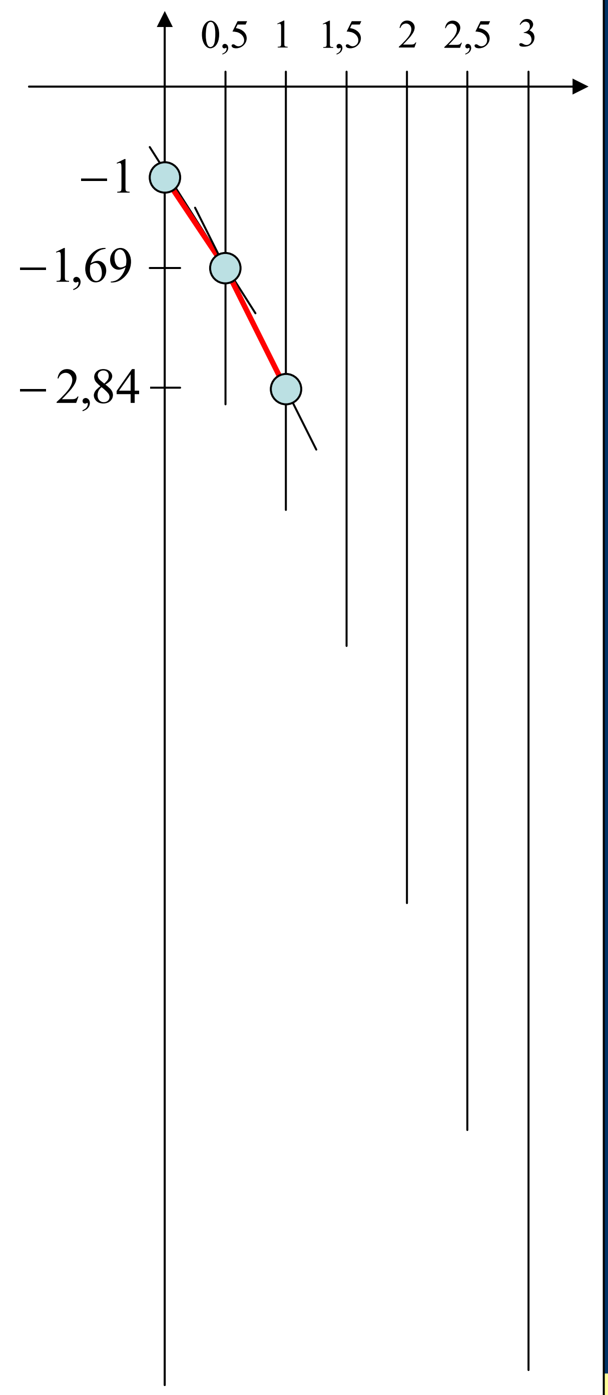
$$y'(x_2, y_2{}^*) = -2,66$$

$$y'_2 = \frac{y'(x_1, y_1) + y'(x_2, y_2{}^*)}{2} = \frac{-1,94 - 2,66}{2} = -2,3$$

$$L_2(x) = y_1 + y_1' \cdot (x - x_1) = -1,69 - 2,3 \cdot (x - 0,5)$$

$$y_2 = L_2(x_2) = L_1(1) = -1,69 - 2,3 \cdot 0,5 = -2,84$$

$x_2 = 1$ $y_2 = -2,84$



Differenciálegyenletek

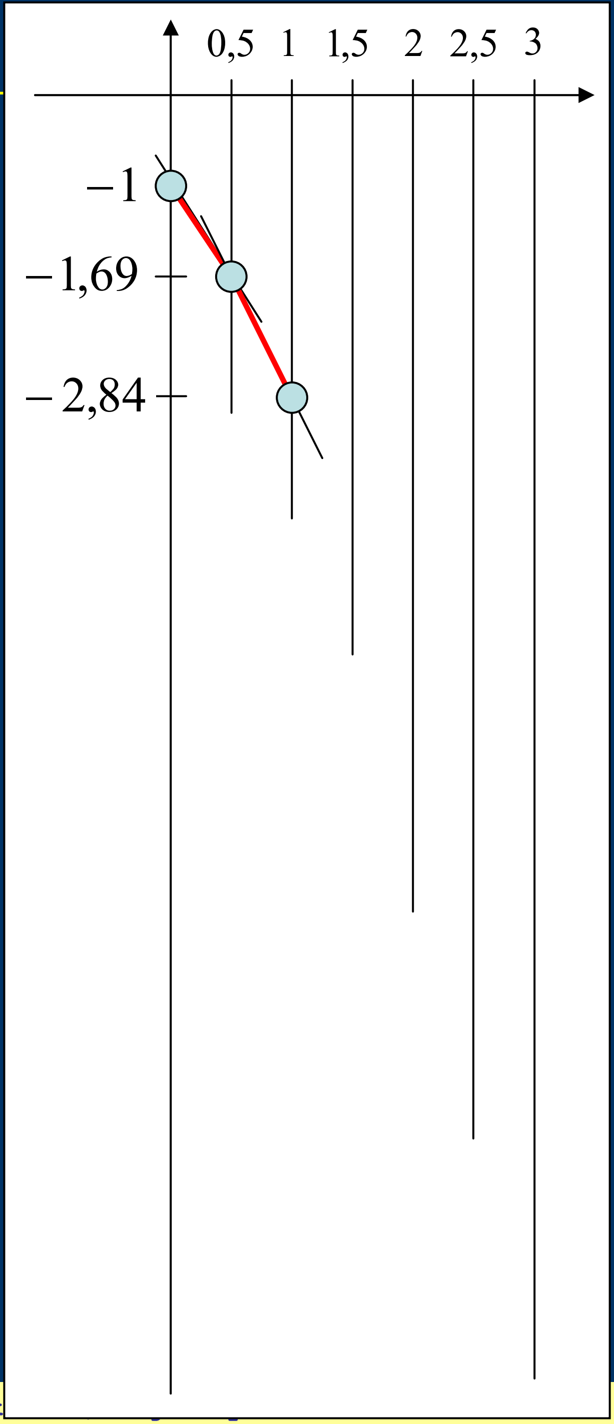
$$y' = y + x^2 - x$$

$x_2 = 1$ $y_2 = -2{,}84$ $\Rightarrow$ $y'_2{}^* = y'(x_2, y_2) = -2{,}84$

$$L_3{}^*(x) = y_2 + y'_2{}^* \cdot (x - x_2) = -2{,}84 - 2{,}84 \cdot (x-1)$$

$$y_3{}^* = L_3{}^*(x_3) = L_3{}^*(1{,}5) = -2{,}84 - 2{,}84 \cdot 0{,}5 = -4{,}26$$

$$y'(x_3, y_3{}^*) = -3{,}51$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_2 = 1$ $\quad y_2 = -2{,}84 \quad \Rightarrow \quad y'_2{}^* = y'(x_2, y_2) = -2{,}84$

$$L_3^*(x) = y_2 + y_2'^* \cdot (x - x_2) = -2{,}84 - 2{,}84 \cdot (x - 1)$$

$$y_3^* = L_3^*(x_3) = L_3^*(1{,}5) = -2{,}84 - 2{,}84 \cdot 0{,}5 = -4{,}26$$

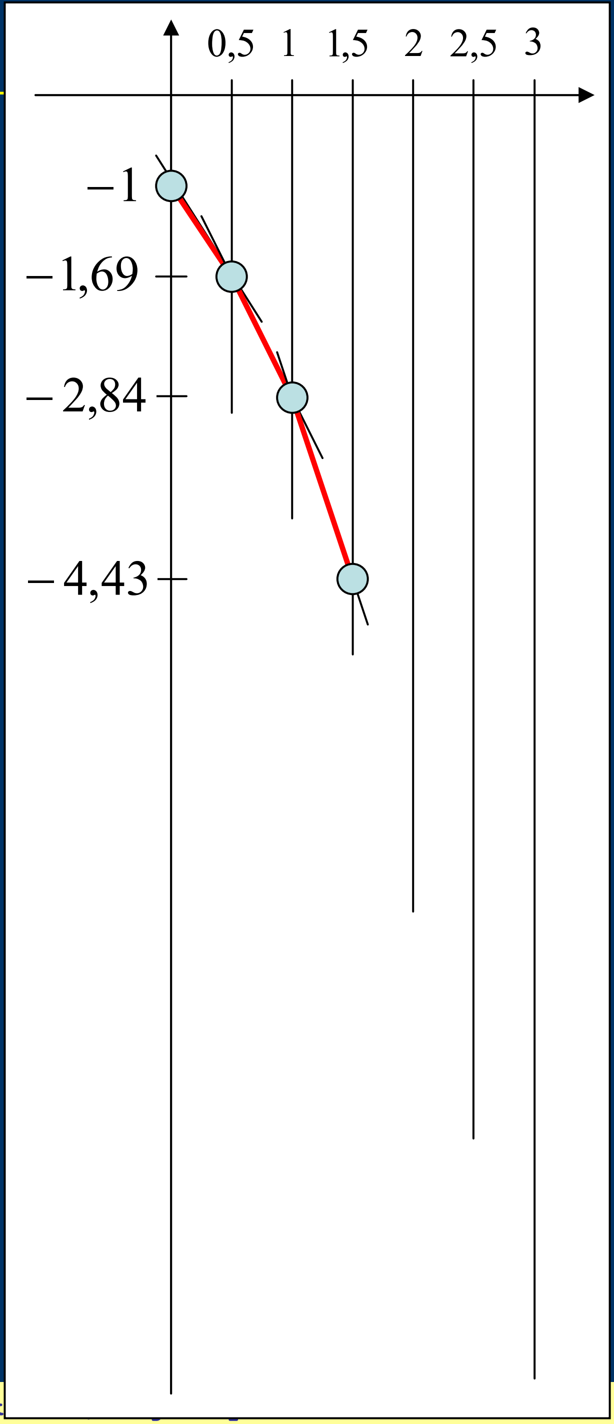
$$y'(x_3, y_3^*) = -3{,}51$$

$$y'_2 = \frac{y'(x_2, y_2) + y'(x_3, y_3^*)}{2} = \frac{-2{,}84 - 3{,}51}{2} = -3{,}18$$

$$L_3(x) = y_2 + y_2' \cdot (x - x_2) = -2{,}84 - 3{,}18 \cdot (x - 1)$$

$$y_3 = L_3(x_3) = L_3(1{,}5) = -2{,}84 - 3{,}18 \cdot 0{,}5 = -4{,}43$$

$x_3 = 1{,}5$ $\quad y_3 = -4{,}43$



Differenciálegyenletek

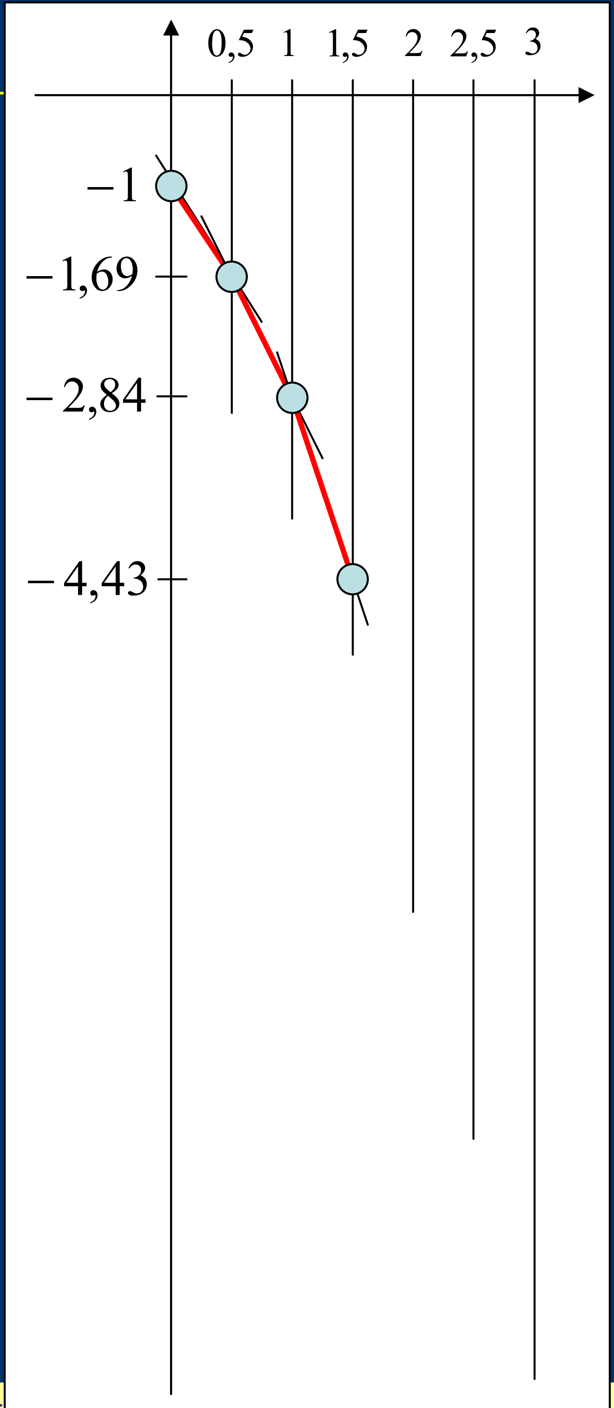
$$y' = y + x^2 - x$$

$$x_3 = 1{,}5 \quad y_3 = -4{,}43 \Rightarrow y'_3{}^* = y'(x_3, y_3) = -3{,}68$$

$$L_4{}^*(x) = y_3 + y'_3{}^* \cdot (x - x_3) = -4{,}43 - 3{,}68 \cdot (x - 1{,}5)$$

$$y_4{}^* = L_4{}^*(x_4) = L_4{}^*(2) = -4{,}43 - 3{,}68 \cdot 0{,}5 = -6{,}27$$

$$y'(x_4, y_4{}^*) = -4{,}27$$



$$y' = y + x^2 - x$$

$x_3 = 1{,}5$ $\quad y_3 = -4{,}43$ $\quad y'_3{}^* = y'(x_3, y_3) = -3{,}68$

$$L_4{}^*(x) = y_3 + y'_3{}^* \cdot (x - x_3) = -4{,}43 - 3{,}68 \cdot (x - 1{,}5)$$

$$y_4{}^* = L_4{}^*(x_4) = L_4{}^*(2) = -4{,}43 - 3{,}68 \cdot 0{,}5 = -6{,}27$$

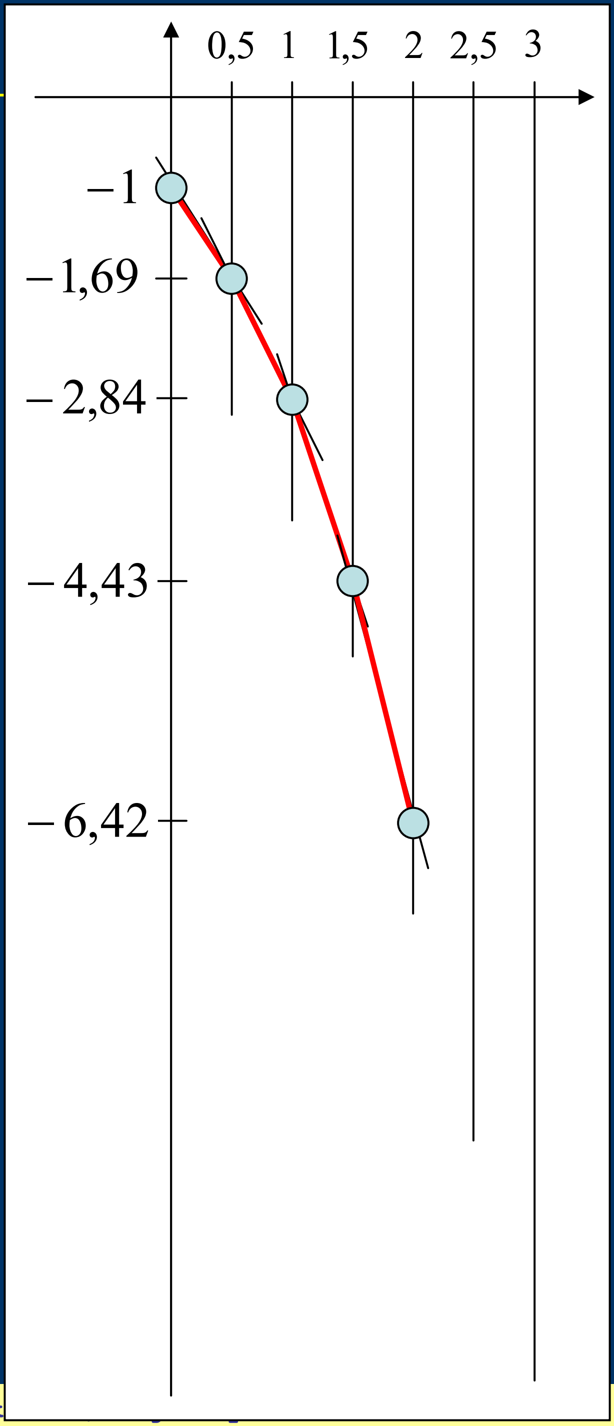
$$y'(x_4, y_4{}^*) = -4{,}27$$

$$y'_3 = \frac{y'(x_3, y_3) + y'(x_4, y_4{}^*)}{2} = \frac{-3{,}68 - 4{,}27}{2} = -3{,}98$$

$$L_4(x) = y_3 + y'_3 \cdot (x - x_3) = -4{,}43 - 3{,}98 \cdot (x - 1{,}5)$$

$$y_4 = L_4(x_4) = L_4(2) = -4{,}43 - 3{,}98 \cdot 0{,}5 = -6{,}42$$

$x_4 = 2$ $\quad y_4 = -6{,}42$



Differenciálegyenletek

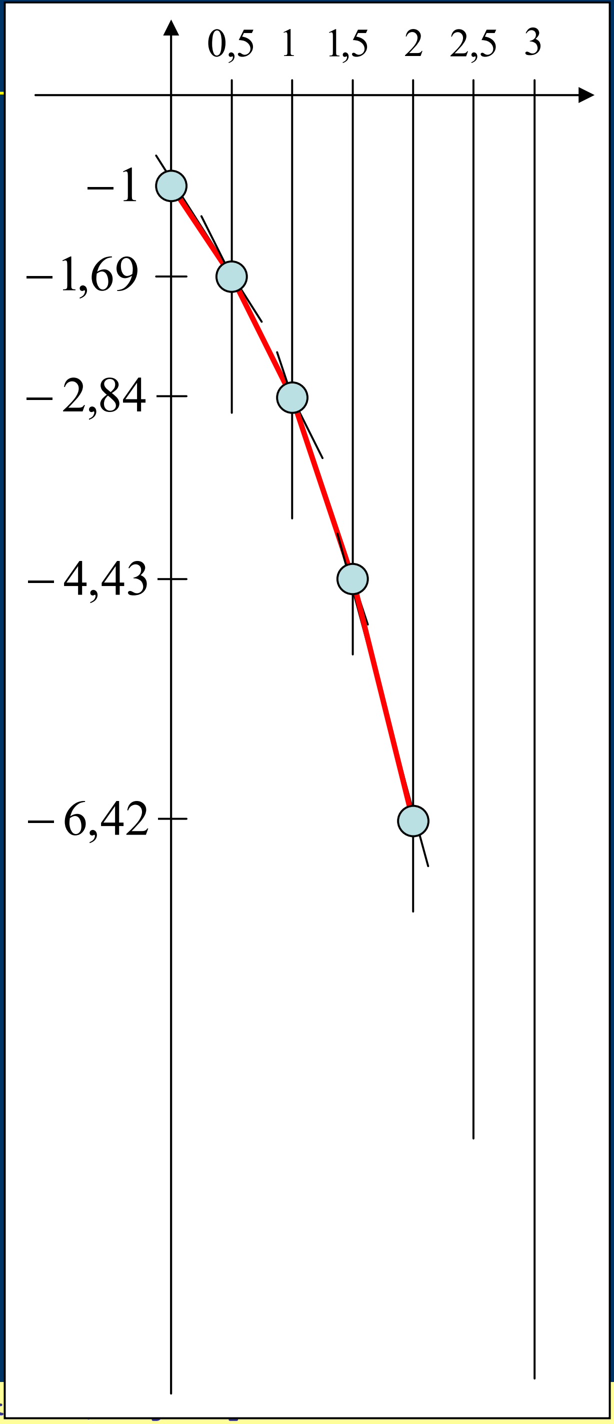
$$y' = y + x^2 - x$$

$x_4 = 2$ $y_4 = -6{,}42$ $\Rightarrow$ $y'_4{}^* = y'(x_4, y_4) = -4{,}42$

$$L_5{}^*(x) = y_4 + y'_4{}^* \cdot (x - x_4) = -6{,}42 - 4{,}42 \cdot (x - 2)$$

$$y_5{}^* = L_5{}^*(x_5) = L_5{}^*(2{,}5) = -6{,}42 - 4{,}42 \cdot 0{,}5 = -8{,}63$$

$$y'(x_5, y_5{}^*) = -4{,}88$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_4 = 2$ $\quad y_4 = -6{,}42$ $\quad \Rightarrow \quad y'_4{}^* = y'(x_4, y_4) = -4{,}42$

$$L_5{}^*(x) = y_4 + y'_4{}^* \cdot (x - x_4) = -6{,}42 - 4{,}42 \cdot (x - 2)$$

$$y_5{}^* = L_5{}^*(x_5) = L_5{}^*(2{,}5) = -6{,}42 - 4{,}42 \cdot 0{,}5 = -8{,}63$$

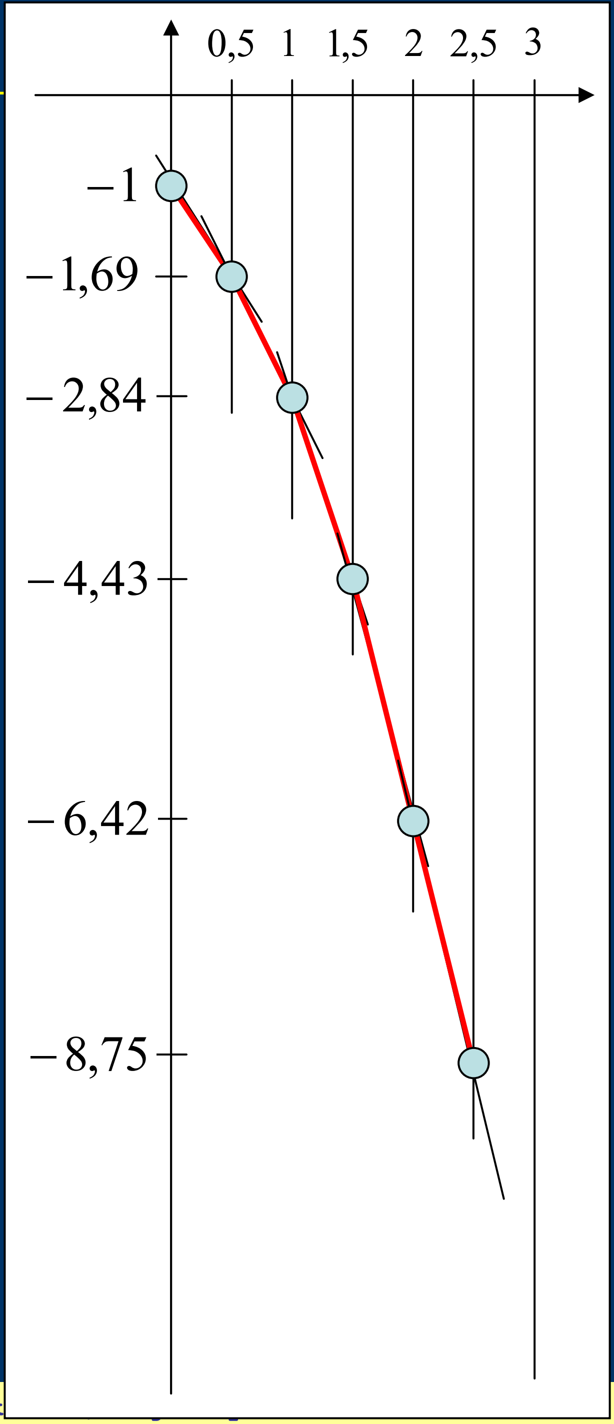
$$y'(x_5, y_5{}^*) = -4{,}88$$

$$y'_4 = \frac{y'(x_4, y_4) + y'(x_5, y_5{}^*)}{2} = \frac{-4{,}42 - 4{,}88}{2} = -4{,}65$$

$$L_5(x) = y_4 + y'_4 \cdot (x - x_4) = -6{,}42 - 4{,}65 \cdot (x - 2)$$

$$y_5 = L_5(x_5) = L_5(2{,}5) = -6{,}42 - 4{,}65 \cdot 0{,}5 = -8{,}75$$

$x_5 = 2{,}5$ $\quad y_5 = -8{,}75$



Differenciálegyenletek

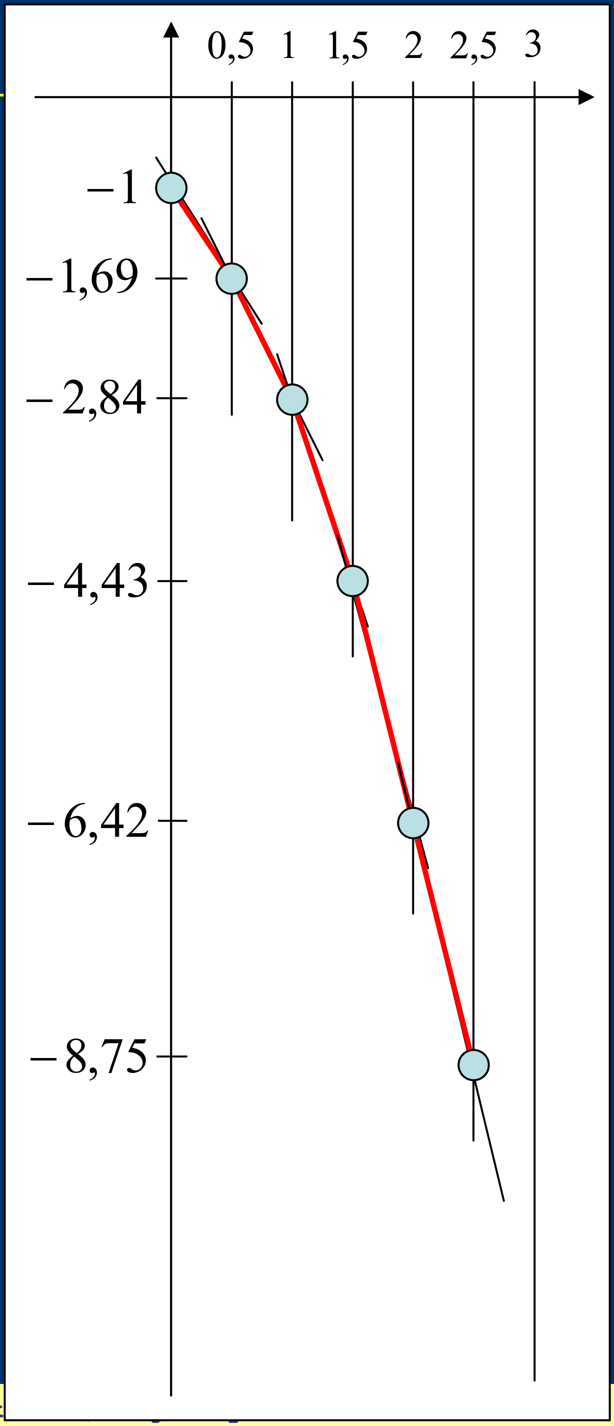
$$y' = y + x^2 - x$$

$x_5 = 2{,}5$ $\quad y_5 = -8{,}75 \Rightarrow y'_5{}^* = y'(x_5, y_5) = -5$

$$L_6{}^*(x) = y_5 + y_5'{}^* \cdot (x - x_5) = -8{,}75 - 5 \cdot (x - 2{,}5)$$

$$y_6{}^* = L_6{}^*(x_6) = L_6{}^*(3) = -8{,}75 - 5 \cdot 0{,}5 = -11.25$$

$$y'(x_6, y_6{}^*) = -5{,}25$$



Differenciálegyenletek

$$y' = y + x^2 - x$$

$x_5 = 2{,}5$ $y_5 = -8{,}75$ $\Rightarrow$ $y'_5{}^* = y'(x_5, y_5) = -5$

$$L_6{}^*(x) = y_5 + y_5'{}^* \cdot (x - x_5) = -8{,}75 - 5 \cdot (x - 2{,}5)$$

$$y_6{}^* = L_6{}^*(x_6) = L_6{}^*(3) = -8{,}75 - 5 \cdot 0{,}5 = -11.25$$

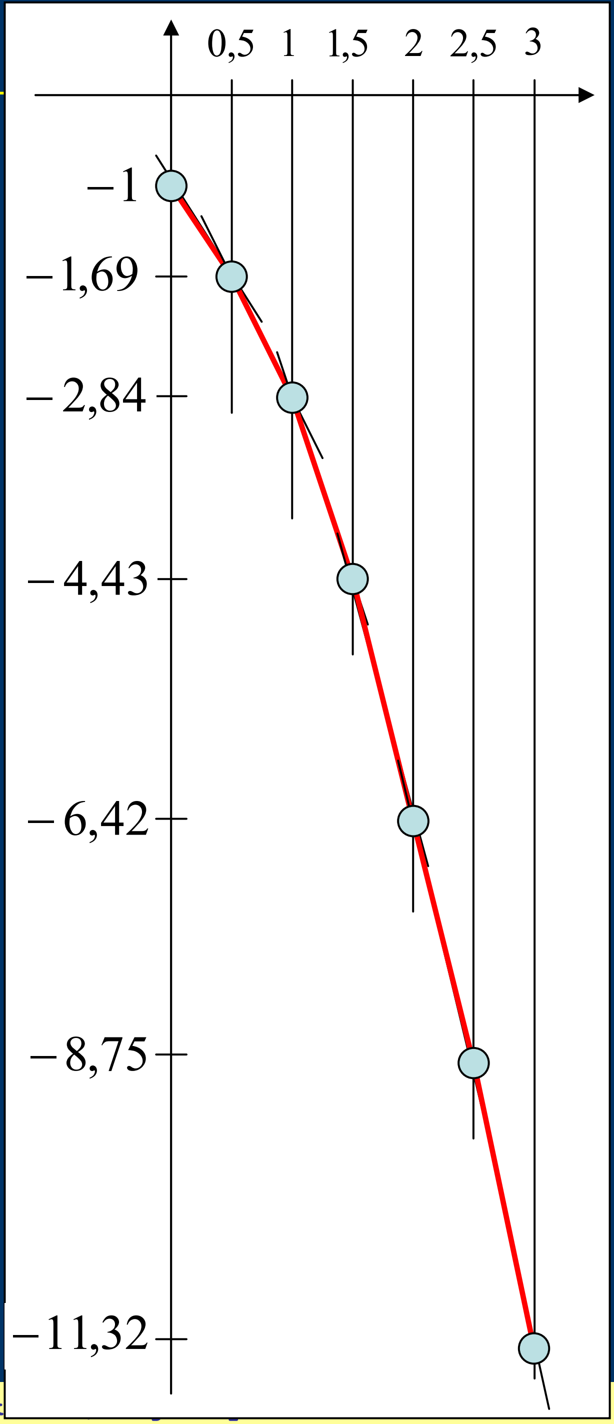
$$y'(x_6, y_6{}^*) = -5{,}25$$

$$y'_5 = \frac{y'(x_5, y_5) + y'(x_6, y_6{}^*)}{2} = \frac{-5 - 5{,}25}{2} = -5{,}13$$

$$L_6(x) = y_5 + y_5' \cdot (x - x_5) = -8{,}75 - 5{,}13 \cdot (x - 2{,}5)$$

$$y_6 = L_6(x_6) = L_6(3) = -8{,}75 - 5{,}13 \cdot 0{,}5 = -11{,}32$$

$x_6 = 3$ $y_6 = -11{,}32$



NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Az $y'(x) = y(x) + x^2 - x$, $y(0) = -1$ k.é.p. pontos megoldása:

$$y(x) = -x^2 - x - 1$$

Ennek a függvénynek az értékei a közelítésben használt alappontokban:

$x_0 = 0$ $\quad y(0) = -1$

$x_1 = 0{,}5$ $\quad y(0{,}5) = -1{,}75$

$x_2 = 1$ $\quad y(1) = -3$

$x_3 = 1{,}5$ $\quad y(1{,}5) = -4{,}75$

$x_4 = 2$ $\quad y(2) = -7$

$x_5 = 2{,}5$ $\quad y(2{,}5) = -9{,}75$

$x_6 = 3$ $\quad y(3) = -13$

NEM NYOMTATÁSRA!

	Euler		**Runge-Kutta**		
x	y	$\lvert\Delta y\rvert$	y	$\lvert\Delta y\rvert$	y_{pontos}
0	-1	0	-1	0	-1
0,5	-1,5	0,25	-1,69	0,06	-1,75
1	-2,38	0,62	-2,84	0,16	-3
1,5	-3,57	1,18	-4,43	0,32	-4,75
2	-4,98	2,02	-6,42	0,58	-7
2,5	-6,47	3,28	-8,75	1	-9,75
3	-7,83	5,17	-11,32	1,68	-13

Néhány nemlineáris differenciálegyenlet-típus megoldási módszere

Elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Ha a g:]a,b[→R és a h:]c,d[→R függvények folytonosak, akkor az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x) \cdot h(y(x))$$

típusú elsőrendű differenciálegyenleteket szétválasztható változójú (vagy szeparábilis) differenciálegyenleteknek nevezzük.

A megoldás formális lépései

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

Példa

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A megoldás formális lépései

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

Példa

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

A megoldás formális lépései

Példa

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

$$\frac{1}{y^2 + 1} dy = x dx$$

A megoldás formális lépései

Példa

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

$$\frac{1}{y^2 + 1} dy = x dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int x \, dx$$

Példa

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + x, \quad y(0) = 1$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

Példa

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + x\ , \quad y(0) = 1$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\int \frac{1}{y^2 + 1}\, dy = \int x\, dx$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + x \,, \quad y(0) = 1$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int x \, dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + x\ , \quad y(0) = 1$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \int x\, dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + x\,, \quad y(0) = 1$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int x\,dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y'(x) = x\cdot y^2(x) + x\,,\quad y(0) = 1$$

$$y'(x) = x\cdot(y^2(x)+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x\cdot(y^2+1)$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int x\,dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

A k.é.p. megoldása:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} c = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzések

1. **A fenti módszerrel általában csak implicit alakban kaphatók meg a megoldásfüggvények.**
2. **A differenciálegyenlet formális megoldása után meg kell vizsgálni, hogy a kapott függvény hol értelmezhető, és mely intervallumokon lesz ténylegesen megoldása az egyenletnek. Az előző példában kapott függvény megoldása a d.e.-nek minden olyan intervallumon, melyet az**

$$\left\{ x \in R \,\middle|\, \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\}$$

halmaz tartalmaz.

Megjegyzés

Az y'(x) = f (x,y(x)) típusú differenciálegyenletek között speciális esetként szerepelnek a legegyszerűbb elsőrendű egyenletek az

$$y'(x) = f(x)$$

típusú differenciálegyenletek.

Itt a megoldásfüggvények az $\int f$ határozatlan integrál függvényei.

Példa

$$y'(x) = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

120 °C-os test hőmérséklete 30 °C-os környezeti hőmérséklet mellett 10 perc alatt 60 °C-ra csökkent. Mennyi idő alatt csökken a test hőmérséklete 40 °C-ra ?

A kérdés megválaszolásához meg kell határozni a hűlést jellemző hőmérséklet-idő függvényt.

Jelölje T a hőmérsékletet, t az időt!

Azzal a legegyszerűbb feltevéssel élve, hogy a hűlés sebessége csak a test és a környezet hőmérsékletkülönbségétől függ, mégpedig azzal egyenesen arányos azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = -k \cdot (T(t) - 30)$$

ahol k az anyagra jellemző állandó.

NEM NYOMTATÁSRA!

A Δt→0 határértéket véve:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-k\cdot(T(t)-30)\right)$$

$$\frac{dT(t)}{dt}=-k\cdot(T(t)-30)$$

vagyis a T(t) függvényre egy elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk. Ennek megoldása:

$$\int\frac{1}{T-30}\,dT=-k\cdot\int 1\,dt$$

A $\Delta t \to 0$ határértéket véve:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(-k \cdot (T(t) - 30)\right)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot (T(t) - 30)$$

vagyis a T(t) függvényre egy elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk. Ennek megoldása:

$$\int \frac{1}{T-30} dT = -k \cdot \int 1 dt$$

$$\ln(T-30) = -k \cdot t + c$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A $\Delta t \to 0$ határértéket véve:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(-k \cdot (T(t) - 30) \right)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot (T(t) - 30)$$

vagyis a T(t) függvényre egy elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk. Ennek megoldása:

$$\int \frac{1}{T-30} dT = -k \cdot \int 1 dt$$

$$\ln(T-30) = -k \cdot t + c$$

$$e^{\ln(T-30)} = e^{-kt+c}$$

A Δt→0 határértéket véve:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-k\cdot(T(t)-30)\right)$$

$$\frac{dT(t)}{dt}=-k\cdot(T(t)-30)$$

vagyis a T(t) függvényre egy elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk. Ennek megoldása:

$$\int\frac{1}{T-30}\,dT=-k\cdot\int 1\,dt$$

$$\ln(T-30)=-k\cdot t+c$$

$$e^{\ln(T-30)}=e^{-kt+c}$$

$$T-30=e^{-kt+c}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A $\Delta t \to 0$ határértéket véve:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(-k \cdot (T(t) - 30) \right)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot (T(t) - 30)$$

vagyis a T(t) függvényre egy elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk. Ennek megoldása:

$$\int \frac{1}{T-30} dT = -k \cdot \int 1 dt$$

$$\ln(T-30) = -k \cdot t + c$$

$$e^{\ln(T-30)} = e^{-kt+c}$$

$$T - 30 = e^{-kt+c}$$

$$T(t) = e^{-kt+c} + 30$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A k és a c konstansok értéke a feladatban közölt információk alapján meghatározható.

$$T(t) = e^{-kt+c} + 30$$

A T(0)=120 és a T(10)=60 feltételekből a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{array}{lll} T(0) = 120 & \Rightarrow & \text{I. } 120 = e^{c} + 30 \\ T(10) = 60 & \Rightarrow & \text{II. } 60 = e^{-10k+c} + 30 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad c = \ln 90 \approx 4{,}5 \qquad k = \frac{\ln 3}{10} \approx 0{,}11$$

A feladat megoldása:

$$T(t) = e^{-0{,}11\cdot t+4{,}5} + 30$$

$$T(t) = e^{-0{,}11 \cdot t + 4{,}5} + 30$$

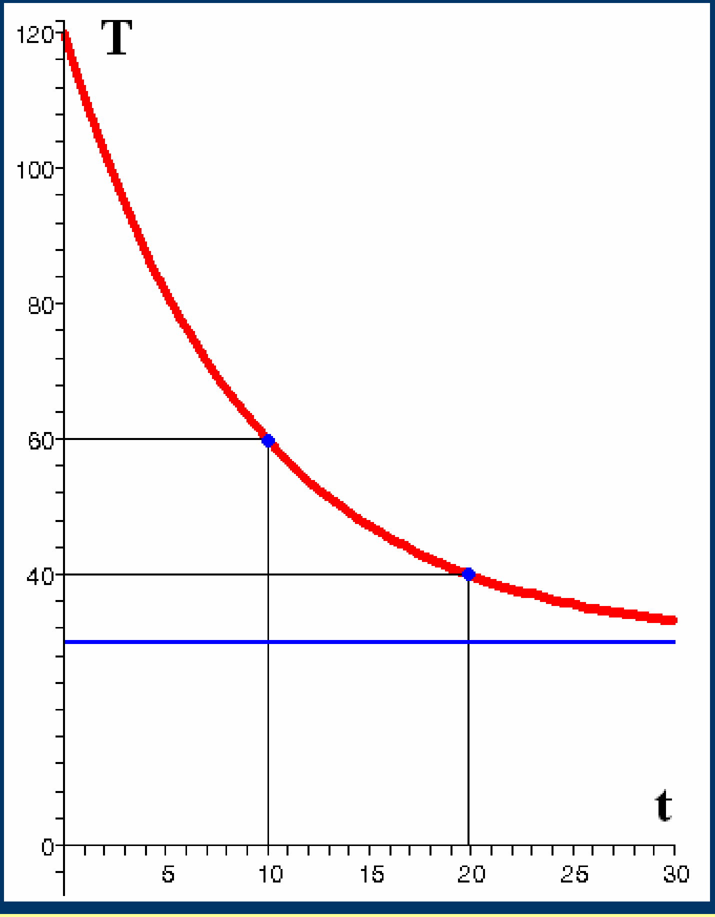
A feladat jellegéből adódóan $t \in [0, +\infty)$.
Mennyi idő alatt csökken a test hőmérséklete 40 °C -ra ?

$$40 = e^{-0{,}11 \cdot t + 4{,}5} + 30$$

$$e^{-0{,}11 \cdot t + 4{,}5} = 10$$

$$-0{,}11 \cdot t + 4{,}5 = \ln 10$$

$$t = 20$$



A test 20 perc alatt hűl le 40 °C-ra.

NEM NYOMTATÁSRA!

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

Két másodrendű hiányos differenciálegyenlet-típus

$y''(x) = f(x)$ típusú differenciálegyenletek

Ha I és J intervallumok, f:I×J→R folytonos függvény, akkor az

$$y''(x) = f(x)$$

alakú d.e.-ek két integrálással megoldhatók.

Példa

$$y''(x) = \sqrt{x}\ , \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = \sqrt{x}\ , \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 2$$

$$y'(x) = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_1$$

Példa

$$y''(x)=\sqrt{x}\ ,\quad y(1)=4,\quad y'(1)=2$$

$$y'(x)=\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_1=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c_1$$

$$y(x)=\int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_1\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}+c_1\cdot x+c_2=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{x^5}+c_1\cdot x+c_2$$

Példa

$$y''(x) = \sqrt{x}\ , \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 2$$

$$y'(x) = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_1$$

$$y(x) = \int \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_1 \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + c_1 \cdot x + c_2 = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{x^5} + c_1 \cdot x + c_2$$

$$y'(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{2}{3}\sqrt{1^3} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{4}{3}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x)=\sqrt{x}\ ,\quad y(1)=4,\quad y'(1)=2$$

$$y'(x)=\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_1=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c_1$$

$$y(x)=\int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_1\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}+c_1\cdot x+c_2=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{x^5}+c_1\cdot x+c_2$$

$$y'(1)=2\quad\Rightarrow\quad 2=\frac{2}{3}\sqrt{1^3}+c_1\quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{4}{3}$$

$$y(1)=4\quad\Rightarrow\quad 4=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{1^5}+\frac{4}{3}\cdot 1+c_2\quad\Rightarrow\quad c_2=\frac{36}{15}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = \sqrt{x}\ , \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 2$$

$$y'(x) = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_1$$

$$y(x) = \int \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_1 \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + c_1 \cdot x + c_2 = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{x^5} + c_1 \cdot x + c_2$$

$$y'(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{2}{3}\sqrt{1^3} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{4}{3}$$

$$y(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{1^5} + \frac{4}{3} \cdot 1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{36}{15}$$

Az k.é.p. megoldása:

$$y(x) = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \cdot x + \frac{36}{15}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = F_0 \Rightarrow \ddot{s}(t) = \frac{F_0}{m}$$

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = F_0 \Rightarrow \ddot{s}(t) = \frac{F_0}{m}$$

Kezdeti értékek:

kezdeti hely: $s(0)=s_0$

kezdeti sebesség: $v(0)=v_0$

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = F_0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s}(t) = \frac{F_0}{m}$$

Kezdeti értékek:

kezdeti hely: $s(0)=s_0$

kezdeti sebesség: $v(0)=v_0$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \int \frac{F_0}{m} dt = \frac{F_0}{m} \cdot t + c_1$$

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = F_0 \Rightarrow \ddot{s}(t) = \frac{F_0}{m}$$

Kezdeti értékek:

kezdeti hely: $s(0)=s_0$

kezdeti sebesség: $v(0)=v_0$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \int \frac{F_0}{m} dt = \frac{F_0}{m} \cdot t + c_1$$

$$s(t) = \int \left(\frac{F_0}{m} \cdot t + c_1 \right) dt = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = F_0 \Rightarrow \ddot{s}(t) = \frac{F_0}{m}$$

Kezdeti értékek:

kezdeti hely: $s(0)=s_0$

kezdeti sebesség: $v(0)=v_0$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \int \frac{F_0}{m} dt = \frac{F_0}{m} \cdot t + c_1$$

$$v(0)=v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$$

$$s(t) = \int \left(\frac{F_0}{m} \cdot t + c_1 \right) dt = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2$$

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = F_0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s}(t) = \frac{F_0}{m}$$

Kezdeti értékek:

kezdeti hely: $s(0)=s_0$

kezdeti sebesség: $v(0)=v_0$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \int \frac{F_0}{m} dt = \frac{F_0}{m} \cdot t + c_1$$

$$v(0)=v_0 \quad \Rightarrow \quad c_1=v_0$$

$$s(t) = \int \left(\frac{F_0}{m} \cdot t + c_1 \right) dt = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2$$

$$s(0)=s_0 \quad \Rightarrow \quad c_2=s_0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = F_0 \Rightarrow \ddot{s}(t) = \frac{F_0}{m}$$

Kezdeti értékek:

kezdeti hely: $s(0)=s_0$

kezdeti sebesség: $v(0)=v_0$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \int \frac{F_0}{m} dt = \frac{F_0}{m} \cdot t + c_1$$

$v(0)=v_0 \Rightarrow c_1=v_0$

$$s(t) = \int \left(\frac{F_0}{m} \cdot t + c_1 \right) dt = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2$$

$s(0)=s_0 \Rightarrow c_2=s_0$

Megoldás:

$$s(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0 = \frac{a_0}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

$y''(x) = f(x, y'(x))$ típusú differenciálegyenletek

Ha I és J intervallumok, f:I×J→R folytonos függvény, akkor az

$$y''(x) = f(x, y'(x))$$

alakú d.e.-ek megoldása a $p(x) = y'(x)$ jelöléssel visszavezethető két elsőrendű d.e. megoldására az alábbiak szerint:

NEM NYOMTATÁSRA!

$$y''(x) = f(x, y'(x))$$

$$\Downarrow \quad y'(x) = p(x) \quad y''(x) = p'(x)$$

I. $p'(x) = f(x, p(x)) \Rightarrow p(x)$

$$\Downarrow$$

$y(x) \Leftarrow$ **II.** $y'(x) = p(x)$

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$\Downarrow$ **$y'(x) = p(x)$** **$y''(x) = p'(x)$**

$$\text{I.}\ \ p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$$\Downarrow \qquad \mathbf{y'(x) = p(x)} \qquad \mathbf{y''(x) = p'(x)}$$

$$\text{I.}\ \ p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1, \; y(0) = 3$$

$$\Downarrow \quad y'(x) = p(x) \quad y''(x) = p'(x)$$

$$\text{I. } p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2} dp = 1dx$$

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{y'(x) = p(x)} \qquad \mathbf{y''(x) = p'(x)}$$

$$\text{I.}\ \ p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}\,dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}\,dp = \int 1\,dx$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$$\Downarrow \qquad \mathbf{y'(x) = p(x)} \qquad \mathbf{y''(x) = p'(x)}$$

$$\text{I.}\ \ p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}\,dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}\,dp = \int 1\,dx$$

$$\frac{-1}{p} = x + c_1$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$$\Downarrow \quad \mathbf{y'(x) = p(x)} \quad \mathbf{y''(x) = p'(x)}$$

$$\text{I.}\ \ p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}dp = \int 1\,dx$$

$$\frac{-1}{p} = x + c_1$$

$$p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$\Downarrow$ **$y'(x) = p(x)$** **$y''(x) = p'(x)$**

I. $p'(x) = p^2(x)$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}dp = \int 1\,dx$$

$$\frac{-1}{p} = x + c_1$$

$$p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

II. $y'(x) = p(x) = \dfrac{-1}{x + c_1}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1, y(0) = 3$$

$$\Downarrow \quad \mathbf{y'(x) = p(x)} \quad \mathbf{y''(x) = p'(x)}$$

$$\text{I. } p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}dp = \int 1\,dx$$

$$\frac{-1}{p} = x + c_1$$

$$p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

$$\text{II. } y'(x) = p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

$$y(x) = \int \frac{-1}{x + c_1}dx = -\ln|x + c_1| + c_2$$

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1, \; y(0) = 3$$

$$\Downarrow \quad y'(x) = p(x) \qquad y''(x) = p'(x)$$

I. $p'(x) = p^2(x)$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}\,dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}\,dp = \int 1\,dx$$

$$\frac{-1}{p} = x + c_1$$

$$p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

II. $y'(x) = p(x) = \dfrac{-1}{x + c_1}$

$$y(x) = \int \frac{-1}{x + c_1}\,dx = -\ln|x + c_1| + c_2$$

$$y'(0) = -1 \;\Rightarrow\; \frac{-1}{c_1} = -1 \;\Rightarrow\; c_1 = 1$$

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$$\Downarrow \quad y'(x) = p(x) \qquad y''(x) = p'(x)$$

$$\text{I.}\ \ p'(x) = p^2(x)$$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}dp = \int 1dx$$

$$\frac{-1}{p} = x + c_1$$

$$p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

$$\text{II.}\ \ y'(x) = p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

$$y(x) = \int \frac{-1}{x + c_1}dx = -\ln|x + c_1| + c_2$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{c_1} = -1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow c_2 = 3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad y'(0) = -1,\ y(0) = 3$$

$\Downarrow$ **$y'(x) = p(x)$** **$y''(x) = p'(x)$**

I. $p'(x) = p^2(x)$

Ez egy elsőrendű szétválasztható változójú d.e.. Először ezt oldjuk meg.

$$\frac{dp}{dx} = p^2$$

$$\frac{1}{p^2}dp = 1dx$$

$$\int \frac{1}{p^2}dp = \int 1dx$$

$$\frac{-1}{p} = x + c_1$$

$$p(x) = \frac{-1}{x + c_1}$$

II. $y'(x) = p(x) = \dfrac{-1}{x + c_1}$

$$y(x) = \int \frac{-1}{x + c_1}dx = -\ln|x + c_1| + c_2$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{c_1} = -1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow c_2 = 3$$

$$y(x) = -\ln|x + 1| + 3$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Lineáris differenciálegyenletek

Definíció

Ha a g_0, g_1, … , g_{n-1}, h : I → R függvények folytonosak, akkor az

$$y^{(n)}(x)+g_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+g_1(x)\cdot y'(x)+g_0(x)\cdot y(x)=h(x)$$

d.e.-et n-edrendű lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük.

Definíció

Ha h(x)=0, akkor homogén, különben inhomogén lineáris egyenletről beszélünk.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzések

1. Ha egy inhomogén egyenletben a h függvény helyébe a konstans 0 függvényt írjuk, akkor inhomogén egyenlet homogén megfelelőjét kapjuk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az inhomogén egyenletek megoldásai szoros kapcsolatban állnak a homogén megfelelő megoldásaival.

2. Az alkalmazások szempontjából a lineáris differenciálegyenletek a legfontosabbak közé tartoznak.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák lineáris differenciálegyenletre

1. NEWTON II. EGYENLET - CSILLAPÍTOTT REZGÉS

Egy D rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömegű test rezgésének kitérés-idő függvénye (y(t)), a sebességgel arányos közegellenállás esetén (arányossági tényező: f) a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

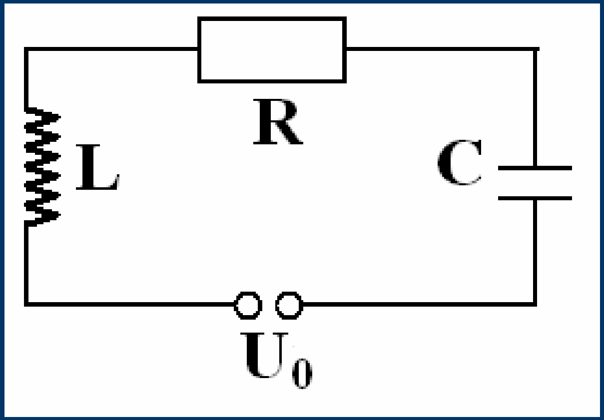
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{f}{m} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{D}{m} \cdot y(t) = 0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

2. SOROS R-L-C KÖR

Konstans U_0 feszültség rákapcsolásával a körben kialakuló I(t) áramerősség függvény a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{CL} \cdot I(t) = 0$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Lineáris differenciálegyenletek

Definíció: lineárisan független függvényrendszer

A $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ függvényrendszert lineárisan függetlennek nevezünk, ha a rendszer egyik elemét sem lehet a többi elem lineáris kombinációjaként előállítani.

Példák

Egy függvényből álló függvényrendszer független, ha a függvény nem konstans 0.

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

A következő függvényrendszer nem független (=függő), mert $f_2(x)=2\cdot f_1(x)$:

$$\{\ f_1(x) = 3x^2-x,\quad f_2(x) = 6x^2-2x\ \}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

A következő függvényrendszer nem független (=függő), mert $f_2(x)=2\cdot f_1(x)$:

$$\{\ f_1(x) = 3x^2-x,\quad f_2(x) = 6x^2-2x\ \}$$

A következő függvényrendszer független:

$$\{\ f_1(x) = x^2,\quad f_2(x) = x\ \}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példák

A következő függvényrendszer nem független (=függő), mert $f_2(x)=2\cdot f_1(x)$:

$$\{ f_1(x) = 3x^2-x, \quad f_2(x) = 6x^2-2x \}$$

A következő függvényrendszer független:

$$\{ f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x \}$$

A következő függvényrendszer függő, mert $f_3(x)=f_1(x)-3\cdot f_2(x)$:

$$\{ f_1(x) = 3x^2-x, \quad f_2(x) = 2x+1, \quad f_3(x) = 3x^2-7x-3 \}$$

Definíció: Wronski determináns

Ha az $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ függvényrendszer elemei legalább (n-1)-szer differenciálható függvények, akkor a függvényrendszer Wronski determinánsa:

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel: a lineáris függetlenség és a Wronski determináns kapcsolata

Egy legalább (n-1)-szer differenciálható függvényekből álló $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ függvényrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a függvényrendszer Wronski determinánsa nem az azonosan 0 függvény.

Példa

$f_1(x) = x$ $f_2(x) = x^2$ $f_3(x) = x^3$

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{pmatrix} = 2x^3$$

Az $\{f_1,f_2,f_3\}$ függvényrendszer lineárisan független.

Tétel: homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere

Minden n-edrendű a lineáris homogén differenciálegyenletek létezik n darab olyan megoldásfüggvénye, melyek lineárisan független rendszert alkotnak.

Egy ilyen $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots , \varphi_n\}$ függvényrendszert a lineáris homogén differenciálegyenlet alaprendszerének nevezzük.

Definíció: a homogén egyenlet általános megoldása

Ha a $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ függvényrendszer egy lineáris homogén differenciálegyenlet alaprendszere, akkor e függvények bármely

$$c_1\cdot \varphi_1+c_2\cdot \varphi_2+\ldots+c_n\cdot \varphi_n$$

lineáris kombinációja szintén megoldása az egyenletnek.

E függvények összességét (ami végtelen sok függvényt tartalmaz) nevezzük a lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldásának:

$$y_H = c_1\cdot \varphi_1+c_2\cdot \varphi_2+\ldots+c_n\cdot \varphi_n, \qquad c_1, c_2, \ldots c_n\cdot\in R$$

Definíció: az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

Egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet egy konkrét megoldásfüggvényét partikuláris megoldásnak nevezzük.

Tétel: az inhomogén egyenlet általános megoldása

Ha y_H egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet homogén megfelelőjének általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, akkor az inhomogén egyenlet megoldásai éppen az

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

alakú függvények. E függvények összességét a lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük.

A homogén lineáris differenciálegyenletek megoldása

Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Ha a g:I→R függvény folytonos, akkor az

$$y'(x)+g(x)\cdot y(x)=0$$

egyenletet elsőrendű lineáris homogén d.e.-nek nevezzük.

Megjegyzés

Az elsőrendű lineáris homogén d.e.-ek egyben szétválasztható változójúak is.

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel

Az $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = 0$ elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)\,dx}, \quad c \in R$$

Példa

$$y'(x) - x \cdot y(x) = 0$$

$$\boxed{g(x) = -x}$$

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)\,dx} = c \cdot e^{-\int -x\,dx} = c \cdot e^{\int x\,dx} = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

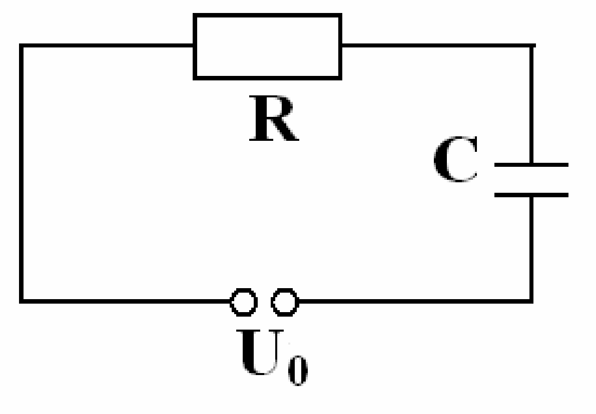
NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: soros R-C kör konstans feszültséggel

Kérdés: soros R-C körre U_0 konstans feszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől?

Az áramerősség-idő függvény a következő elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot I(t) = 0$$



A feszültség rákapcsolásakor az áramerősség:

$$I(0) = \frac{U_0}{R}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Ennek általános megoldása:

$$g(t) = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_H(t) = c \cdot e^{-\int \frac{1}{RC} dt} = c \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Ennek általános megoldása:

$$g(t) = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_H(t) = c \cdot e^{-\int \frac{1}{RC} dt} = c \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve:

$$I(0) = \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{U_0}{R}$$

Ennek általános megoldása:

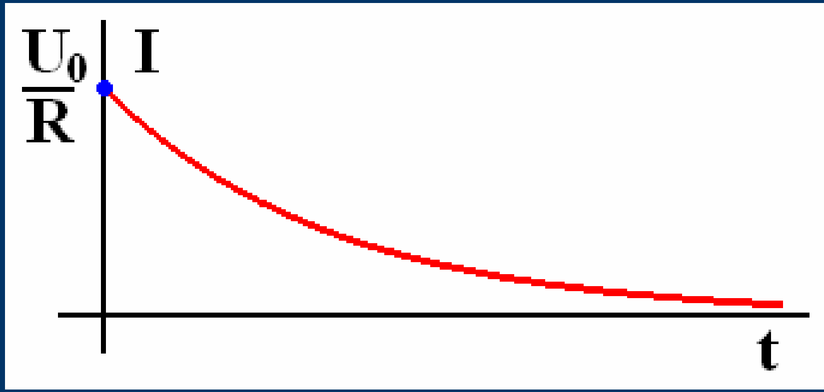
$$g(t) = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_H(t) = c \cdot e^{-\int \frac{1}{RC} dt} = c \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve:

$$I(0) = \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{U_0}{R}$$

A probléma megoldása:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Másodrendű homogén lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletek

Az

$$y''(x)+b\cdot y'(x)+c\cdot y(x)=0$$

egyenletet, ahol b,c∈R, másodrendű lineáris konstansegyütthatós homogén d.e.-nek nevezzük.

Definíció: alaprendszer

Ha az $y_1 : I \to R$ és az $y_2 : I \to R$ függvények az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

egyenlet lineárisan független megoldásai, akkor az $\{y_1, y_2\}$ függvényrendszert a d.e. **alaprendszer**ének nevezzük.

Ha $\{ y_1, y_2 \}$ az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

homogén egyenlet alaprendszere, akkor az egyenlet általános megoldása:

$$y_H = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2.$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: karakterisztikus egyenlet

Az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

d.e. karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásainak ismeretében a homogén lineáris d.e. alaprendszere (és így az általános megoldása is) a következők szerint határozható meg:

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel *(első eset)*

Ha a

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletnek két különböző megoldása van:

$$\lambda_1 \text{ és } \lambda_2 ,$$

akkor a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\left\{ y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \right\}$$

általános megoldása pedig:

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Példa

$$y''(x) + 3\,y'(x) + 2y(x) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Gyökei: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

Alaprendszer: $\{\ e^{-2x},\ e^{-x}\ \}$

Általános megoldás:

$$y_H = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Tétel *(második eset)*

Ha a

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletnek egy megoldása van:

$$\lambda\,,$$

akkor a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\left\{ y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x} \right\}$$

általános megoldása pedig:

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$$

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

Gyöke: $\lambda = 4$

Alaprendszer: $\{ e^{4x}, x \cdot e^{4x} \}$

Általános megoldás:

$$y_H = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Tétel *(harmadik eset)*

Ha a

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletnek nincs megoldása, akkor a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\left\{ y_1(x) = e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x), y_2(x) = e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x) \right\}$$

általános megoldása pedig:

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x) + c_2 \cdot e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x)$$

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

ahol $u = -\frac{b}{2}$ $\quad$ $v = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) + 6y'(x) + 34y(x) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0$$

Gyöke: nincs, $u = -3,\ v = 5$

Alaprendszer: $\{\, e^{-3x}\cdot\sin(5x)\ ,\ e^{-3x}\cdot\cos(5x)\,\}$

Általános megoldás:

$$y_H = c_1\cdot e^{-3x}\cdot\sin(5x) + c_2\cdot e^{-3x}\cdot\cos(5x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Megjegyzés

A másodrendű lineáris konstansegyütthatós d.e.-ek megoldása a következőképpen is tárgyalható:

Oldjuk meg az $y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$ d.e.

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletét a komplex számok halmazán.

A gyökök alapján lehet felírni az alaprendszerbeli függvényeket. Mivel a karakterisztikus polinom itt másodfokú, háromféle gyöktípus fordulhat elő:

1. **Egyszeres valós gyök**
2. **Kétszeres valós gyök**
3. **Egyszeres komplex gyökpár (ezek egymás konjugáltjai)**

Az alaprendszer elemei az alábbiak szerint írhatók fel a három esetben:

NEM NYOMTATÁSRA!

Alaprendszerbeli függvény származtatása egyszeres valós gyökből

Ha a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyöke a

$$\lambda$$

valós szám, akkor az alaprendszerben szerepeltetjük az

$$y(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

függvényt.

Megjegyzés

A korábbi tárgyalási mód 1. ESET-ében a karakterisztikus egyenletnek két darab egyszeres valós gyöke van:

$$\lambda_1 \text{ és } \lambda_2$$

Így a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\left\{ y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \right\}$$

általános megoldása pedig:

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Alaprendszerbeli függvények származtatása kétszeres valós gyökből

Ha a karakterisztikus egyenletnek kétszeres gyöke a

$$\lambda$$

valós szám, akkor az alaprendszerben szerepeltetjük az

$$y_1(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

$$y_2(x) = x \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

függvényeket.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A korábbi tárgyalási mód 2. ESET-ében a karakterisztikus egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke van:

$$\lambda$$

Így a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\left\{ y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x} \right\}$$

általános megoldása pedig:

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$$

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

NEM NYOMTATÁSRA!

Alaprendszerbeli függvények származtatása egyszeres komplex konjugált gyökpárból

Ha a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyökei a

$$\lambda_1 = u + v \cdot i \qquad \lambda_2 = u - v \cdot i$$

komplex konjugált számok, akkor az alaprendszerben szerepeltetjük az

$$y_1(x) = e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x)$$
$$y_2(x) = e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x)$$

függvényeket.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A korábbi tárgyalási mód 3. ESET-ében a karakterisztikus egyenletnek két darab egyszeres komplex gyöke van (ezek egymás konjugáltjai):

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} \cdot i = u + v \cdot i$$

$$\lambda_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} \cdot i = u - v \cdot i$$

Így a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\left\{ y_1(x) = e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x), y_2(x) = e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x) \right\}$$

általános megoldása pedig:

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x) + c_2 \cdot e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

A fentiekhez rövid magyarázatként az alábbiakat fűzzük hozzá. Ha $\lambda_1=u+v\cdot i$ és $\lambda_2=u-v\cdot i$ a karakterisztikus egyenlet gyökei, akkor képezzük a következő függvényeket:

$$y^*_1(x)=e^{\lambda_1 x}=e^{(u+v\cdot i)\cdot x}=e^{u\cdot x}\cdot e^{i\cdot(v\cdot x)}=e^{u\cdot x}\cdot\left(\cos(v\cdot x)+i\cdot\sin(v\cdot x)\right)$$

$$y^*_2(x)=e^{\lambda_2 x}=e^{(u-v\cdot i)\cdot x}=e^{u\cdot x}\cdot e^{i\cdot(-v\cdot x)}=e^{u\cdot x}\cdot\left(\cos(-v\cdot x)+i\cdot\sin(-v\cdot x)\right)$$

Ezek komplex függvények, de kimutatható, hogy a valós és a képzetes részeik

$$x\to e^{u\cdot x}\cdot\cos(v\cdot x)$$ **és** $$x\to e^{u\cdot x}\cdot\sin(v\cdot x)$$

a d.e. független megoldásai.

Homogén lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletek (általános, n-edrendű eset)

Definíció

Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

d.e.-et, ahol a_0, a_1, … , a_{n-1} valós számok n-edrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenleteknek nevezzük.

NEM NYOMTATÁSRA!

Definíció: alaprendszer

Ha az $y_1, y_2, \ldots, y_n: I \to R$ függvények az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

egyenlet lineárisan független megoldásai, akkor az $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ függvényrendszert a d.e. alaprendszerének nevezzük.

Ha $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

homogén egyenlet alaprendszere, akkor az egyenlet általános megoldása:

$$y_H = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \ldots + c_n \cdot y_n$$

Definíció: karakterisztikus egyenlet

Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\cdot y'(x) + a_0\cdot y(x) = 0$$

d.e. karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^n + a_{n-1}\cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1\cdot \lambda + a_0 = 0$$

A karakterisztikus egyenlet gyökeinek ismeretében a homogén lineáris d.e. alaprendszere (és így az általános megoldása is) a következők szerint határozható meg:

A gyökökből származtatjuk az alaprendszer elemeit. Az alaprendszerbeli függvény felírása két dologtól függ:

1. valós vagy komplex gyökről van szó

2. mennyi a gyök multiplicitása (hányszoros gyök)

NEM NYOMTATÁSRA!

Alaprendszerbeli függvény származtatása egyszeres valós gyökből

Ha a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyöke a

$$\lambda$$

valós szám, akkor az alaprendszerben szerepeltetjük az

$$y(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

függvényt.

NEM NYOMTATÁSRA!

Alaprendszerbeli függvények származtatása többszörös valós gyökből

Ha a karakterisztikus egyenletnek k-szoros gyöke a

$$\lambda$$

valós szám, akkor az alaprendszerben szerepeltetjük az

$$y_1(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

$$y_2(x) = x \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$\vdots$$

$$y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

függvényeket (k darab függvény).

Alaprendszerbeli függvények származtatása egyszeres komplex konjugált gyökpárból

Ha a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyökei a

$$\lambda_1 = u + v \cdot i \qquad \lambda_2 = u - v \cdot i$$

komplex konjugált számok, akkor az alaprendszerben szerepeltetjük az

$$y_1(x) = e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x)$$
$$y_2(x) = e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x)$$

függvényeket.

NEM NYOMTATÁSRA!

Alaprendszerbeli függvények származtatása többszörös komplex konjugált gyökpárból

Ha a karakterisztikus egyenletnek k-szoros gyökei a

$$\lambda_1 = u + v \cdot i \qquad \lambda_2 = u - v \cdot i$$

komplex konjugált számok, akkor az alaprendszerben szerepeltetjük az

$$y_1(x) = e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x) \qquad y_{k+1}(x) = e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x)$$

$$y_2(x) = x \cdot e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x) \qquad y_{k+2}(x) = x \cdot e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x) \qquad y_{2k}(x) = x^{k-1} \cdot e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x)$$

függvényeket (2k darab függvény).

Példa: harmonikus rezgés

Határozzuk meg egy D rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömegű test rezgésének kitérés-idő függvényét!

Jelölje y az egyensúlyi helyzettől való kitérést, t az időt!

A D rugóállandójú rugó a testre az y kitéréssel arányos húzóerőt fejt ki: $F = -D \cdot y$.

Így a Newton-egyenlet alakja:

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -D \cdot y(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot y(t) = 0}$$

ami egy másodrendű lineáris konstansegyütthatós d.e.

NEM NYOMTATÁSRA!

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} = 0$$

melynek D/m>0 miatt nincs valós gyöke.

$$u = 0,\ v = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$u = -\frac{b}{2} \qquad v = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$$

$$\left\{ e^{u\cdot x} \cdot \sin(v \cdot x), e^{u\cdot x} \cdot \cos(v \cdot x) \right\}$$

így az egyenlet általános megoldása:

$$y_H(t) = c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + c_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Ha a t=0 időpillanatban a kitérés y_0, a sebesség v_0, azaz

$$y(0) = y_0 \qquad \frac{dy}{dt}(0) = v_0$$

akkor a k.é.p. megoldása:

$$c_1 = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \qquad c_2 = y_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + y_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: csillapított rezgés

Határozzuk meg egy D rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömegű test rezgésének kitérés-idő függvényét, ha a közegellenállással is számolnunk kell!

A probléma megoldáshoz feltételezzük, hogy a közegellenállási erő a sebességgel arányos és az arányossági tényező f. Jelölje y az egyensúlyi helyzettől való kitérést, t az időt.

A rugótól származó harmonikus erő: $-D \cdot y$

A közegellenállási erő : $-f \cdot v = -f \cdot \frac{dy}{dt}$

A Newton-egyenlet:

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -f \cdot \frac{dy(t)}{dt} - D \cdot y(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{m} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{D}{m} \cdot y(t) = 0$$

ami egy másodrendű lineáris konstansegyütthatós d.e.

A számolás egyszerűsítése végett vezessük be a következő jelöléseket:

$$k = \frac{f}{2m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Így a megoldandó egyenlet:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2k \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega^2 \cdot y(t) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2k \cdot \lambda + \omega^2 = 0,$$

melynek a k és az ω viszonyától függően különböző számú valós gyöke van:

NEM NYOMTATÁSRA!

1. eset

Ha k>ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző gyöke van:

$$\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega^2} \qquad \lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

így a d.e. általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\left(-k+\sqrt{k^2-\omega^2}\right)\cdot t} + c_2 \cdot e^{\left(-k-\sqrt{k^2-\omega^2}\right)\cdot t}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

2. eset

Ha k=ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek egy gyöke van:

$$\lambda = -k$$

így a d.e. általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + c_2 \cdot t \cdot e^{-kt}$$

3. eset

Ha k<ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke.

$$u = -k \qquad v = \sqrt{\omega^2 - k^2}$$

így a d.e. általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: R-L-C kör konstans feszültséggel

Kérdés: soros R-L-C körre U_0 konstans feszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől?

Az áramerősség-idő függvény a következő másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{CL} \cdot I(t) = 0$$

Kezdeti értékek:

$$I(0) = 0, \quad \frac{dI}{dt}(0) = \frac{U_0}{L}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A számolás egyszerűsítése végett vezessük be a következő jelöléseket:

$$k = \frac{R}{2L} \qquad \omega^2 = \frac{1}{CL}$$

Így a megoldandó egyenlet:

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + 2k \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \omega^2 \cdot I(t) = 0$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0,$$

melynek a k és az ω viszonyától függően különböző számú valós gyöke van:

NEM NYOMTATÁSRA!

1. eset: NAGY CSILLAPÍTÁS

Ha k>ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző gyöke van:

$$\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega^2} \qquad \lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

így a d.e. általános megoldása:

$$I(t) = c_1 \cdot e^{\left(-k+\sqrt{k^2-\omega^2}\right)\cdot t} + c_2 \cdot e^{\left(-k-\sqrt{k^2-\omega^2}\right)\cdot t}$$

$$I(0)=0,\ \frac{dI}{dt}(0)=\frac{U_0}{L}\ \Rightarrow\ c_1=\frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1-\lambda_2)}\qquad c_2=-c_1=\frac{-U_0}{L\cdot(\lambda_1-\lambda_2)}$$

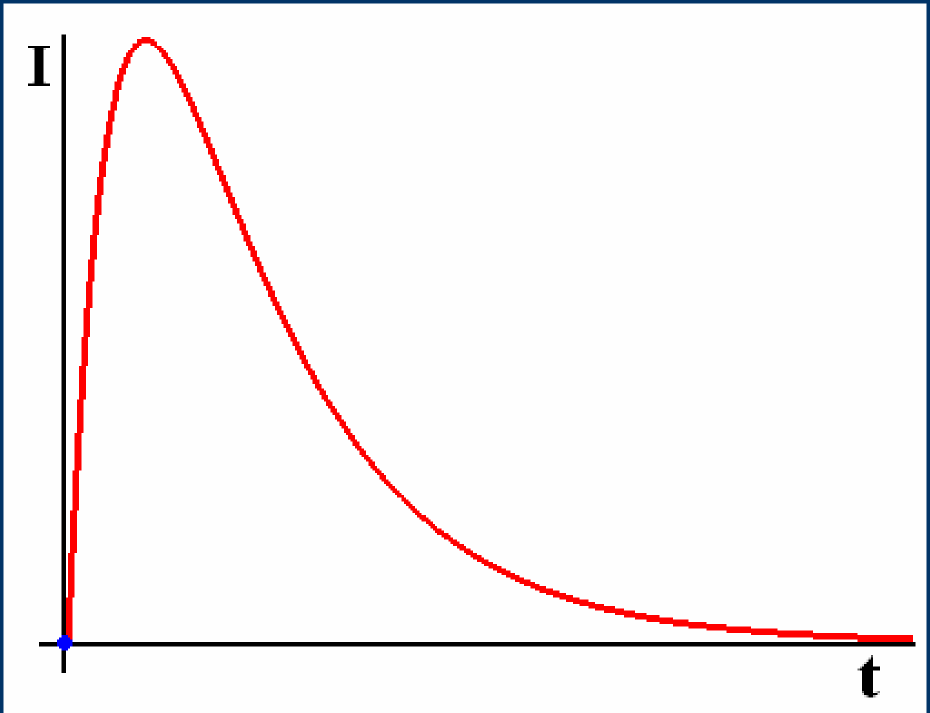
$$\Rightarrow\ I(t)=\frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1-\lambda_2)}\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right)=$$

$$=\frac{U_0}{L\cdot\sqrt{k^2-\omega^2}}\cdot\frac{e^{\left(-k+\sqrt{k^2-\omega^2}\right)\cdot t}-e^{\left(-k-\sqrt{k^2-\omega^2}\right)\cdot t}}{2}=$$

$$=\frac{U_0}{L\cdot\sqrt{k^2-\omega^2}}\cdot e^{-kt}\cdot\frac{e^{\sqrt{k^2-\omega^2}\cdot t}-e^{-\sqrt{k^2-\omega^2}\cdot t}}{2}\ \Rightarrow$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$I(t) = \frac{U_0}{L \cdot \sqrt{k^2 - \omega^2}} \cdot e^{-kt} \cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{k^2 - \omega^2} \cdot t\right)$$



NEM NYOMTATÁSRA!

2. eset: SZINGULÁRIS ESET

Ha k=ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek egy gyöke van:

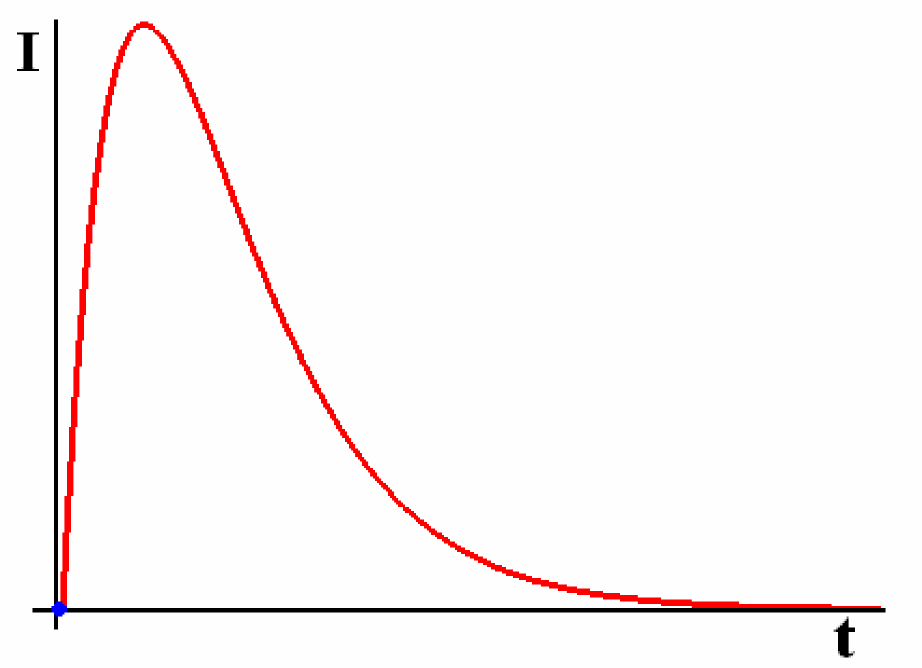
$$\lambda = -k$$

így a d.e. általános megoldása:

$$I(t) = c_1 \cdot e^{-k \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$I(0) = 0,\ \frac{dI}{dt}(0) = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad c_2 = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \cdot t \cdot e^{-kt}$$



NEM NYOMTATÁSRA!

3. eset: KIS CSILLAPÍTÁS

Ha k<ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke.

$$u = -k \qquad v = \sqrt{\omega^2 - k^2}$$

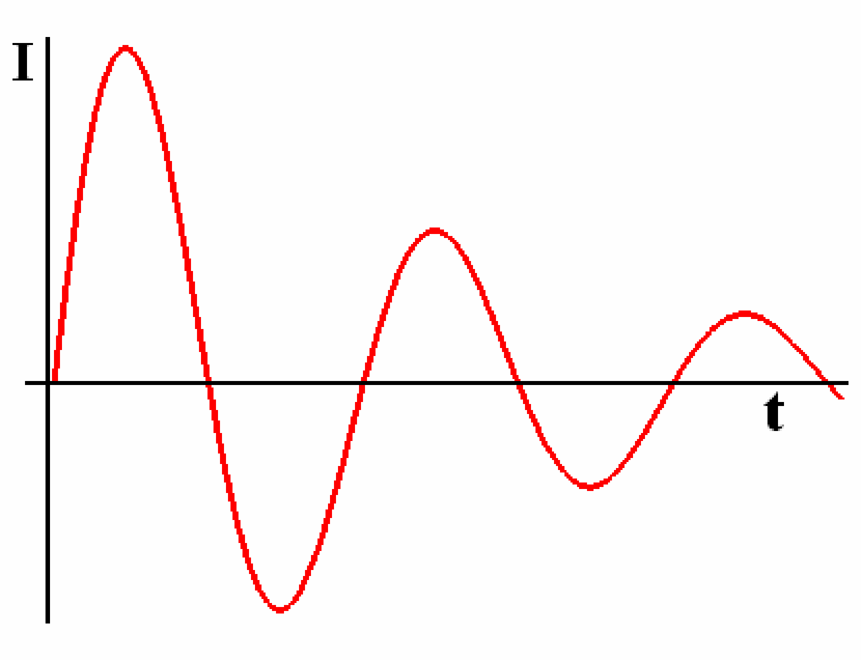
így a d.e. általános megoldása:

$$I(t) = c_1 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$I(0) = 0,\ \frac{dI}{dt}(0) = \frac{U_0}{L} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0} \quad c_1 = \frac{U_0}{L \cdot \sqrt{\omega^2 - k^2}}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{L \cdot \sqrt{\omega^2 - k^2}} \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right)$$



NEM NYOMTATÁSRA!

Az inhomogén lineáris differenciálegyenletek három megoldási módszere

Az inhomogén egyenlet egy y_p partikuláris megoldása meghatározható

- konstansvariálással
- próbafüggvények alkalmazásával
- Laplace transzformáltak alkalmazásával

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás módszer alkalmazása elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldására

Ha a h:I→R és a g:I→R függvények folytonosak, akkor az

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$$

egyenletet elsőrendű lineáris inhomogén d.e.-nek nevezzük.

Az egyenlet homogén megfelelője:

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = 0$$

Az

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

ahol y_H az $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = 0$ egyenlet (vagyis a homogén megfelelő) általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

A konstansvariálás módszer alkalmazásakor a homogén megfelelő általános megoldásából kiindulva kapjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás lépései

A homogén megfelelő általános megoldásából indulunk ki:

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = k(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás lépései

A homogén megfelelő általános megoldásából indulunk ki:

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = k(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx}$$

Az y_p függvényt visszahelyettesítjük az $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$ inhomogén egyenletbe:

$$\Downarrow \quad y_p'(x) = k'(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx} + k(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx} \cdot (-g(x))$$

$$k'(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx} + k(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx} \cdot (-g(x)) + g(x) \cdot k(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx} = h(x)$$

Vegyük észre, hogy a bal oldal 2. és 3. tagjának összege g-től függetlenül nulla. Ezért a feladatmegoldásokban célszerű e két tagot eleve elhagyni.

NEM NYOMTATÁSRA!

$$k'(x) \cdot e^{-\int g(x)\,dx} = h(x) \Rightarrow$$

$$k'(x) = h(x) \cdot \frac{1}{e^{-\int g(x)\,dx}} = h(x) \cdot e^{\int g(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad k(x) = \int h(x) \cdot e^{\int g(x)\,dx}\,dx \quad \Rightarrow \quad y_p$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

IH $y'(x) - x \cdot y(x) = x^3 \,,\quad y(0) = 1$

H $y'(x) - x \cdot y(x) = 0$

$\Rightarrow$ $g(x) = -x$
$h(x) = x^3$

A homogén megfelelő általános megoldásából indulunk ki:

$$y_H(x) = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = k(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

IH $y'(x) - x \cdot y(x) = x^3\,,\ \ y(0) = 1$

H $y'(x) - x \cdot y(x) = 0$

$\Rightarrow$ $g(x) = -x$, $h(x) = x^3$

A homogén megfelelő általános megoldásából indulunk ki:

$$y_H(x) = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = k(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Az y_p függvényt visszahelyettesítjük az inhomogén egyenletbe úgy, hogy csak a szükséges tagokat írjuk le:

$$k'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x^3 \quad \Rightarrow \quad k'(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$k'(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad k(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Az integráláshoz a parciális módszert kell alkalmazni. A számolást itt nem részletezzük, csak az eredményt közöljük:

$$k(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -(x^2 + 2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$k'(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad k(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Az integráláshoz a parciális módszert kell alkalmazni. A számolást itt nem részletezzük, csak az eredményt közöljük:

$$k(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -(x^2 + 2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$y_p(x) = k(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -(x^2 + 2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -(x^2 + 2)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$k'(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad k(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Az integráláshoz a parciális módszert kell alkalmazni. A számolást itt nem részletezzük, csak az eredményt közöljük:

$$k(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -(x^2 + 2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$y_p(x) = k(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -(x^2 + 2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -(x^2 + 2)$$

$$y_{IH}(x) = y_H(x) + y_p(x) = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 2)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$y_{IH}(x) = y_H(x) + y_p(x) = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 2)$$

A k.é.p. megoldása:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \ c - 2 = 1 \Rightarrow c = 3$$

$$y(x) = 3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 2)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa: Szabad esés a sebességgel arányos légellenállás esetén

$$m \cdot \ddot{s}(t) = m \cdot g - f \cdot \dot{s}(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{s}(t) + \frac{f}{m} \cdot \dot{s}(t) = g$$

kezdeti hely: $s(0)=s_0$ **kezdeti sebesség:** $v(0)=v_0$

$v(0)=v_0 \quad \Rightarrow \quad c_1=v_0$

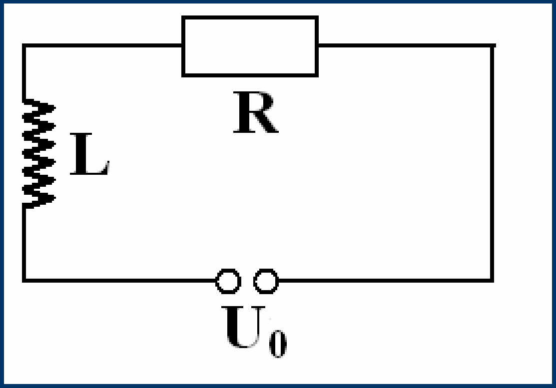
$s(0)=s_0 \quad \Rightarrow \quad c_2=s_0$

Példa: soros R-L kör konstans feszültséggel

Kérdés: soros R-L körre U_0 konstans feszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől?

Az áramerősség-idő függvény a következő elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I(t) = \frac{U_0}{L}$$



A feszültség rákapcsolásakor az áramerősség 0. Ezt az $I(0) = 0$ kezdeti érték feltétellel lehet figyelembe venni.

Az egyenlet homogén megfelelője:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I(t) = 0$$

Ennek általános megoldása:

$$I_H(t) = c \cdot e^{-\int \frac{R}{L} dt} = c \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Az eredeti (inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$I_p(t) = k(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

a k függvényt konstansvariálással határozzuk meg:

NEM NYOMTATÁSRA!

$$k'(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow \quad k'(t) = \frac{U_0}{L}\cdot e^{\frac{R}{L}\cdot t} \quad \Rightarrow$$

$$k(t) = \frac{U_0}{R}\cdot\int e^{\frac{R}{L}\cdot t}dt = \frac{U_0}{L}\cdot\frac{e^{\frac{R}{L}\cdot t}}{\frac{R}{L}} = \frac{U_0}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}\cdot t}$$

Ebből a partikuláris megoldás:

$$I_p(t) = k(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = \frac{U_0}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}\cdot t}\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = \frac{U_0}{R}$$

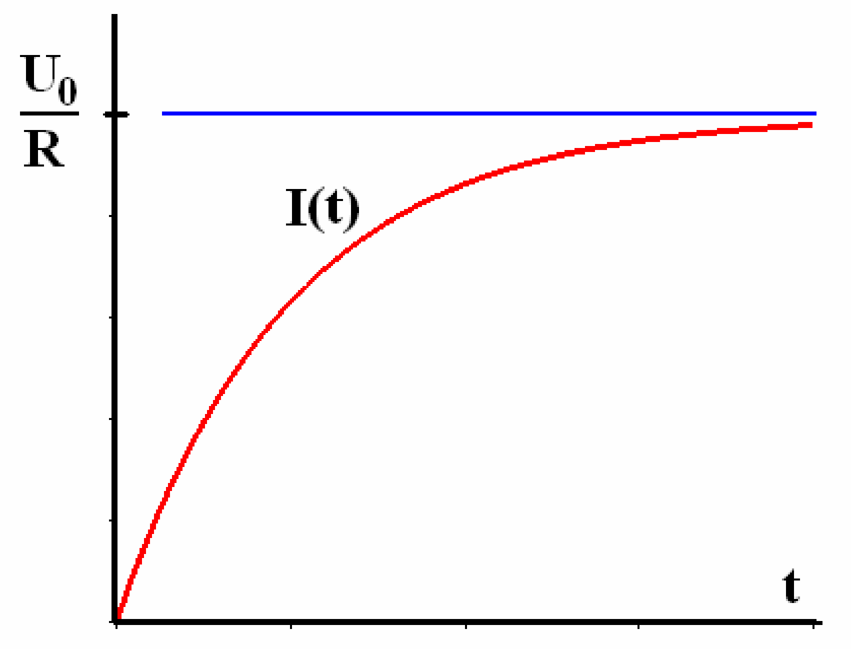
Az inhomogén egyenlet általános megoldása pedig:

$$I_{IH}(t) = I_H(t) + I_p(t) = c\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} + \frac{U_0}{R}$$

$$I_{IH}(t) = I_H(t) + I_p(t) = c \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} + \frac{U_0}{R}$$

$$I(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c + \frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow \quad c = -\frac{U_0}{R}$$



A probléma megoldása:

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} + \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

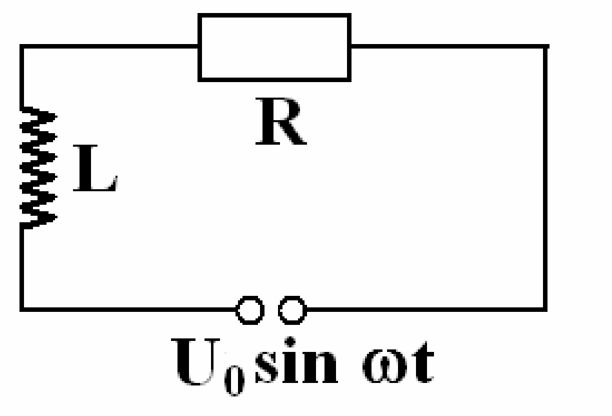
Példa: soros R-L kör váltakozó feszültséggel

Sorosan kapcsolunk egy R ellenállást, egy L induktivitású tekercset és egy U·sin(ωt) függvény szerint időben változó feszültségforrást.

Határozzuk meg az áramerősséget az idő függvényében tudván, hogy a t=0 időpillanatban az áramerősség nulla, azaz I(0)=0.

A fizikából ismeretes, hogy a feladatban leírt esetben az I(t) áramerősség-idő függvény eleget tesz az

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) = U \cdot \sin(\omega t)$$



d.e.-nek. Az egyenletet elosztva L-lel az

IH $$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I(t) = \frac{U}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

lineáris inhomogén d.e.-hez jutunk, ahol $g(t) = \frac{R}{L}$ $h(t) = \frac{U}{L}\sin(\omega t)$

Az

H $$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I(t) = 0$$

homogén egyenlet általános megoldása:

$$I_H(t) = c \cdot e^{-\int g(t)dt} = c \cdot e^{-\int \frac{R}{L}dt} = c \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás módszert alkalmazva az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$k(x)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

alakban keressük. Ezt a függvényt az inhomogén egyenletbe helyettesítve a c függvényre a

$$k'(t)=\frac{U}{L}\cdot\sin(\omega t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

d.e. adódik. Ebből (a parciális integrálási módszert alkalmazva):

$$k(t)=\frac{U}{L}\cdot\int\sin(\omega t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}dt=\frac{U}{R^2-L^2\omega^2}\cdot(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$I_p(t) = k(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U}{R^2 - L^2\omega^2}(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t)$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$I_{IH}(t) = I_H(t) + I_p(t) = c \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U}{R^2 - L^2\omega^2}(R \cdot \sin \omega t - L\omega \cdot \cos \omega t)$$

A k.é.p. megoldása:

$$I(t) = \frac{U}{R^2 - L^2\omega^2}(L\omega \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + R \cdot \sin \omega t - L\omega \cdot \cos \omega t)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Egy, a lineáris esetre visszavezethető d.e. típus: Bernoulli-féle differenciálegyenletek

Ha g,h:I→R folytonos függvények, $\alpha \in$ R, $\alpha \neq 1$, akkor az

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x) \cdot y^{\alpha}(x)$$

egyenletet Bernoulli-féle d.e.-nek nevezzük.

(A függvény értelmezési problémák elkerülése végett feltételezzük, hogy az y függvény nemnegatív értékkészletű!)

A Bernoulli-féle d.e.-ek a következő eljárással visszavezethetők lineáris d.e.-ekre:

NEM NYOMTATÁSRA!

1. Szorozzuk meg az egyenletet $(1-\alpha)\cdot y(x)^{-\alpha}$-val:

$$(1-\alpha)\cdot y(x)^{-\alpha}\cdot y'(x) + g(x)\cdot(1-\alpha)\cdot y^{1-\alpha}(x) = (1-\alpha)\cdot h(x).$$

2. Észrevéve, hogy $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'$, alkalmazzuk a

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

helyettesítést. Így a z függvényre a

$$z'(x) + g(x)\cdot(1-\alpha)\cdot z(x) = (1-\alpha)\cdot h(x)$$

lineáris d.e.-et kapjuk. Ezt az egyenletet megoldva, a kapott z megoldásfüggvényből a keresett y függvény meghatározható.

Példa

$$y'(x) + y(x) = -\frac{1}{y(x)}, \quad y(0) = 1$$

(y≥0)

Itt $\alpha = -1$, így az egyenletet 2y(x)-szel kell szorozni:

$$2y(x)\cdot y'(x) + 2y^2(x) = -2.$$

A $z(x) = y^2(x)$ helyettesítést alkalmazva a

$$z'(x) + 2z(x) = -2$$

inhomogén lineáris d.e.-et kapjuk. Ennek általános megoldása:

$$z(x) = c\cdot e^{-2x} - 1.$$

A z definíciója alapján ebből:

$$y^2(x) = c\cdot e^{-2x} - 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{c\cdot e^{-2x} - 1}$$

A k.é.p. megoldása:

$$y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1=\sqrt{c-1}$$

$$\Rightarrow \quad y(x)=\sqrt{2e^{-2x}-1} \qquad x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\ln 2\right[$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás módszer alkalmazása másodrendű lineáris inhomogén konstansegyütthatós differenciálegyenletek megoldására

Ha $h: I \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, $b, c \in \mathbf{R}$, akkor az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = h(x)$$

egyenletet másodrendű lineáris konstansegyütthatós inhomogén d.e.-nek nevezzük.

Az egyenlet homogén megfelelője:

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

Az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = h(x)$$

másodrendű lineáris konstansegyütthatós inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

ahol y_H az $y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$ egyenlet általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

A konstansvariálás módszer alkalmazásakor a homogén megfelelő általános megoldásából kiindulva kapjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás lépései

$$y_H(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = k_1(x) \cdot y_1(x) + k_2(x) \cdot y_2(x)$$

A k_1 és a k_2 függvények meghatározása: a

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & k_1'(x) \cdot y_1(x) + k_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ \text{II.} & k_1'(x) \cdot y_1'(x) + k_2'(x) \cdot y_2'(x) = h(x) \end{array}$$

egyenletrendszerből a k_1' és a k_2' derivált függvények egyértelműen kiszámíthatók (például a Cramer szabállyal), ezekből pedig integrálással kapjuk az ismeretlen k_1 és k_2 függvényeket.

NEM NYOMTATÁSRA!

Megjegyzés

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása Cramer szabállyal

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 21 \\ 5x_1 + 8x_2 &= -25 \end{aligned}$$

$$D = \det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = 31$$

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 21 & -3 \\ -25 & 8 \end{pmatrix} = 93$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{93}{31} = 3$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 5 & -25 \end{pmatrix} = -155$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-155}{31} = -5$$

A Cramer-szabállyal számolva:

I. $k_1'(x)\cdot y_1(x) + k_2'(x)\cdot y_2(x) = 0$

II. $k_1'(x)\cdot y_1'(x) + k_2'(x)\cdot y_2'(x) = h(x)$

$$D(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$D_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ h(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \qquad D_2(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & h(x) \end{pmatrix}$$

$$k_1'(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} \quad \Rightarrow \quad k_1(x) = \int \frac{D_1(x)}{D(x)}\,dx$$

$$k_2'(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} \quad \Rightarrow \quad k_2(x) = \int \frac{D_2(x)}{D(x)}\,dx$$

$$y_p = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$y''(x) + y(x) = x^2$ IH

$y''(x) + y(x) = 0$ H

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$u = -\frac{b}{2} \qquad v = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$$

$$\left\{ e^{u \cdot x} \cdot \sin(v \cdot x), e^{u \cdot x} \cdot \cos(v \cdot x) \right\}$$

Gyöke nincs, $u = 0$, $v = 1$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_p = k_1(x) \cdot \sin x + k_2(x) \cdot \cos x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

I. $k_1'(x) \cdot y_1(x) + k_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$

II. $k_1'(x) \cdot y_1'(x) + k_2'(x) \cdot y_2'(x) = h(x)$

I. $k_1'(x) \cdot \sin x + k_2'(x) \cdot \cos x = 0$

II. $k_1'(x) \cdot \cos x + k_2'(x) \cdot (-\sin x) = x^2$

$$D(x) = \det\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} = -1$$

$$D_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & \cos x \\ x^2 & -\sin x \end{pmatrix} = -x^2 \cdot \cos x$$

$$k_1'(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} = x^2 \cdot \cos x$$

$$D_2(x) = \det\begin{pmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & x^2 \end{pmatrix} = x^2 \cdot \sin x$$

$$k_2'(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} = -x^2 \cdot \sin x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$k_2'(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} = -x^2 \cdot \sin x \qquad k_1'(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} = x^2 \cdot \cos x$$

$$k_1(x) = \int \frac{D_1(x)}{D(x)} dx = \int x^2 \cdot \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$$

$$k_2(x) = \int \frac{D_2(x)}{D(x)} dx = -\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -2x \sin x + (x^2 - 2) \cos x$$

(A fenti integrálok a parciális módszerrel határozhatók meg. Itt csak az eredményt közöltük.)

$$y_p(x) = k_1(x) \cdot y_1(x) + k_2(x) \cdot y_2(x) =$$

$$= [2x\cdot\cos x + (x^2-2)\cdot\sin x]\cdot\sin x + [-2x\cdot\sin x + (x^2-2)\cdot\cos x]\cdot\cos x = (x^2-2)$$

$$y_{IH}(x) = y_H(x)+y_p(x) = c_1\cdot\sin x + c_2\cdot\cos x + x^2-2 \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás módszer alkalmazása magasabb rendű lineáris inhomogén konstansegyütthatós differenciálegyenletek megoldására

Definíció

Az

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1\cdot y'(x)+a_0\cdot y(x)=h(x)$$

d.e.-et, ahol a_0, a_1, … , a_{n-1} valós számok, a $h:I\to R$ függvény pedig folytonos n-edrendű lineáris inhomogén konstansegyütthatós differenciálegyenleteknek nevezzük.

Az egyenlet homogén megfelelője:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1\cdot y'(x)+a_0\cdot y(x)=0$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = h(x)$$

n-edrendű lineáris inhomogén konstansegyütthatós differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

ahol y_H **az egyenlet homogén megfelelőjének általános megoldása,** y_p **pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.**

A konstansvariálás módszer alkalmazásakor a homogén megfelelő általános megoldásából kiindulva kapjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

NEM NYOMTATÁSRA!

A konstansvariálás lépései

$$y_H(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = k_1(x) \cdot y_1(x) + k_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + k_n(x) \cdot y_n(x)$$

A

$$\mathbf{k_1, k_2, \ldots, k_n}$$

függvények

$$\mathbf{k'_1, k'_2, \ldots, k'_n}$$

derivált függvényei egy n egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszerből határozhatók meg.

(A számoláshoz alkalmazható például a Cramer szabály).

NEM NYOMTATÁSRA!

Az egyenletrendszer:

1. $k_1'(x) \cdot y_1(x) + k_2'(x) \cdot y_2(x) + \ldots + k_n'(x) \cdot y_n(x) = 0$

2. $k_1'(x) \cdot y_1'(x) + k_2'(x) \cdot y_2'(x) + \ldots + k_n'(x) \cdot y_n'(x) = 0$

3. $k_1'(x) \cdot y_1''(x) + k_2'(x) \cdot y_2''(x) + \ldots + k_n'(x) \cdot y_n''(x) = 0$

:

n. $k_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + k_2'(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + k_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = h(x)$

$$\Rightarrow \quad k_1', k_2', \ldots, k_n' \quad \Rightarrow \quad k_1 = \int k_1', k_2 = \int k_2', \ldots, k_n = \int k_n'$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = k_1(x) \cdot y_1(x) + k_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + k_n(x) \cdot y_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_{IH} = y_H + y_p$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A próbafüggvény módszer alkalmazása lineáris inhomogén konstansegyütthatós differenciálegyenletek megoldására

Az

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1\cdot y'(x)+a_0\cdot y(x)=h(x)$$

n-edrendű lineáris inhomogén konstansegyütthatós differenciálegyenletek próbafüggvényekkel való megoldási módszere azon alapul, hogy a d.e. jobb oldalán lévő h függvény (zavaró függvény) alakjából bizonyos esetekben kikövetkeztethető a partikuláris megoldás alakja.

Erre látunk néhány példát az alábbiakban.

NEM NYOMTATÁSRA!

Ha a zavaró függvény polinom

zavaró függvény

$$h(x) = \alpha_k \cdot x^k + \alpha_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$$

próbafüggvény

1. ESET: ha 0 nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek

$$y_p(x) = \beta_k \cdot x^k + \beta_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + \beta_1 \cdot x + \beta_0$$

2. ESET: ha 0 r-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek

$$y_p(x) = x^r \cdot \left(\beta_k \cdot x^k + \beta_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + \beta_1 \cdot x + \beta_0\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa

$$y''(x) - y'(x) - 12y(x) = -12x^2 - 14x + 1$$

Mivel 0 nem gyöke a λ^2-λ-12 polinomnak, az 1. ESET szerint kell a zavaró függvényt felírni:

$$y_p(x) = \beta_2 \cdot x^2 + \beta_1 \cdot x + \beta_0 \quad \Rightarrow \quad y'_p(x) = 2\beta_2 \cdot x + \beta_1$$

$$y''_p(x) = 2\beta_2$$

A próbafüggvényt visszahelyettesítjük az egyenletbe:

$$2\beta_2 - (2\beta_2 \cdot x + \beta_1) - 12 \cdot (\beta_2 \cdot x^2 + \beta_1 \cdot x + \beta_0) = -12x^2 - 14x + 1$$

$$-12\beta_2 \cdot x^2 - (2\beta_2 + 12\beta_1) \cdot x + (2\beta_2 - \beta_1 - 12\beta_0) = -12x^2 - 14x + 1$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$-12\beta_2 \cdot x^2 - (2\beta_2 + 12\beta_1) \cdot x + (2\beta_2 - \beta_1 - 12\beta_0) = -12x^2 - 14x + 1$$

$$-12\beta_2 = -12 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 1$$

$$-(2\beta_2 + 12\beta_1) = -14 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 1$$

$$2\beta_2 - \beta_1 - 12\beta_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_0 = 0$$

$$y_p(x) = \beta_2 \cdot x^2 + \beta_1 \cdot x + \beta_0 = x^2 + x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Ha a zavaró függvény exponenciális függvény

zavaró függvény

$$h(x) = A \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

próbafüggvény

1. ESET: ha α nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek

$$y_p(x) = B \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

2. ESET: ha α r-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek

$$y_p(x) = B \cdot x^r \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa $y''(x) - y(x) = 4e^x \Rightarrow \alpha = 1$

Mivel α=1 egyszeres gyöke a λ^2-1 polinomnak (rezonancia van), a 2. ESET szerint kell a zavaró függvényt felírni:

$$y_p(x) = B \cdot x \cdot e^x \Rightarrow y_p'(x) = B \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x$$

$$y_p''(x) = 2B \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x$$

A próbafüggvényt visszahelyettesítjük az egyenletbe:

$$2B \cdot e^x = 4 \cdot e^x \Rightarrow B = 2 \Rightarrow y_p(x) = 2 \cdot x \cdot e^x$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Ha a zavaró függvény trigonometrikus függvény

zavaró függvény

$$h(x) = A_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + A_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

próbafüggvény

1. ESET: ha $\alpha \cdot i$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek

$$y_p(x) = B_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + B_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

2. ESET: ha $\alpha \cdot i$ r-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek

$$y_p(x) = B_1 \cdot x^r \cdot \cos(\alpha \cdot x) + B_2 \cdot x^r \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa $$y''(x)+4y(x)=\sin 2x \Rightarrow \alpha=2$$

Mivel $\alpha\cdot i=2i$ egyszeres gyöke a λ^2+4 polinomnak (rezonancia van), a 2. ESET szerint kell a zavaró függvényt felírni:

$$y_p(x)=x\cdot\left(B_1\cdot\cos 2x+B_2\cdot\sin 2x\right) \Rightarrow$$

$$y_p'(x)=B_1\cdot\cos 2x+B_2\cdot\sin 2x+x\cdot\left(-2B_1\cdot\sin 2x+2B_2\cdot\cos 2x\right)$$

$$y_p''(x)=-2B_1\cdot\sin 2x+2B_2\cdot\cos 2x-2B_1\cdot\sin 2x+2B_2\cdot\cos 2x+$$

$$+x\cdot\left(-4B_1\cdot\cos 2x-4B_2\cdot\sin 2x\right)$$

$$y_p''(x)=-4B_1\cdot\sin 2x+4B_2\cdot\cos 2x+x\cdot\left(-4B_1\cdot\cos 2x-4B_2\cdot\sin 2x\right)$$

A próbafüggvényt visszahelyettesítjük az egyenletbe:

NEM NYOMTATÁSRA!

$$y''(x) + 4y(x) = \sin 2x$$

$$y_p(x) = x \cdot \left(B_1 \cdot \cos 2x + B_2 \cdot \sin 2x\right)$$

$$y_p''(x) = -4B_1 \cdot \sin 2x + 4B_2 \cdot \cos 2x + x \cdot \left(-4B_1 \cdot \cos 2x - 4B_2 \cdot \sin 2x\right)$$

A próbafüggvényt visszahelyettesítjük az egyenletbe:

$$-4B_1 \cdot \sin 2x + 4B_2 \cdot \cos 2x + x \cdot \left(-4B_1 \cdot \cos 2x - 4B_2 \cdot \sin 2x\right) +$$

$$+ 4x \cdot \left(B_1 \cdot \cos 2x + B_2 \cdot \sin 2x\right) = \sin 2x$$

$$-4B_1 \cdot \sin 2x + 4B_2 \cdot \cos 2x = \sin 2x$$

$$-4B_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{-1}{4}$$

$$4B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = \frac{-1}{4} \cdot x \cdot \cos 2x$$

A Laplace-transzformáció alkalmazása lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletek megoldására

Definíció: Laplace transzformált

Legyen az $f:[0,+\infty[\to \mathbf{R}$ függvény integrálható, és tegyük fel, hogy fennáll az $|f(t)| \le K \cdot e^{s \cdot t}$ egyenlőtlenség valamely s konstanssal. Ekkor az

$$L[f](p) = F(p) = \int_0^\infty e^{-p \cdot t} \cdot f(t)\,dt$$

függvényt az f Laplace transzformáltjának nevezzük.

(A formulában szereplő integrál abszolút konvergens, ha p>s.)

Jelölés: $F = L[f]$, vagy $F(p) = L[f(t)]$.

NEM NYOMTATÁSRA!

Néhány függvény Laplace transzformáltja

$f(t)$	$F(p) = L[f(t)]$
1	$\frac{1}{p}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{\pm a \cdot t}$	$\frac{1}{p \mp a}$
$t \cdot e^{\pm a \cdot t}$	$\frac{1}{(p \mp a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Magyarázat az f(t)=1 függvény esetén:

$$L[f] = F(p) = \int_0^\infty e^{-p \cdot t}\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-p \cdot t}\, dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{p} \right) \left[e^{-p \cdot t} \right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{p} \right) \left[e^{-p \cdot b} - 1 \right] = \frac{1}{p}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

A Laplace transzformáció néhány tulajdonsága

Linearitás

$$L[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 L[f_1] + a_2 L[f_2]$$

Konvolúció tétel

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau\right] = L[f_1]\cdot L[f_2]$$

Integrálhatósági tétel

$$L\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{p}\cdot L[f]$$

Eltolási tétel

$$L[f(t-b)] = e^{-b\cdot t}\cdot L[f]$$

Hasonlósági tétel

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Áthelyezési tétel

$$L\left[e^{-\lambda\cdot t}\cdot f(t)\right] = F(p+\lambda)$$

Szorzási tétel

$$L\left[t^n\cdot f(t)\right] = (-1)^n F^n(p)$$

Osztási tétel

$$L\left[\frac{1}{t}\cdot f(t)\right] = \int_p^\infty F(u)\,du$$

Differenciálhatósági tétel

$$L\left[f^n\right] = p^n\cdot L[f] - p^{n-1}\cdot f_0 - \ldots - p\cdot f_0^{(n-2)} - f_0^{(n-1)}, \quad \text{ahol} \quad f_0^{(k)} = \lim_{t\to +0} f^{(k)}(t)$$

A lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletekhez tartozó k.é.p. egyféle megoldási módszerét az alapozza meg, hogy az y ismeretlen függvény és az f függvény Laplace transzformáltjai összefüggnek.

Az összefüggés alapján az f Laplace transzformáltjának ismeretében (ezt F jelöli) megadható az y ismeretlen függvény Laplace transzformáltja (ezt Y jelöli), abból pedig meghatározható az y függvény:

$$f \xrightarrow{\text{Laplace transzf.}} F \longrightarrow Y \xrightarrow{\text{inverz Laplace transzf.}} y$$

$$Y(p) = \frac{1}{Q(p)} \cdot F(p) + \frac{P(p)}{Q(p)}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az Y és az F függvények közötti összefüggés:

$$Y(p) = \frac{1}{Q(p)} \cdot F(p) + \frac{P(p)}{Q(p)}$$

ahol P és Q polinomok, melyek a differenciálegyenlet együtthatóitól és a kezdeti értékektől függenek.

A későbbiekben megadjuk a P és Q polinomokat az első és a másodrendű lineáris differenciálegyenletek esetén.

NEM NYOMTATÁSRA!

A módszer alapsémája egy Laplace transzformációt:

$$f \Rightarrow F = L[f]$$

és egy inverz Laplace transzformációt:

$$Y \Rightarrow y = L^{-1}[Y]$$

igényel, aminek kiszámítása gyakran nehézségekbe ütközik.

Ilyen esetekben eredményes lehet az alábbi módszer:

Határozzuk meg az 1/Q és a P/Q racionális törtfüggvények inverz Laplace transzformáltjait:

$$y_1 = L^{-1}\left[\frac{1}{Q}\right],\ \ y_2 = L^{-1}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\right]$$

vagyis keressük meg azokat az y_1 és y_2 függvényeket, melyekre

$$L[y_1] = \frac{1}{Q},\ \ L[y_2] = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az y_1 és y_2 függvényeket ismeretében az y függvény az alábbi képletek egyikének alkalmazásával határozható meg:

$$y(t)=\int_0^t \big(f(t-\tau)\cdot y_1(\tau)\big)d\tau+y_2(t)$$

vagy

$$y(t)=\int_0^t \big(f(\tau)\cdot y_1(t-\tau)\big)d\tau+y_2(t)$$

Ennek a módszernek a sémája tehát

P, Q	→	y_1, y_2	→	y
	inverz Laplace transzf.		integrálás	

Az Y és az F függvények kapcsolata elsőrendű k.é.p. esetén

Az

$$a_0 y'(t) + a_1 y(t) = f(t), \qquad y(0) = y_0$$

elsőrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenlethez tartozó k.é.p. esetén:

$$Y(p) = \frac{1}{a_0 p + a_1} \cdot F(p) + \frac{y_0 \cdot a_0}{a_0 p + a_1}$$

Y: az y ismeretlen függvény Laplace transzformáltja

F: az f függvény Laplace transzformáltja

Példa

$$y'(t)+2y(t)=(t+1)\cdot e^{t}, \quad y(0)=1$$

$a_0=1$, $a_1=2$, $y_0=1$ $\Rightarrow$

$$Y(p)=\frac{1}{a_0p+a_1}\cdot F(p)+\frac{y_0\cdot a_0}{a_0p+a_1}$$

$$Y(p)=F(p)\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+2}$$

f(t)	F(p) = L[f(t)]
1	$\frac{1}{p}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{p\mp a}$
$t\cdot e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{(p\mp a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

A táblázatból: $y_1(t)=y_2(t)=e^{-2t}$, tehát

$$y(t)=\int_0^t\left((\tau+1)e^{\tau}\cdot e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau+e^{-2t}$$

$$y(t)=\int_0^t\left(f(\tau)\cdot y_1(t-\tau)\right)d\tau+y_2(t)$$

$$y(t) = \int_0^t \left((\tau+1)e^{\tau} \cdot e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau + e^{-2t} = \int_0^t \left((\tau+1) \cdot e^{-2t+3\tau}\right)d\tau + e^{-2t} =$$

$$= \left(-\frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{1}{3}te^{t} + \frac{2}{9}e^{t}\right) + e^{-2t} = \frac{7}{9}e^{-2t} + \frac{1}{3}te^{t} + \frac{2}{9}e^{t}$$

(Az integrál parciális módszerrel számítható ki, itt csak az eredményt adtuk meg.)

$$y(t) = \frac{7}{9}e^{-2t} + \frac{1}{3}te^{t} + \frac{2}{9}e^{t}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

Az Y és az F függvények kapcsolata másodrendű k.é.p. esetén

Az

$$a_0y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = f(t), \quad y(0) = y_0\,,\ y'(0) = y'_0$$

másodrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenlethez tartozó k.é.p. esetén:

$$Y(p) = \frac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_0} \cdot F(p) + \frac{y_0 \cdot (a_0p + a_1) + y_0' \cdot a_0}{a_0p^2 + a_1p + a_0}$$

Y: az y ismeretlen függvény Laplace transzformáltja

F: az f függvény Laplace transzformáltja

NEM NYOMTATÁSRA!

Példa $$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=e^t+1,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$$

$$Y(p)=\frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_0}\cdot F(p)+\frac{y_0\cdot(a_0p+a_1)+y_0'\cdot a_0}{a_0p^2+a_1p+a_0}$$

a_0=1, a_1=6, a_2=8, y_0=0, y'_0=0 $\Rightarrow$

$$Y(p)=F(p)\frac{1}{p^2+6p+8}+\frac{p+8}{p^2+6p+8}$$

Parciális törtekre bontás után:

$$Y(p)=F(p)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+4}\right)+\left(3\cdot\frac{1}{p+2}-2\cdot\frac{1}{p+4}\right)$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$Y(p) = F(p)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+4}\right) + \left(3\cdot\frac{1}{p+2} - 2\cdot\frac{1}{p+4}\right)$$

$f(t)$	$F(p) = L[f(t)]$
1	$\frac{1}{p}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{p\mp a}$
$t\cdot e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{(p\mp a)^2}$

A táblázatból:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}\cdot e^{-4t}$$

$$y_2(t) = 3\cdot e^{-2t} - 2\cdot e^{-4t}$$

$$y(t) = \int_0^t \big(f(\tau)\cdot y_1(t-\tau)\big)d\tau + y_2(t)$$

$$y(t) = \int_0^t \left((e^\tau+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}\cdot e^{-4(t-\tau)}\right)\right)d\tau + 3\cdot e^{-2t} - 2\cdot e^{-4t} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{15}\cdot e^{t} + \frac{1}{8} + \frac{31}{12}\cdot e^{-2t} - \frac{71}{40}\cdot e^{-4t}$$

NEM NYOMTATÁSRA!

$$y(t)=\int_0^t\left((e^{\tau}+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-2(t-\tau)}-\frac{1}{2}\cdot e^{-4(t-\tau)}\right)\right)d\tau+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^t\left(e^{-2t+3\tau}-e^{-4t+5\tau}+e^{-2(t-\tau)}-e^{-4(t-\tau)}\right)d\tau+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left[e^{-2t+3\tau}\right]_0^t-\frac{1}{10}\cdot\left[e^{-4t+5\tau}\right]_0^t\cdot e^{-4t+5\tau}+\frac{1}{4}\cdot\left[e^{-2t+2\tau}\right]_0^t-$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\left[e^{-4t+4\tau}\right]_0^t+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot e^{t}+\frac{1}{8}-\frac{5}{12}\cdot e^{-2t}+\frac{9}{40}\cdot e^{-4t}+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot e^{t}+\frac{1}{8}+\frac{31}{12}\cdot e^{-2t}-\frac{71}{40}\cdot e^{-4t}$$